Ciencia y Tecnología **18** No.1,2(1995) 31-51

Acerca de si pudo o no ser el universo anisotrópico ?

Rodrigo Alvarado
Universidad de Costa Rica
Escuela de Física, San José, Costa Rica

Abstract: The theoretical and experimental problem concernig the origin and formation of the universe is establish in this paper, specially by developing some theories that try to explain this phenomena, and also to settle the reasons why the universe could habe been anisotropic and homogenous at the very beginning, evolving in time later on in what we see today. Besides some other posibilities are studied in order to avoid the singularity at the beginning of the universe. Some exact solutions are obtained by autoconsistency with the Einstein equations utilizing for that purpose different types of interactions among the spinor and the scalar fields, with and without matter.

Subject headings: Anisotropic universe, spinor field, scalar matter field

Resumen: El problema teórico y experimental, en establecer el origen y la formación del universo, es planteado en este trabajo, desarrollando un análicis de algunas teorías que tratan de explicar este fenómeno, y del planteamiento por el cual, el universo pudo haber sido anisotrópico y homogéneo en sus principios, convirtiéndose al paso del tiempo, en el que hoy día conocemos, así mismo, se analizan las posibilidades de evitar la singularidad inicial del universo para este caso. Además se obtienen algunas soluciones exactas de autoconsistencia a las ecuaciones de Einstein, utilizando para ello, distintos tipos de interacciones entre los campos espinoriales y escalares con y sin sustancia.

Encabezados de materia: universo anisotrópico, campo espinorial, campo escalar de materia

1. Introducción

El origen del universo es un problema de gran actualidad en la física moderna, existen varias teorías físicas acerca de la formación y desarrollo de éste. Una de las teorías más recientes, es la que se podría llamar *la teoría de las cuatro partículas*, propuesta por el físico ruso Ya. P. terletskii[1], según la cual, el universo tuvo que haber tenido su nacimiento del vacío con reacciones físicas fundamentales provocadas por 4 partículas, dos de ellas con masa negativa, ***negatones***, y diferenciadas entre si, por el signo de la carga, y otras dos con masa positiva, ***positones***, diferenciadas de la misma manera por la carga. Esta teoría demuestra, que no podrían existir variantes de 2 partículas, por ejemplo un negatón y un positón, ya que se provocaría un tipo de impulso en el vacío, cosa que daría como resultado, inhomogenidad en el universo que conocemos. La teoría de las 4 partículas tiene sus problemas a nivel experimental, cosa que la hace ser una de las menos aceptadas, ya que en los experimentos no se observan partículas de masa negativa; sin embargo, el autor considera que esto se debe al hecho, de que las partículas con masa negativa, y por lo tanto, con energía negativa, no pueden ser observadas en el experimento, ya que todos los instrumentos están hechos para recibir energía, y no para donarla, cosa que se presentaría, en caso de que se observara los negatones, además de argumentar, que la densidad de dichas partículas, si existen, sería igual a la densidad del universo que sí podemos observar, siendo la densidad de las partículas con masa negativa, más homogénea que la de los positones.

Otra teoría conocida sobre la formación del universo, es la teoría del universo estacionario, propuesta por los físicos F. Hoyle, H. Bondi y T. Gold, en 1948, según la cual, en el universo constantemente surgen partículas en pequeñas explosiones de un campo C con densidad energética negativa, existiendo una relación proporcional entre el surgimiento de las partículas y la expansión del universo, siendo así, el universo en general estacionario. Sin embargo, una de las principales dificultades de esta teoría es la explicación de las hipótesis que de ella surgen en el área de la física cuántica; no pudiendo aclarecer el fenómeno del surgimiento, en la nada, de la materia. Además de esta dificultad, existe el problema de la observación y de los datos experimentales, que en muchos casos no concuerdan con los resultados teóricos, tomados de esta teoría.

Una de las teorías más aceptadas, es la teoría de la gran explosión, o modelo de Fridman, según la cual, el universo debió de haberse encontrado comprimido en un punto de infinita masa y densidad, al cual la física actual no podría describir. Según esta teoría, el universo no es estacionario, esto significa, que en su desarrollo a través del tiempo, él, ha sufrido algunos cambios en sus magnitudes, como lo es por ejemplo, la energía. Una de las causas fundamentales por las que se proponen teorías distintas a la de Fridman, es por el hecho de que de sus soluciones, surge una singularidad inicial, que según, el teorema de Hawking y Penrose no puede ser evitada, y de la cual prácticamente no sabemos nada en el punto $t=0$, conociendo sólo algunas cosas que se pudieron haber dado, en caso de que las soluciones sean correctas, en un tiempo no menor $t=10^{-43}$ segundos.

Casi todos los físicos están de acuerdo en que los procesos que se presentan a nivel atómico (cuánticos), no deben de ser omitidos cuando se estudia el universo y sus inicios, ya que pueden ser precisamente éstos, la solución final y prueba, de alguna de las teorías que tratan de explicar el desarrollo y el surgimiento del universo.

Hasta el momento, según los datos experimentales, la teoría que mejor representa nuestro universo es la teoría de la gran explosión, basada prácticamente en las soluciones de Fridman, sin embargo, surge la pregunta; habría sido siempre el universo tal y como lo conocemos, o sea isotrópico y homogéneo, o pudo ser anisotrópico e inhomogéneo, en sus inicios ?; fue demostrado en trabajos de Zeldovich [2], de Grib y Mamaev [3], que en inicios del universo, considerando al universo isotrópico, no pudieron haber nacido partículas con masa propia nula y prácticamente no nacen con masa propia distinta a cero (con tiempos de diez a la menos cuarenta y tres segundos), por lo tanto, partículas de frecuencia proporcional a diez a la cuarenta y tres, no surgieron; esto último no ocurre en el caso en que se considere el universo en sus inicios anisotrópico. El proceso del nacimiento de partículas en un universo anisotrópico, como lo es por ejemplo el espacio tipo Bianchi-1, se puede considerar en términos de la hidrodinámica, como una formación de viscocidad en el vacío, provocada por la deformación de éste, y de la cual surge calor y por lo tanto, aumento de la entropía.

Existen muchas preguntas aún, sobre las radiaciones de fondo (prehistóricas), que tuvieron inicio en las cercanías de la singularidad, incluso la teoría del universo caliente no es considerada necesariamente correcta en toda época del desarrollo del universo, este tipo de problemas teóricos y experimentales, hacen suponer que el universo pudo haber sido anisotrópico, por lo menos en un período del desarrollo muy cercano a la singularidad; una prueba de que el universo pudo haber sido anisotrópico, son las radiaciones de fondo de tipo de neutrino, que tendrían que tener, una temperatura mayor a las radiaciones de fondo de tipo fotónica, o sea, mayores que T=2,7 K, pero con una densidad media parecida a la de las radiaciones fotónicas.

2. Soluciones de autoconsistencia a las interacciones de los campos escalares y espinoriales, en un universo anisotropico de tipo Bianchi-1

Si el universo fué, por lo menos en sus inicios, anisotrópico pero homogéneo, su anisotropía tuvo que haber sido el efecto de campos que existían, y que tuvieron gran influencia sobre el espacio y en la expansión del universo, este tipo de campos, pudieron ser el campo espinorial y el campo escalar en conjunto; a su vez, si todo ésto es correcto, las soluciones obtenidas deberían necesariamente concordar con el universo que conocemos en la actualidad, dicho de otra manera, las soluciones del universo anisotrópico deben de convertirse en soluciones de un universo isotrópico al paso del tiempo, o sea, cuando el tiempo tiende al infinito.

Como ya se estableció, si el universo fue anisotrópico, debieron de surgir partículas en inicios del desarrollo de éste, por eso es necesario establecer un tipo de interacción entre los campos escalares y espinoriales, interacción que represente la formación de nuevas partículas. Esta interacción es de manera muy correcta representada por un componente, en la función de Lagrange, de tipo no lineal.

La función de Lagrange se puede escribir de la siguiente manera

$$L = \frac{R}{2\kappa} + \frac{\imath}{2}(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\nabla_{\mu}\psi - \nabla_{\mu}\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi) - m\overline{\psi}\psi + (\frac{1}{2})\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}\Phi(S) + L_{sust}, \tag{1}$$

en donde la R-es la curvatura escalar, κ -la constante gravitacional de Einstein, la función $\Phi(S) = 1 + \lambda F(S)$, $S = \overline{\psi}\psi$ es una funcion nolineal del campo escalar, λ -es el parámetro de interacción y L_{sust}-la función de Lagrange que representa la sustancia. Está claro, que si $\lambda = 0$, la interacción entre los campos se pierde, este caso es el de relación minimizada de los campos, y en caso de que se tome en cuenta la sustancia de la matería, se debe de considerar m=0, para que ésta no sea considerada dos veces en la función de Lagrange.

Utilizaremos la métrica de Bianchi-1 de la siguiente forma:

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 dx^2 - b(t)^2 dy^2 - c(t)^2 dz^2. \tag{2}$$

De la función de Lagrange (1), y la métrica (2); obtendremos las ecuaciones de Einstein, las ecuaciones del campo espinorial y las del campo escalar, así mismo serán obtenidos los componentes del tensor energía-impulso.

Las ecuaciones de Einstein, para los componetes a(t), b(t), c(t), se escriben de la siguiente forma:

$$\frac{\ddot{a}}{a} + (\frac{\dot{a}}{a})(\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}) = -\kappa(T_1^1 - T/2), \tag{3}$$

$$\frac{\ddot{b}}{b} + (\frac{\dot{b}}{b})(\frac{\dot{c}}{c} + \frac{\dot{a}}{a}) = -\kappa(T_2^2 - T/2), \tag{4}$$

$$\frac{\ddot{c}}{c} + (\frac{\dot{c}}{c})(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b}) = -\kappa(T_3^3 - T/2), \tag{5}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\ddot{b}}{b} + \frac{\ddot{c}}{c} = -\kappa(T_0^0 - T/2), \tag{6}$$

en donde el punto representa la derivada por t y T_α^α es el tensor energía-impulso.

Estudiaremos modelos del universo, sin tomar en cuenta la sustancia, esta última será más adelante, en otros modelos considerada.

3. Interacciones entre los campos escalares y espinoriales sin consideración de la sustancia

De la función de Lagrange (1), se pueden obtener las ecuaciones del campo escalar y el campo espinorial, además de los componentes del tensor energía-impulso, estas ecuaciones y componentes pueden ser escritos así:

$$\imath\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m\psi + \frac{1}{2}\varphi_{,\alpha}\varphi^{,\alpha}\Psi'(S)\psi = 0, \Psi'(S) = \frac{d\Psi}{dS}, \tag{7}$$

$$(\frac{1}{\sqrt{-g}})\frac{\partial}{\partial^\nu}[\sqrt{-g}g^{\nu\mu}\{\varphi_{,\mu}\Phi(S)\}] = 0, \tag{8}$$

$$T_\mu^\rho = (\frac{\imath}{4})g^{\rho\nu}[\overline{\psi}\gamma_\mu\nabla_\nu\psi - \nabla_\mu\overline{\psi}\gamma_\nu\psi + \overline{\psi}\gamma_\nu\nabla_\mu\psi - \nabla_\nu\overline{\psi}\gamma_\mu\psi] + \varphi_{,\mu}\varphi^{,\rho}\Psi(S) - \delta_\mu^\rho(L - L_{sust} - \frac{R}{2\kappa}). \tag{9}$$

La derivada covariante del espinor $\nabla_\mu\psi$, se busca en la forma siguiente:

$$\nabla_\mu\psi = \partial_\mu\psi - \Gamma_\mu\psi,$$

donde $\Gamma_\mu(x)$- son las matrices de afinidad de relación del campo espinorial. Las matrices $\gamma_\mu(x)$, en la métrica (2), puden ser escritas de la siguiente manera:

$$\gamma^0 = \overline{\gamma}^0, \quad \gamma^1 = \frac{\overline{\gamma}^1}{a(t)}, \quad \gamma^2 = \frac{\overline{\gamma}^2}{b(t)}, \quad \gamma^3 = \frac{\overline{\gamma}^3}{c(t)},$$

en donde $\overline{\gamma}^a$-son las matrices de Dirac en el mundo plano del espacio y tiempo. Las matrices $\Gamma_\mu(x)$ se determinan por las siguientes igualdades

$$\Gamma_\mu(x) = (1/4)g_{\rho\sigma}(x)[\partial_\mu e^b_\delta e^b_\rho - \Gamma^\rho_{\mu\delta}]\gamma^\sigma\gamma^\delta,$$

donde $e^a_\mu(x)$-es la tetrada de la métrica (2).

Las matrices $\Gamma_\mu(x)$, tienen entonces las siguientes formas:

$$\Gamma_0 = 0, \quad \Gamma_1 = \frac{\dot{a}(t)\overline{\gamma}^1\overline{\gamma}^0}{2},$$

$$\Gamma_2 = \frac{\dot{b}(t)\overline{\gamma}^2\overline{\gamma}^0}{2}, \quad \Gamma_3 = \frac{\dot{c}(t)\overline{\gamma}^3\overline{\gamma}^0}{2}.$$

Las matrices $\overline{\gamma}^a$ tienen la forma:

$$\overline{\gamma}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\gamma}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\gamma}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\imath \\ 0 & 0 & \imath & 0 \\ 0 & \imath & 0 & 0 \\ -\imath & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \overline{\gamma}^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\gamma}^5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\overline{\gamma}^5 = -\imath\overline{\gamma}^0\overline{\gamma}^1\overline{\gamma}^2\overline{\gamma}^3.$$

$$\gamma^5 = -(\frac{\imath}{4})E_{\mu\nu\lambda\rho}\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma^\rho, \quad E_{\mu\nu\lambda\rho} = \sqrt{-g}\epsilon_{\mu\nu\lambda\rho},$$

$$\epsilon_{0123} = 1, \quad \gamma^5 = -\imath\sqrt{-g}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = -\imath\overline{\gamma}^0\overline{\gamma}^1\overline{\gamma}^2\overline{\gamma}^3 = \overline{\gamma}^5.$$

las funciones del campo, pueden depender únicamente del tiempo, esta dependencia, puede ser notada en las ecuaciones de Einstein. Estudiemos las soluciones de las ecuaciones de los campos escalares y espinoriales (7) y (8), en donde $\varphi = \varphi(t)$ y $\psi_\alpha = V_\alpha(t)$, y en donde los índices $\alpha = 1, 2, 3, 4$. Para este caso, la solución a la ecuación del campo escalar es:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{C}{\tau \Psi}, \tag{10}$$

donde C es una constante y $\tau = a(t)b(t)c(t)$, considerando la solución (10); la ecuación (7) se puede escribir de la siguiente manera:

$$\imath\bar{\gamma}^0\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\dot{\tau}}{2\tau}\right)V - mV - \frac{C^2 P'(S) V}{2\tau^2} = 0 \tag{11}$$

donde $P(S) = 1/\Psi(S)$; $P'(S) = dP/dS = -\Psi'/\Psi^2$. Para el componente $\psi_\alpha = V_\alpha(t)$, de la ecuación (11), obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\dot{V}_r + \frac{\dot{\tau} V_r}{2\tau} + \imath\left(m + \frac{C^2 P'(S)}{2\tau^2}\right)V_r = 0, r = 1, 2, \tag{12}$$

$$\dot{V}_s + \frac{\dot{\tau} V_s}{2\tau} - \imath\left(m + \frac{C^2 P'(S)}{2\tau^2}\right)V_s = 0, s = 3, 4. \tag{13}$$

Del sistema (12), (13), encontramos la ecuación para la función invariante del campo espinorial $S = \bar{\psi}\psi = V_1^* V_1 + V_2^* V_2 - V_3^* V_3 - V_4^* V_4$, que tiene la forma

$$\dot{S} + \frac{\dot{\tau} S}{\tau} = 0, \tag{14}$$

de donde obtenemos que

$$S = \frac{C_0}{\tau}, \quad C_0 = const. \tag{15}$$

Por cuanto, en el caso observado P depende sólamente de S, obtenemos que P(S) y P'(S) son funciones de $\tau(t)$. Considerando la solución (15) al invariante S, integramos el sistema de ecuaciones (12) y (13), que nos lleva a las siguientes igualdades:

$$V_r(t) = \frac{C_r}{\sqrt{\tau}} e^{[-\imath(mt + \int Q\,dt)]}, \quad r = 1, 2; \tag{16}$$

$$V_s(t) = \frac{C_s}{\sqrt{\tau}} e^{[\imath(mt + \int Q\,dt)]}, \quad s = 3, 4, \tag{17}$$

en donde $Q(t) = C^2 P'/(2\tau^2), C_r, C_s$ -son las constantes de la integración.

Colocando (10), (16) y (17) en (9), obtenemos las siguientes expresiones para los componentes del tensor energía-impulso de los campos interactivos escalares y espinoriales:

$$T_0^0 = \frac{\imath N}{2} + \frac{C^2 P}{\tau^2} - R, T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -R, \tag{18}$$

donde

$$N = -2\imath(C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 - C_4^2)\frac{(m+Q)}{\tau} = -2\imath C_0(\frac{m}{\tau} + \frac{C^2P'}{2\tau^3}); \tag{19}$$

$$R = C^2(\frac{P}{2\tau^2} + \frac{C_0P'}{2\tau^3}), T = T_\alpha^\alpha = \imath\frac{N}{2} + \frac{C^2P}{\tau^2} - 4R. \tag{20}$$

La suma de las ecuaciones de Einstein (3), (4), (5), conllevan a la ecuación siguiente

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = -\kappa(T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 - \frac{3T}{2}) = 3\kappa(\frac{mC_0}{2\tau} - \frac{C_0C^2P'}{4\tau^3}), \tag{21}$$

nótese que en esta ecuación, P es cualquier función de τ ya que como fue establecido anteriormente $S = C_0/\tau$. La primer integral de la ecuación diferencial nolineal (21), tiene la siguiente forma:

$$\dot{\tau}^2 = 3\kappa(mC_o\tau + \frac{C^2P}{2} + C_1^{'}), \quad C_1^{'} = const. \tag{22}$$

Finalmente la solución de la ecuación (21) es:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{mC_0\tau + \frac{C^2P}{2} + C_1^{'}}} = \pm\sqrt{3\kappa}(t + t_0), \quad t_0 = const. \tag{23}$$

Si se concretiza la función $P = 1/\Psi$, entonces la integral puede ser resuelta, y por lo tanto, se puede obtener la dependencia de τ con respecto al tiempo; una vez que ésto es hecho, podemos obtener las funciones de los campos escalares y espinoriales.

Antes de observar distintos casos, de posibles interacciones representados por la función de P, recordemos que la misión principal es establecer, si es posible o no, y bajo que condiciones, encontrar soluciones para la métrica (2), tales que cuando $t \to \infty$, la métrica cambie de ser anisotrópica, y pase a ser una métrica isotrópica, esto establecería la posibilidad de que el universo hubiese podido ser anisotrópico en sus inicios; para ello debemos de encontrar primero las funciones de a(t), b(t), c(t) con dependencia, de por lo menos τ. Para esto último, notemos que la diferencia de las ecuaciones (3)-(4) se puede escribir así

$$\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\ddot{b}}{b} + (\frac{\dot{c}}{c})(\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b}) = (\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b})^{\cdot} + (\frac{\dot{a}}{a} - \frac{\dot{b}}{b})(\frac{\dot{\tau}}{\tau}) = 0. \tag{24}$$

La ecuación (24), tiene la siguiente solución

$$\frac{a}{b} = D_1e^{(X_1\int\frac{dt}{\tau})}, \quad D_1 = const, \quad X_1 = const. \tag{25}$$

Analógicamente, las diferencias de las ecuaciones (3)-(5) y (4)-(5), con llevan a las siguientes soluciones

$$\frac{a}{c} = D_2e^{(X_2\int\frac{dt}{\tau})}, \tag{26}$$

$$\frac{b}{c} = D_3e^{(X_3\int\frac{dt}{\tau})}, \tag{27}$$

donde D_2, D_3, X_2, y X_3 son constantes de la integración.

Entre las constantes D_1, D_2, D_3, X_1, X_2, X_3 existen las siguientes relaciones:

$$D_2 = D_1 D_3 \quad y \quad X_2 = X_1 + X_3. \tag{28}$$

Utilizando las igualdades (25), (26), (27) y (28), podemos obtener las funciones métricas en las formas siguientes:

$$a(t) = (D_1^2 D_3)^{1/3} \tau^{1/3} e^{(\frac{2X_1+X_3}{3}) \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{\tau}}, \tag{29}$$

$$b(t) = (\frac{D_3}{D_1})^{1/3} \tau^{1/3} e^{-(\frac{X_1-X_3}{3}) \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{\tau}}, \tag{30}$$

$$c(t) = (D_1 D_3^2)^{-1/3} \tau^{1/3} e^{-(\frac{X_1+2X_3}{3}) \int_{t_0}^{t} \frac{dt'}{\tau}}, \tag{31}$$

en donde t_0- es el momento inicial.

De esta forma, el sistema de ecuaciones de Einstein y de los campos interactivos espinoriales y escalares, han sido en su totalidad integrados. En el proceso de integración, fueron utilizadas solamente las primeras tres ecuaciones de Einstein (3), (4), (5), la ecuación (6) es dependiente de estas tres. Para darse cuenta de lo correcto de las soluciones obtenidas (29), (30), (31), es necesario poner las funciones a(t), b(t), c(t) en la ecuación (6); después de ésto encontraremos una igualdad o una relación, entre las constantes de integración que forman parte de la solución:

$$\frac{1}{3\tau}[3\ddot{\tau} - \frac{2\dot{\tau}^2}{\tau} + \frac{2}{\tau}(X_1^2 + X_1 X_3 + X_3^2)] = -\kappa(T_0^0 - T/2), \tag{32}$$

cumplimiento que garantizaría, que la solución sea correcta.

Utilizaremos la igualdad (32) para encontrar la constante C_1' en la integral (23). Para ésto, en la ecuación (32) colocamos $\ddot{\tau}$ de la ecuación (21) y $\dot{\tau}^2$ de la (22), obteniendo así

$$T_0^0 - T/2 = \frac{\imath N}{4} + \frac{C^2 P}{2\tau^2} + R = \frac{C_0 m}{2\tau} + \frac{C^2 P}{\tau^2} + \frac{3 C_0 C^2 P'}{4\tau^3}. \tag{33}$$

De esta manera, la ecuación (32), se transforma en igualdad si

$$C_1' = \frac{(X_1^2 + X_1 X_3 + X_3^2)}{9\kappa}, \tag{34}$$

lo que demuestra que la constante C_1' es positiva.

Antes de analizar las soluciones, de autoconsistencia, del sistema de ecuaciones entre los campos escalares y espinoriales, analizaremos el sistema de los campos con relación minimizada, o sea, cuando la interacción entre los campos escalar y espinorial no se dá; en este caso la función $\Psi = 1$. Tener la solución exacta de las ecuaciones de autoconsistencia de los campos con relación, entre ellos, minimizada, es importante para que sea comparada con soluciones en las cuales se contemplan interacciones entre estos campos, y de esta manera, através de la comparación de las soluciones, darnos cuenta del rol que juega cada tipo de interacción en el desarrollo del universo.

Para el sistema de los campos, con interacción minimizada, los componentes del tensor energía-impulso tienen la siguiente forma:

$$T_0^0 = \frac{C_0 m}{2\tau} + \frac{C^2 P}{\tau^2}, \quad T_1^1 = T_2^2 = T_3^3 = -\frac{C_2}{2\tau}, \tag{35}$$

$$T = T_\alpha^\alpha = \frac{mc_0}{\tau} - \frac{C^2}{2\tau^2}, T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 - \frac{3T}{2} = -\frac{3mC_0}{2\tau}. \tag{36}$$

Notemos, que por cuanto la densidad de la energía T_0^0, debe de ser una magnitud positiva, se obtiene que la constante $C_0 > 0$. La desigualdad $C_0 > 0$ se conserva también para los modelos en donde existe interacción entre los campos escalares y espinoriales, ya que en estos casos, debe de cumplirse el principio de la correspondencia.

Considerando las igualdades (35), (36), la ecuación (21) se escribe de esta manera:

$$\ddot{\tau} = \frac{3\kappa m C_0}{2}. \tag{37}$$

La solución de la ecuación (37), es la siguiente

$$\tau(t) = \frac{3\kappa m C_0 t^2}{4} + \tau_1 t + \tau_2, \quad \tau_1, \tau_2 = const. \tag{38}$$

Colocaremos $\tau(t)$ de la solución (38) en (16) y (17) para obtener las funciones del campo espinorial, en la (10) para la del campo escalar, y en las igualdades (28), (29), (30) para las funciones de la métrica; de esta forma tenemos que:

$$V_r(t) = \frac{C_r}{\sqrt{\frac{3\kappa m C_0 t^2}{4} + \tau_1 t + \tau_2}} e^{[-\imath m t]}, \quad r = 1, 2; \tag{39}$$

$$V_s(t) = \frac{C_s}{\sqrt{\frac{3\kappa m C_0 t^2}{4} + \tau_1 t + \tau_2}} e^{[\imath m t]}, \quad s = 3, 4, \tag{40}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{C}{\frac{3\kappa m C_0 t^2}{4} + \tau_1 t + \tau_2}. \tag{41}$$

$$a(t) = (D_1^2 D_3)^{1/3} \tau^{1/3} Z^{(\frac{2X_1 + X_3}{3})}, \tag{42}$$

$$b(t) = (\frac{D_3}{D_1})^{1/3} \tau^{1/3} Z^{-(\frac{X_1 - X_3}{3})}, \tag{43}$$

$$c(t) = (D_1 D_3^2)^{-1/3} \tau^{1/3} Z^{-(\frac{X_1 + 2X_3}{3})}, \tag{44}$$

en donde

$$Z = [\frac{(t - t_1)}{(t - t_2)}]^\sigma, \quad \sigma = \frac{4}{3\kappa C_0 (t_1 - t_2)}, \tag{45}$$

y $t_{1,2} = (-2\tau_1 \pm 2\sqrt{\tau_1^2 - 3\kappa m C_0 \tau_2})/(3\kappa m C_0)$- estas son las raíces del polinomio, que se encuentra en la parte derecha de la igualdad (38). Si estas raíces pertenecen al grupo de los reales, o sea si

$$\tau_1^2 - 3\kappa m C_0 \tau_2 \geq 0, \tag{46}$$

entonces la solución (38) sería singular, en caso contrario no. Al colocar (38) en (31), obtenemos la siguiente relación, entre las constantes que se encuentran en las soluciónes

$$\tau_1^2 - 3\kappa m C_0 \tau_2 = \frac{3}{2}\kappa C^2 + \frac{(X_1^2 + X_1 X_2 + X_3^2)}{3}. \tag{47}$$

Por cuanto la parte derecha de la igualdad (47) es estríctamente positiva, queda comprobado que la desigualdad (46) es correcta, y que por lo tanto, las soluciones de los campos y de la métrica, son singulares en el punto $t = t_1$, y por esto $t_1 > t_2$, $\quad t_1 \leq t \geq \infty$.

Observemos las soluciones de la (38) a la (44) cuando $t \to \infty$. Considerando esto último, tenemos que: $\tau(t) \cong 3\kappa m C_0 t^2/4$ y $a(t) \sim b(t) \sim c(t) \sim t^{2/3}$, de donde se obtiene la conclusión de que el universo, al paso del tiempo, cambió su régimen anisotrópico por el régimen de expansión de tipo isotrópico. De esta manera, las soluciones de las ecuaciones del sistema de autoconsistencia de los campos escalares y espinoriales, dentro de la gravedad, con relación minimizada de los campos, son singulares en un momento inicial del tiempo, y en el transcurso del desarrollo del universo, surge un cambio en su configuración convirtiéndose así, en un universo isotrópico.

De este resultado se nota también, que las interacciones entre los campos no son necesarias para que el universo tenga este cambio através del tiempo, o sea, que en los principios del universo, pudieron no haberse dado distintas reacciones y formaciones de partículas de estas interacciones, y esto de ninguna manera, hubiera impedido que el universo fuera el que es hoy día. Sin embargo, los campos por si mismos influyen en la expansión del universo, como se puede notar, si es que quitamos el componente m de las soluciones que se obtuvieron, nótece que m es el parámetro masivo del campo espinorial, ésto significa que es precisamente este campo el que tiene un carácter determinativo en las soluciones con tendencia a la isotropía (por lo menos dentro de la función de Lagrange (1), sin considerar la sustancia); esto de ninguna manera significa que el campo escalar no participe en el cambio de régimen de expansión, como será visto luego, cuando analicemos modelos de interacciones con elementos nolineales por parte del campo espinorial.

Casos Particulares

Estudiemos las interacciones entre campos escalares y campos epinoriales de tipo directa, veamos por ejemplo, el caso cuando se tiene la función $\Psi = 1 + \lambda S^n$, colocando esta igualdad en la integral (23) tenemos que

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{mC_0\tau + \frac{C^2}{2(1+\lambda C_0^n \tau^{-n})} + C_1'}} = \sqrt{3\kappa} t, \tag{48}$$

De la integral (48), tenemos que si $t \to \infty$, la solución que se obtiene, es análoga a la solución del caso de la relación minimizada entre los campos, o sea que

$$\tau(t) \cong \frac{3\kappa m C_0 t^2}{4}, \tag{49}$$

esto último, para cualquier tipo de valor que tenga n y "λ".

Si consideramos n=0, obtenemos que para el caso cuando $t \to 0$, la solución tiende a ser

$$\tau(t) \cong \sqrt{3\kappa(\frac{C^2}{2(1+\lambda)} + C_1')t}.$$

Y si $n < 0$, entonces

$$\tau(t) \cong \sqrt{3\kappa(\frac{C^2}{2} + C_1')t}.$$

Para el caso cuando $n > 0$, entonces $\tau(t) \cong \sqrt{3\kappa C_1'}t$.

Las soluciones encontradas, para la interacción *F(S)* de forma exponencial, aclarecen el sentido del campo escalar; ya que si se viera el caso en donde el campo espinorial se encuentra solo, o sea, sin ninguna influencia en la función de Lagrange (1), por parte del campo escalar, las posibles soluciones para lograr que se dé el cambio a la isotropía, del universo inicialmente anisotrópico, son limitadas por el exponente n y el parámetro λ. Es por ésto, que el campo escalar juega un rol de deslimitador, en las soluciones que presentan y posibilitan este cambio de configuración en el universo, si es que se toma una estructura de interacción $F(S) = \lambda S^n$, en la formación de los modelos de universos inicialmente anisotrópicos. Es importante también notar, que ni el campo escalar ni el espinorial, participan en la estructura de la métrica en las cercanías de t=0, cuando $n > 0$, sin embargo, si $n \leq 0$, se aprecia una participación, de mayor intensidad, por parte del campo escalar en el régimen de expansión, o sea, en la métrica, el cual se va perdiendo con el paso del tiempo, a medida que se expande el universo.

En las respuestas, para estos casos de interacciones, fueron tomados el valor "+" delante de la integral y el valor $t_0 = 0$; esto de ninguna manera contribuye a cambios significativos en las soluciones, y lo único que quiere decir, es que vemos al tiempo dirigirse de una manera positiva, por la cual se cumple el principio de causa, y el cual tiene su inicio en el punto $t = t_0 = 0$.

Veamos el caso cuando $P = 1 + \lambda S^n$. Este caso representa una interacción, gracias a la cual, el campo espinorial es más influyente que el campo escalar (en el sentido energético), dentro del sistema de reacciones físicas, que se pudieron haber dado en inicios del universo entre partículas. Para este caso, el parámetro λ tiene de nuevo el sentido anterior, y de la misma manera se cumple la igualdad $\lambda = 0$ para la relación minimizada. Retomando la integral (23) para el caso particular de $P = 1 + \lambda S^n$, obtenemos

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{mC_0\tau + \frac{\lambda C^2 C_0^n}{2\tau^{-n}} + C_2^2}} = \sqrt{3\kappa}t, \tag{50}$$

en donde $C_2^2 = C^2/2 + C_1'$.

Veamos distintos casos, en dependencia de la selección de las constantes "n" y "λ".

1.) $\lambda > 0, n > 0$. En este caso, tenemos que utilizando la integral (50) se obtienen las respuestas siguientes:

$$\tau(t) \cong \frac{3\kappa m C_0 t^2}{4} \tag{51}$$

cuando $t \to \infty$, respuesta que corresponde también al caso de la relación minimizada, y para el límite cuando $t \to 0$ se obtiene

$$\tau(t) \cong [(\frac{n}{2}+1)\sqrt{\frac{3\kappa\lambda C_0^n C^2}{2}}t]^{\frac{2}{n+2}} \to 0. \tag{52}$$

De las soluciones (51) y (52), obtenemos que en este caso ocurre, de la misma manera que para los anteriormente vistos, un cambio, de un universo que en las cercanías con la singularidad tenía influencia por parte del campo escalar y era del tipo anisotrópico, a otro de tipo isotrópico, con influencia por parte del campo espinorial.

2.) $\lambda = -\sigma^2 < 0, \quad n > 0$. Bajo esta situación la integral (50) toma la siguente forma

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{mC_0\tau - \frac{\sigma^2 C^2 C_0^n}{2\tau^{-n}} + C_2^2}} = \sqrt{3\kappa}t, \tag{53}$$

De la integral (53) tenemos que

$$\tau(t) \cong \frac{3\kappa m C_0 t^2}{4}, \tag{54}$$

cuando $t \to \infty$, o sea que se repite la misma respuesta que en los casos anteriores, sin embargo, este caso, se diferencia de los ya expuestos, en que la singularidad inicial no se da, o sea, que para él, existe un grupo de respuestas regulares en los inicios del universo, de tal manera que no se da un momento en el tiempo, en el cual se presenten magnitudes infinitas en las funciones de los campos y por lo tanto, en la energía, esta afirmación sobre la existencia de soluciones regulares en el inicio del universo, se obtiene gracias a que dentro de la raíz, que se encuentra en la integral, el valor τ, en las proximidades del cero se convierte en una magnitud irreal, de ahí que exista una magnitud $\tau_{min} = \tau_0 > 0$, la cual se define através de la igualdad

$$mC_0\tau_0^{n+1} + C_2^2\tau_0^n - \frac{\sigma^2 C^2 C_0^n}{2} = 0. \tag{55}$$

La ausencia de la singularidad inicial en este tipo de modelos cosmológicos, se explica debido al incumplimiento de estos, cuando $\lambda < 0$, de la condición del dominio energético del teorema de Hawking y Penrose.

3.) $\lambda > 0, \quad n = -k^2 < 0$. En este caso, la igualdad (50) toma la siguiente forma:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{mC_0\tau + \frac{\lambda C^2 \tau^{k^2}}{2C_0^{k^2}} + C_2^2}} = \sqrt{3\kappa}t. \tag{56}$$

Veamos soluciones concretas para distintos valores de k^2.

3.a) $k^2 = 1$. Para este caso, de la integral (55), tenemos

$$\tau(t) = \frac{3\kappa M C_0 t^2}{4} - \frac{C_2^2}{MC_0}, \quad M = m + \frac{\lambda C^2}{2C_0^2}. \tag{57}$$

La solución (57) es singular en los inicios de la expansión del universo, cuando $t_0 = 2C_2/\sqrt{3\kappa}MC_0$ y asimptóticamente se convierten, estos modelos, en modelos isotrópicos.

3.b) $k^2 = 2$. De la integral (55) tenemos

$$\tau(t) = C_0^2[\Delta sh(\frac{\sqrt{3\kappa\lambda}Ct}{\sqrt{2}C_0}) - mC_0]/\lambda C^2, \tag{58}$$

en donde $\Delta = \sqrt{2\lambda C^2 C_2^2/C_0^2 - m^2C_0^2}$. Observando la solución (58), encontramos que ella es singular en el momento $\tau(t_0) = 0$, en donde t_0 se define por la igualdad $\Delta sh(\sqrt{3\kappa\lambda}Ct_0/\sqrt{2}C_0) - mC_0 = 0$, y cuando $t \to \infty$

$$\tau(t) = \frac{C_0^2\Delta e^{(\sqrt{3\kappa\lambda/2}Ct/C_0)}}{\lambda C^2}. \tag{59}$$

Esta última solución, establece que en este tipo de modelo, el cambio del régimen anisotrópico por el isotrópico, es exponencial, cosa que podría permitir en intervalos cortos de tiempo la formación del universo que conocemos en la actualidad, como el resultado de un proceso de interacciones (dominadas energéticamente por el campo espinorial), entre los campos escalares y espinoriales, y lo cual serían la causa fundamental del cambio del régimen.

4.) $\lambda = \sigma^2 < 0, \quad n = -k^2 < 0$. En este caso, la integral (50) toma la siguiente forma:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{mC_0\tau - \frac{\sigma^2C^2\tau^{k^2}}{2C_0^{k^2}} + C_2^2}} = \sqrt{3\kappa}t. \tag{60}$$

De la misma manera que en el caso 3, estudiemos las soluciones concretas a esta integral, dependiendo de los valores que le demos a k^2.

4.a) $k^2 = 1/2$. Colocando este valor en la integral (60), obtenemos la siguiente solución:

$$2\frac{[\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau_1}ln|\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_1}|]}{\sqrt{mC_0}} = \sqrt{3\kappa}t, \tag{61}$$

en donde $\sqrt{\tau_1} = \sigma^2C^2/4mC_0^{3/2}$. De la solución (61) tenemos que:

$$\tau(t) \cong \frac{3\kappa mC_0t^2}{4} \tag{62}$$

cuando $t \to \infty$; y cuando $t \to -\infty$ tenemos que

$$\tau(t) \to \tau_1 = [\frac{\sigma^2C^2}{4mC_0^{3/2}}]^2. \tag{63}$$

De las soluciones (62) y (63), surge la conclusión que la solución (61), no es singular en el inicio del universo cuando se considera $t_0 = -\infty$ y se vuelve de manera asimptótica, cuando $t \to \infty$, en un universo isotrópico. En esta solución, de la misma manera que en las soluciones del punto 2, se incumple la condición de dominio energético del teorema de Hawking y Penrose.

4.b) $k^2 = 1$. En este caso, la integral (60) se escribe de la siguiente forma:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{(m - \frac{\sigma^2 C^2}{2C_0^2})C_0\tau + C_2^2}} = \sqrt{3\kappa}t. \tag{64}$$

Si en la integral (64) $m - \sigma^2C^2/2C_0^2 > 0$, entonces la solución concuerda con la (57), en donde $M = m - \frac{\sigma^2C^2}{2C_0^2}$. Si $M = -T^2 < 0$ de la integral (64) obtenemos:

$$\tau(t) = \frac{C_2^2}{T^2C_0} - \frac{3\kappa T^2 C_0 t^2}{2}. \tag{65}$$

En este caso, $\tau(t) = 0$ cuando $t_{1,2} = \mp 2C_2/\sqrt{3\kappa}T^2C_0$ y tiene el valor máximo cuando t=0: $\tau_{max} = \frac{C_2^2}{T^2C_0}$. Las soluciones obtenidas, representan un modelo cosmológico, según el cual la expansión del universo comienza en el momento t_1, llegando a su máximo valor en el momento t=0, y luego comprimiéndose hasta su colapso en el punto t_2. Para este modelo, se incumple la condición de dominación energética del teorema de Hawking y Penrose.

4.c) $k^2 = 2$. De la integral (60), remplazando el valor k^2 se obtiene que

$$\tau(t) = \frac{C_0^2[\Delta sen(\frac{\sigma C t\sqrt{3\kappa}}{\sqrt{2}C_0}) + mC_0]}{\sigma^2C^2}, \tag{66}$$

en donde $\Delta = \sqrt{2\sigma^2C^2C_2^2/C_0^2 + m^2C_0^2}$. De la solución (66), tenemos que $\tau(t_0) = 0$, en donde

$$\tau_0 = [\frac{-\sqrt{2}C_0}{\sigma C\sqrt{3\kappa}}]arcsen(\frac{mC_0}{\Delta}),$$

Después de ésto, alcanza el máximo valor

$$\tau(t_{max}) = \frac{C_0^2(mC_0 + \Delta)}{\sigma^2C^2},$$

en donde $t_{max} = \pi\sqrt{2}C_0/2\sqrt{3\kappa}\sigma C$, y luego, en el momento $t = t_1$ de nuevo vuelve $\tau(t_1) = 0$ donde

$$t_1 = \pi + \frac{\sqrt{2}C_0}{\sigma C\sqrt{3\kappa}}arcsen(\frac{mC_0}{\Delta}).$$

De esta manera, tenemos que la solución (66), describe un modelo cosmológico, según el cual, existe un momento inicial "t_0" de expansión del universo, llegando éste a su máximo volumen, en el momento t_{max}, y luego comprimiéndose hasta llegar al colapso en el momento t_1. De la misma manera que en el caso anterior, en este modelo no se cumple con la condición energética del teorema de Hawking y Penrose, además de que es un modelo que no permite el paso del régimen de expansión anisotrópico al isotrópico, lo cual significa que no es un modelo que pueda describir nuestro universo.

4. Interacciones entre los campos escalares y espinoriales considerando de la sustancia

Hasta el momento hemos visto modelos cosmológicos de universos, sin tomar en cuenta la sustancia de los mismos; introducir la sustancia es importante, no sólo para tener modelos que describan aún, más correctamente al universo, sino que también es importante, para analizar la posible influencia de la sustancia en modelos iniciálmente anisotrópicos, y que con el paso del tiempo cambian su régimen de expansión por uno isotrópico.

Para este caso, utilizaremos el modelo del liquido ideal, que como es sabido, describe la sustancia, en modelos cosmológicos y astrofísicos, y que, en el caso de un modelo anisotrópico, también se puede utilizar.

Considerando la sustancia, de la función de Lagrange (1), obtenemos que el tensor de energía impulso toma la siguiente forma:

$$T^{\rho}_{\mu} = (\frac{\imath}{4})g^{\rho\nu}[\overline{\psi}\gamma_{\mu}\nabla_{\nu}\psi - \nabla_{\mu}\overline{\psi}\gamma_{\nu}\psi + \overline{\psi}\gamma_{\nu}\nabla_{\mu}\psi - \nabla_{\nu}\overline{\psi}\gamma_{\mu}\psi] + \varphi_{,\mu}\varphi^{,\rho}\Psi(S) + (\epsilon+p)U_{\mu}U^{\rho} - \delta^{\rho}_{\mu}(p+L_1). \tag{67}$$

en donde $L_1 = L - L_{sust} + m\overline{\psi}\psi - \frac{R}{2\kappa}$, U_{ρ}- es el vector tetradimensional de velocidad, y ϵ y p son la densidad energética y la presión de la sustancia, respectivamente.

Para este caso, como se puede notar, las relaciones que fueron establecidas anteriormente entre distintas funciones, ecuaciones e igualdades, se conservan si se elimina el parámetro masivo m, con excepción de aquellas, en las que los componentes del tensor energía impulso tienen alguna influencia. Los nuevos componentes del tensor energía impulso son:

$$T^0_0 = \frac{\imath N_1}{2} + \frac{C^2P}{\tau^2} - R + \epsilon, \quad T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -R - p, \tag{68}$$

donde

$$N_1 = -2\imath(C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 - C_4^2)\frac{Q}{\tau} = -2\imath C_0\frac{C^2P'}{2\tau^3}; \tag{69}$$

y $T = T^{\alpha}_{\alpha} = \imath N_1/2 + C^2P/\tau^{-2} - 4R$.

La divergencia del tensor energía impulso, se puede escribir de la forma siguiente

$$T^{\beta}_{\alpha;\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial^{\alpha}}(\sqrt{-g}T^{\alpha}_{\beta}) - \frac{1}{2}\frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial^{\beta}}T^{\alpha\gamma} = 0. \tag{70}$$

Notemos, de la igualdad (68), que los componentes del tensor energía-impulso T^1_1, T^2_2, T^3_3 son iguales, y que dependen únicamente del tiempo; es por ésto que la ecuación (70) se puede escribir así

$$(\frac{\dot{\tau}}{\tau})(T^1_1 - T^0_0) = \dot{T}^0_0 \tag{71}$$

De la ecuación (71), obtenemos las ecuaciones de movimiento para la sustancia y colocando para ésto, en dicha ecuación, los valores de las igualdades de la (69). Consideraremos, el caso cuando $\Lambda\epsilon(t) = p(t)$, o sea, cuando entre "$\epsilon$" y "p", existe una dependencia lineal y Λ es un valor que se encuentra en el intervalo [0, 1/3], en donde $\Lambda = 0$ representa al modelo tipo *polvo*, y $\Lambda = 1/3$ representa al modelo *ultrarelativista* o de tipo *fotónico*, los valores intermedios representan, de esta forma, los modelos que se encuentran entre estos dos últimos. De esta manera la ecuación de movimiento para la sustancia es:

$$\epsilon = \frac{D_0}{\tau^{\Lambda+1}} \tag{72}$$

Utilizaremos la ecuación (21), la cual al considerar la sustancia, toma la siguiente forma:

$$\frac{\ddot{\tau}}{\tau} = -\kappa(T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 - \frac{3T}{2}) = 3\kappa(\frac{D_0(1-\Lambda)}{2\tau^{\Lambda+1}} - \frac{C_0C^2P'}{4\tau^3}), \tag{73}$$

la primera integral de esta ecuación es

$$\dot{\tau}^2 = 3\kappa(D_0\tau^{1-\Lambda} + \frac{C^2P}{2} + C_1'), \quad C_1' = const. \tag{74}$$

Por fin, la solución de la ecuación (73), puede ser escrita de la forma siguiente

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{D_0\tau^{1-\Lambda} + \frac{C^2P}{2} + C_1'}} = \pm\sqrt{3\kappa}(t+t_0), \quad t_0 = const. \tag{75}$$

Nótece, que para el caso del modelo tipo *polvo*, las soluciones que se pueden obtener, serían muy semejantes a las soluciones que fueron obtenidas cuando no se consideró la sustancia, por eso, este caso en particular no lo analizaremos, ya que ésto se puede considerar hecho, y la interpretación de las soluciones son similares. Estudiemos primero el caso de la relación minimizada, para la cual $\lambda = 0$. Para este caso, la integral (75) tomaría la siguiente forma

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{D_0\tau^{1-\Lambda} + \frac{C^2}{2} + C_1'}} = \pm\sqrt{3\kappa}(t+t_0), \quad t_0 = const. \tag{76}$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, tenemos que las soluciones tienen la siguiente forma

$$\tau(t) \cong \sqrt[1+\Lambda]{3\kappa D_0(\frac{\Lambda+1}{2})^2 t^{\frac{2}{\Lambda+1}}}. \tag{77}$$

y cuando $t \rightarrow 0$ tenemos que

$$\tau(t) \cong \sqrt{3\kappa}C_2 t. \tag{78}$$

De la soluciones (77) y (78), tenemos que el modelo cosmológico en el que se considera la relación minimizada de los campos escalares y espinoriales dentro de la sustancia, es un modelo que permite, de la misma forma que el modelo sin sustancia, un cambio de un universo anisotrópico por otro isotrópico, cuando $t \rightarrow \infty$; la sustancia cumple, en este caso, un rol fundamental, rol, que si no fuera considerada esta última, cumpliría el parámetro m del campo espinorial. Está claro, que es entonces la sustancia, la responsable de que el universo haya podido sufrir el cambio ya mencinado para un modelo de relación minimizada, pero por lo ya dicho en el principio del artículo, si el universo fue anisotrópico, debieron de haberse dado distintas reacciones físicas, por lo tanto, no nos quedaremos con estudiar este último caso, sino que veremos otros, representantes de interacciones entre campos, o sea, representantes de reacciones físicas entre los campos y partículas escalares y espinoriales.

Observaremos valores]0, 1/3]. En la integral (75) consideraremos, al igual que en los casos anteriores, que la función $F(S) = \lambda S^n$, de tal manera que la integral toma la siguiente forma

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{D_0 \tau^{1-\Lambda} + \frac{C^2}{2(1+\lambda S^n)} + C_1'}} = \sqrt{3\kappa}t, \tag{79}$$

de aquí que se obtenga la conclusión, de que para cualquier tipo de interacción exponencial, como la planteada entre los campos escalares y espinoriales, se dé un cambio, de un universo anisotrópico a uno isotrópico através del tiempo, por la siguiente ley

$$\tau(t) \cong \sqrt[1+\Lambda]{3\kappa D_0 (\frac{\Lambda+1}{2})^2} t^{\frac{2}{\Lambda+1}}. \tag{80}$$

Al igual que en las soluciones de la integral (48), en este caso las soluciones no dependen de los valores que se le den a λ o a n. Por otra parte las soluciones, cuando $t \to 0$, son las mismas que las que se obtuvieron, para el caso de la integral (48), por lo que no las analizaremos.

Estudiaremos el caso, cuando la interacción entre los campos escalares y espinoriales tienen la forma $P(S) = 1 + \lambda S^n$, el sentido de esta interacción, ya fue establecido cuando no se consideró la sustancia, por eso no lo comentaremos. Las soluciones de la integral (75) tienen la forma siguiente:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{D_0 \tau^{1-\Lambda} + \frac{C^2 C_0^n \lambda}{2\tau^n} + C_2^2}} = \sqrt{3\kappa}t. \tag{81}$$

Para este tipo de interacciones, al igual que en el caso cuando no se considera la sustancia, las soluciones dependen de los valores que se le den a "λ" y a "n", por eso estudiaremos distintos variantes.

5.) $\lambda > 0$, $n > 0$. Para este caso, tenemos que la solución de la integral (81), cuando $t \to \infty$, se escribe de la siguiente forma:

$$\tau(t) \cong \sqrt[1+\Lambda]{3\kappa D_0 (\frac{\Lambda+1}{2})^2} t^{\frac{2}{\Lambda+1}},. \tag{82}$$

o sea, que es igual a la que se tendría, si no hubiera interacción entre los campos, por lo que se puede concluir, para este tipo de casos, que la interacción no es uno de los componentes fundamentales en el cambio del universo. Para el caso cuando $t \to 0$, la solución se escribe así

$$\tau(t) \cong [(\frac{n}{2} + 1)\sqrt{\frac{3\kappa\lambda C_0^n C^2}{2}} t]^{\frac{2}{n+2}} \to 0. \tag{83}$$

Nótece, que este resultado, concuerda con el (52), cuando no se consideraba la sustancia, ésto último permite deducir, que al menos bajo este tipo de interacciones, el universo en sus inicios tuvo gran influencia por parte de las reacciones de partículas que se dieron en los campos escalares y espinoriales, reacciones que pudieron ser la causa de la anisotropía del universo, sin embargo la influencia de éstas no duró por largo tiempo, y fue la sustancia la que vino a suplantar la labor de estas reacciones, convirtiendo al universo anisotrópico, en un universo isotrópico.

6.) $\lambda = -\sigma^2 < 0$, $n > 0$. Para este caso, tenemos que la integral (75), toma la siguiente forma:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{D_0\tau^{1-\Lambda} - \frac{C^2C_0^n\sigma^2}{2\tau^n} + C_2^2}} = \sqrt{3\kappa}t. \quad (84)$$

De la integral (84), tenemos que si $t \to \infty$ la solución se escribe así

$$\tau(t) \cong \sqrt[1+\Lambda]{3\kappa D_0(\frac{\Lambda+1}{2})^2 t^{\frac{2}{\Lambda+1}}}. \quad (85)$$

De nuevo volvemos a encontrar una solución del tipo de la relación minimizada, para la cual, como se dijo anteriormente, se nota la influencia de la sustancia en tiempos alejados al inicio del universo. Sin embargo, para este caso, la magnitud $\tau = 0$ no se alcanza, ya que la relación que se encuentra dentro de la raíz, en la integral, tendría un valor imaginario, cosa que impide la singularidad inicial; el valor mínimo se encuentra de la igualdad

$$D_0\tau_0^{n+1-\Lambda} + C_2^2\tau_0^n - \frac{\sigma^2C^2C_0^n}{2} = 0.$$

De la misma manera que en casos anteriores, la ausencia de la singularidad inicial se explica debido a que la condición de dominio energético del teorema Hawking y Penrose es incumplida cuando $\lambda < 0$.

7.) $\lambda > 0$; $n = -k^2 < 0$. En este caso, la integral (75) se escribe así

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{D_0\tau^{1-\Lambda} + \frac{\lambda C^2\tau^{k^2}}{2C_0^{k^2}} + C_1'}} = \sqrt{3\kappa}t. \quad (86)$$

Observemos los siguientes tres casos.

7.a)$k^2 = 1 - \Lambda$. De este caso, obtenemos que la solución es del tipo de la relación minimizada y que lo único que cambia es que

$$D_O \to D_0 + \lambda C^2/2C_0^{k^2},$$

esto último significa, que este tipo de interacción, entre los campos escalar y espinorial, participa en el cambio del régimen anisotrópico por el régimen isotrópico que sufre el universo através del tiempo. La solución para las cercanías con t=0 es

$$\tau(t) \cong \sqrt{3\kappa C_2^2}t,$$

al igual que en el caso de la relación minimizada, el régimen anisotrópico inicial está influenciado por el campo escalar y no por el campo espinorial.

7.b) $0 < k^2 < 1 - \Lambda$. Para este caso, tenemos que se repite la misma dependencia, de τ con respecto a t, que existe, para el caso de la relación minimizada, es por esto que no lo analizaremos de una manera más extensa.

7.c) $2 > k^2 > 1 - \Lambda$. Las soluciones para este caso, cuando $t \to \infty$ son

$$\tau = (1 - \frac{k^2}{2})^{\frac{2}{2-k^2}} (\frac{3\kappa\lambda C^2}{2C_0^{k^2}})^{\frac{1}{2-k^2}} t^{\frac{2}{2-k^2}}, \tag{87}$$

y cuando $t \to 0$

$$\tau(t) \cong \sqrt{3C_2^2 \kappa t} \tag{88}$$

Es necesario notar, que la dependencia de la métrica, y por lo tanto, de la expansión del universo, en todo momento tiene influencia del campo escalar, cosa que no se da con el campo espinorial y con la sustancia en las cercanías con la singularidad inicial; sin embargo, de estas soluciones, es importante el hecho, de que las inteacciónes entre los campos escalares y espinoriales, juegan un rol significativo, en el cambio del régimen anisotrópico de expansión del universo, por el régimen de expansión isotrópico, y la sustancia deja de tener la importancia que tenía en otros casos, cuando las interacciones eran de otros tipos. 7.d) $k^2 = 2$. Para este caso al igual que para el 3.b) se obtienen la siguiente dependencia

$$\tau(t) \sim e^{\sqrt{\frac{3\kappa\lambda C^2}{2C_0^{k^2}}} t}, \tag{89}$$

y para las cercanías con el cero, la misma solución que en el caso 7.c). De las soluciones (87), (88) y (89), se obtiene; que las interacciones de tipo 7.c), y las encontradas en el caso presente, de los campos escalares y espinoriales, sí son, del tipo de interacciones que influyen en la historia de la expansión del universo, cuando $t \to \infty$, siendo ésto contrario a los otros casos, en donde la influencia mayor era de la sustancia. Notemos que ésto, ya se había repetido en el caso 3.b) de una manera similar, caso en el que el universo se expandía de forma exponencial, de estos tres ejemplos de interacciones, con sustancia y sin ella, se puede hacer la conclución de que si se considera un tipo de interacción en donde el campo espinorial domine más que el campo escalar en forma energética, interacción la cual tiene dependencia en forma de exponente, de los tipos 3.b), 7.c) y 7.d), el universo en sus inicios será influido, en especial, por el campo escalar, y al paso del tiempo, esta dependencia cambiará a las manos de la interacción entre campos escalares y espinoriales. Además de lo ya dicho, notemos que los casos en que las soluciones hacen que τ cambie por la ley exponencial, como es la solución (89), son de un tipo especial, ya que de ellos se deduce que la densidad energética T_0^0, debe de acercarse de manera asintótica a un valor constante, el cual es igual al de la densidad energética de la interacción.

8.) $\lambda = \sigma^2 < 0$; $n = -k^2 < 0$. Para este caso, la integral (75) toma la forma siguiente:

$$\int \frac{d\tau}{\sqrt{D_0 \tau^{1-\Lambda} - \frac{\sigma^2 C^2 \tau^{k^2}}{2C_0^{k^2}} + C_1'}} = \sqrt{3\kappa} t. \tag{90}$$

Estudiaremos los siguientes casos

8.a) $k^2 < 1 - \Lambda$. De esta manera, de la integral (90), se obtiene que la soluciones, cuando $t \to \infty$ son iguales a la solución, para la relación minimizada, la diferencia de estas, es que las soluciones no existen para las cercanías con el cero, o sea, que existe un $\tau_{min} = \tau_0$, que se define por la igualdad

$$D_0 \tau_0^{1-\Lambda} - \sigma^2 C^2 \tau_0^{k^2} / 2C_0^{k^2} + C_1' = 0,$$

y bajo el cual no existen soluciones cuando t=0, de ahí que se diga, que esta solución es regular, no dándose en este modelo del universo, la singularidad inicial. Esto último, al igual que en los casos, cuando no se consideró la sustancia, se debe al incumplimiento de la condición de la dominación energética.

8.b) $k^2 = 1 - \Lambda$. En este caso, si la expresión $D_0 - \sigma^2 C^2 / 2C_0^{k^2} > 0$, tenemos que la solución, cuando $t \to \infty$, tiene la siguiente forma

$$\tau(t) = 3\kappa(D_0 - \frac{\sigma^2 C^2}{2C_0^{k^2}})t^2, \tag{91}$$

de la ecuación (91) concluímos que para este caso, tanto la interacción entre los campos, como la sustancia, influyen en la transformación de un universo anisotrópico, a uno isotrópico, y cuando se estudia la solución en las cercanías del cero, ésta tiene la misma forma que cuando se observa el caso de la relación minimizada.

5. Conclusiones

Las interacciones entre los campos escalares y los campos espinoriales, representan en algunos casos, el motivo por el cual se presenta un cambio de un régimen de expasión del universo, inicialmente anisotrópico, a otro que termina perdiendo la anisotropía al paso del tiempo, convirtiéndose finalmente en un universo de tipo Fridman. Esto último, nos hace pensar que en los inicios del universo, pudieron darse reacciones físicas formadoras de nuevas partículas en las que interactuaron, en especial, los campos escalares y espinoriales en el espacio tiempo de tipo Bianchi-1, lo cual podría ser, explicación a muchas preguntas aún pendientes en la teoría del surgimiento y desarrollo del universo; como ya fue planteado al inicio del artículo.

Es necesario resaltar, que las interacciones entre los campos no es importante para concluir que el universo tenga que sufrir el cambio de ser uno anisotrópico, a uno isotrópico, este paso se da, sin necesidad de que exista interacción entre los campos, e incluso sin necesidad de ellos mismo (para el caso en que se considera la sustancia del universo), sin embargo, no se pueda considerar satisfactoria la hipótesis, de que el universo sin ningún motivo, halla podido ser anisotrópico en sus principios, y es por eso que todo hace pensar que tuvieron que existir campos físicos, que en inicios de la expansión del universo, provocaran una inclinación, de por lo menos una de las direcciones del espacio.

Las soluciones encontradas, en su mayoría reflejan una influencia por parte del campo escalar en las cercanías con el inicio de la expansión del universo, esta influencia está, en muchos de los casos, representada por una constante de la función del campo escalar. En el caso, cuando es considerada la expansión, en las lejanías del inicio del universo, ésta por lo general, está influenciada por la sustancia, o por el parámetro masivo del campo espinorial (en caso en que no se considere la sustancia), no influyendo, para la mayoría de los casos, las interacciones entre los campos. Los casos en que se han encontrado influencia de los campos escalares y espinoriales, en la expansión del universo, han sido aquellos en los que el campo espinorial tiene determinada supremacía, a nivel energético, sobre el campo escalar, y en los cuales la densidad energética T_0^0, asimptóticamente, con respecto al tiempo, toma o tiende a tomar, un valor constante, que es dado por las mismas interacciones.

Dentro de las soluciones encontradas, se encuentran soluciones regulares, o sea, en las que no se observan singularidades; sin embargo, estas soluciones incumplen con el principio de la dominación energética del teorema de Hawking y Penrose. Además, fueron encontradas soluciones en las cuales el universo se expande hasta un pinto máximo y luego se comprime de nuevo en el colapso.

6. Literatura

[1] Ya .P. Terletskii, 1990, **Los problemas de la física teórica,** UDN, p.3 y p.78.

[2] Ya. B. Zeldovich, 1970, **Carta a la revista de física experimental y teórica,** $N^0 = 12$,, p.443.

[3] A. A. Grib, S. G. Mamaev, 1971, **En la revista de Física nuclear,** $N^0 = 14$, p. 800.