

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SISTEMA DE ESTUDIOS DE POSGRADO

**RENORMALIZACIÓN MEJORADA
Y MULTIPOLOS ARMÓNICOS**

*Tesis sometida a la consideración de la Comisión del Programa de
Estudios de Posgrado en Física para optar al grado y título de Maestría
Académica en Física*

JOSÉ DANIEL SOLÍS RODRÍGUEZ

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio, San José, Costa Rica

2023

A Enkidu, Utnapishtim, y Arrakis

Agradecimientos

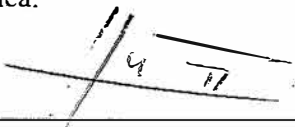
A mi lector, Dr. Mauricio Gutiérrez Arguedas, por su continuo apoyo y motivación a lo largo de los años.

A mi lector, Dr. Herbert Morales, por su guía en asuntos tanto teóricos como logísticos relacionados a este trabajo, permitiendo su exitosa conclusión.

A mi tutor y mentor, Dr. Joseph Várilly, por su dedicación, apoyo, motivación y guía a lo largo de los años y durante este proyecto.

Al Dr. José Mariano Gracia Bondía, por su invaluable guía al definir una estrategia para este proyecto.

Esta tesis fue aceptada por la Comisión del Programa de Estudios de Posgrado en Física de la Universidad de Costa Rica, como requisito parcial para optar al grado y título de Maestría Académica en Física.




Dra. Heidy Gutierrez Garro
Representante de la Decana
Sistema de Estudios de Posgrado



Dr. Joseph C. Varilly Boyle

Director de Tesis



Dr. Herberth Morales Rios

Asesor



Dr. Mauricio Gutierrez Arguedas

Asesor



Dr. Jorge Gutierrez Camacho

Director

Programa de Posgrado en Física



Jose Daniel Solis Rodriguez

Sustentante

Índice general

Agradecimientos	iii
Hoja de Aprobación	iv
Resumen/Abstract	vii
1 Introducción	1
2 Campos cuánticos libres	5
2.1. Construcción de campos cuánticos mediante entrelazadores de Wigner	5
2.2. Funciones de correlación y propagadores	11
2.3. El propagador cinemático	11
2.4. Espín 1	12
2.5. Espines mayores	15
2.6. Ejemplo: Espín 2	18
3 Sobre la estructura multipolar de los propagadores de Feynman de bosones sin masa	22
3.1. Armónicos esféricos via diferenciación	22
3.2. Multipolos armónicos	23
4 Renormalización mejorada	27
4.1. Introducción	27
4.2. El origen de las divergencias ultravioleta	28
4.3. Teoría perturbativa causal	31
4.4. Grado de escalamiento y conteo de potencias	32
4.5. Regularización de teorías sin masa	32
4.6. El propagador de Stora	34
4.7. Extensión a teorías de campos masivas	35

4.8. Ejemplo: $s = 3$	37
5 Valor Principal de Cauchy como regularización de los multipolos armónicos	38
5.1. Valor principal de multipolos euclidianos	38
5.2. Valor principal de multipolos en \mathbb{M}^4	41
5.3. Una condición para la existencia del valor principal	41
5.4. Un contraejemplo	43
6 Conclusiones	44
Bibliografía	46

Resumen

En este trabajo se proporciona una prueba de la estructura multipolar de los propagadores cinemáticos no regularizados de intensidades de campo de espín superior. Siguiendo el patrón identificado por primera vez en el trabajo original de Várilly y Gracia-Bondía, estos propagadores resultan ser multipolos armónicos en el sentido de Minkowski. En virtud de la noción refinada de Stora de una amplitud divergente y el principio de covarianza que sirve como base, se concluye que tales amplitudes son regularizables mediante extensiones homogéneas únicas, las cuales transforman bajo la misma representación del grupo de Lorentz que sus campos cuánticos. Con la intención de explorar los límites de la dualidad entre las configuraciones euclidiana y minkowskiana en QFT, se establece un no-go theorem para la regularización de los propagadores de las intensidades de campo de espín superior.

Abstract

A proof of the multipolar structure of the unregularized kinematic propagators of higher spin field strengths is provided. These follow the pattern identified first in the pioneering work of Várilly and Gracia-Bondía, meaning that the propagators are also harmonic multipoles, in the Minkowskian sense. By virtue of Stora's refined notion of divergent amplitudes, and the guiding principle of covariance that serves as its bedrock, it can be concluded that all such amplitudes are regularizable by unique homogeneous extensions, transforming under the same representation of the Lorentz group as their quantum fields. In an attempt to explore the limits of the duality between the Euclidean and Minkowskian settings in QFT, a no-go theorem for the regularization of the higher spin field-strength propagators is established.

Capítulo 1

Introducción

Los criterios de renormalizabilidad son elementos clave de las teorías de campos cuánticos perturbativas. Siguiendo el esquema de Bogoliubov [1], la renormalización es equivalente a la extensión a todo de espacio de distribuciones originalmente definidas solo por argumentos no coincidentes. Una condición suficiente basada en el conteo de potencias fue descubierta por Weinberg [2] en 1960, para espacios euclidianos. El teorema análogo para la métrica de Minkowski fue probado ocho años después por Zimmermann [3]. Ambos criterios fueron formulados en el espacio de momentos. Para el espacio de configuración, existen condiciones equivalentes en términos del orden de singularidad y del grado de escalamiento. Mientras que un orden de singularidad negativo implica convergencia, no hay conclusión que pueda derivarse más allá de esto (cuando el orden de singularidad es mayor o igual a cero, se suele decir que la expresión es “superficialmente divergente”. Esta notación puede resultar confusa, dado que una amplitud de probabilidad superficialmente divergente puede resultar ser convergente).

Un ejemplo de una función de dos puntos renormalizable por conteo de potencias es el propagador causal (también llamado propagador de Feynman–Stückelberg) de una partícula escalar,

$$D_m^F(x) = \frac{1}{(4\pi)^4} \int \frac{e^{-i(px)} d^4p}{p^2 - m^2 + i0} = -i \langle\langle T\varphi(x)\varphi(0) \rangle\rangle, \quad (1.1)$$

donde $(px) := g_{\mu\nu}p^\mu x^\nu$, y $g_{\mu\nu}$ es la métrica de Minkowski con signatura $(+---)$. El último término es $-i$ por el valor esperado en el vacío del producto ordenado en el tiempo del campo escalar $\varphi(x)$.

D_m^F posee un orden singular igual a -2 , lo cual garantiza su buena definición. Sin embargo, ninguna de sus potencias enteras positivas está bien definida como distribución, lo cual es a veces señalado como el origen de las divergencias UV. Esto también implica, al menos para el caso sin masa, que los propagadores causales de partículas con espines

mayores son susceptibles a presentar este tipo de divergencias. D_m^F es una distribución con soporte singular en el cono de luz. Para una partícula sin masa:

$$D_0^F(x) = \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 - i0} = \frac{i}{4\pi^2} \left[\text{pv} \frac{1}{x^2} + i\pi\delta(x^2) \right]. \quad (1.2)$$

Por conteo de potencias, los propagadores causales de partículas con espines mayores son superficialmente divergentes en el régimen UV. De hecho, el orden singular para una partícula masiva de espín j es, en el mejor de los casos, $2(j - 1)$. En [4] se afirma que, de la infinitud de campos cuánticos de espín j , dos destacan por ser los únicos con este comportamiento UV óptimo. Estos son análogos de mayor rango del potencial electromagnético A y el tensor de campos de Maxwell F , correspondientes respectivamente a las representaciones del grupo de Lorentz $D(\frac{j}{2}, \frac{j}{2})$ y $D(j, 0) \oplus D(0, j)$. Esto continua siendo cierto en el caso sin masa, gracias a cancelaciones afortunadas de términos en las respectivas funciones de Wightman [5].

Vale la pena observar que la ausencia de una *caracterización* de la renormalizabilidad, mediante una condición necesaria y suficiente, es solventada en [6], así sea únicamente para los casos de propagadores causales sin masa. En efecto, los autores de este trabajo justifican un nuevo criterio de renormalizabilidad para amplitudes de la forma $h_k(x)(x^2 - i0)^{-n}$, donde h_k es un polinomio homogéneo de grado k que satisface $\square h_k = 0$ (es por esto que los autores llaman a k el *grado de armonicidad* de h , i.e., h es “armónica” en \mathbb{M}^4). El mismo trabajo establece que una amplitud con dicha estructura es convergente *si y solo si* $\omega_{\text{NST}} := 2(n - k - 2) < 0$. Hasta hace poco se conocían solamente tres ejemplos de amplitudes con esta estructura multipolar. Estos corresponden a los tres primeros valores más bajos de espín de campos tipo- F sin masa, estudiados en [6] y [5]. En este caso, existe una extensión homogénea y sin logaritmos, la cual es además única si se impone covariancia de Lorentz.

Se conjeturó [5] que valores mayores de espín deben conducir a resultados similares. En efecto, en el capítulo 3 abajo se demuestra que en tales casos la estructura multipolar armónica se preserva en los propagadores *convergentes* de campos tipo- F sin masa. En estos la figura de mérito ω_{NST} termina asumiendo siempre el valor de -2 .

El mismo problema de regularización fue estudiado, casi simultáneamente con [5], en espacios euclidianos. Sea $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Una expresión de la forma

$$h_k(x)(x^2)^{-(k+1)} \quad (1.3)$$

con $x^2 = x \cdot x = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, y k entero positivo, es un ejemplo de un *potencial multipolar*, una estructura que surge a veces en problemas de electrostática. Este tipo de expresiones

es también el resultado de aplicar derivadas homogéneas de orden k a la función x^{-2} . Una consecuencia de la Proposición 4.3 de [7] es que el valor principal de Cauchy de este tipo de distribuciones existe *siempre y cuando* el polinomio h_k sea armónico.

(De ahí la importancia de la “armonicidad” descubierta en [5,6]; la cuestión aquí trata de establecer un paralelismo entre el caso euclidiano y el minkowskiano, guiándose por las ideas expuestas en [8].)

Las circunstancias convergen inminentemente hacia la siguiente conjetura: todos los propagadores causales son regularizables; y la prescripción es la más sencilla de todas: el valor principal de Cauchy.

Dos dificultades saltan a la vista. Primero, no hay indicios claros de como adaptar el valor principal a distribuciones con soporte singular en el cono de luz. En efecto, cuando en (1.2) el cuadrado de la norma euclidiana se reemplaza por la forma cuadrática de Minkowski, el significado de la última expresión se vuelve más sutil; el primer término en corchetes se vuelve singular no sólo en el origen, sino en la totalidad del cono de luz. Segundo, el caso masivo se desvía considerablemente de la privilegiada estructura multipolar. Esto se debe a que los propagadores, tanto en el caso masivo como sin masa, se calculan a partir de las funciones de Wightman M^F del campo, siendo la expresión final proporcional a

$$M^F(i\partial)D_m^F(x-x').$$

Para un campo sin masa la función por derivar es D_0^F , tal y como se muestra en (1.2).

En contraste, la forma cerrada de (1.1) para valores positivos de m es

$$D_m^F = \frac{-im}{4\pi^2\sqrt{-x^2+i0}} K_1(m\sqrt{-x^2+i0}) \quad (1.4)$$

donde K_1 es la función de Hankel de orden 1, por lo que el problema se traslada a estudiar las derivadas homogéneas de la función de K_1 . A pesar de las nuevas complicaciones, esta forma de expresar al propagador masivo permite plantear un argumento sobre su regularización. La función K_1 posee el desarrollo de Laurent:

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^k}{k!(k+1)!} \left[\frac{z}{2} \log \frac{z}{2} - \frac{z}{4} (\psi(k+1) + \psi(k+2)) \right].$$

A partir de ello, puede mostrarse que D^F posee la expansión

$$D^F(x) = D_0^F(x) + m^2 [f_1(m^2x^2) \log(-m^2(x^2-i0)) + f_2(m^2x^2)], \quad (1.5)$$

donde f_1 y f_2 son analíticas. La expresión (1.5) será válida, para cualquier m , siempre que se esté lo suficientemente cerca del cono de luz. Así, puede verse que el caso masivo no impone

dificultades nuevas: D^F quedará bien definido una vez que se conozca la regularización de D_0^F . En [5] se da una justificación rigurosa de lo anteriormente dicho, basándose en el formalismo de distribuciones de Riesz.

Capítulo 2

Campos cuánticos libres

“Begin at the beginning,” the King said, very gravely, “and go on till you come to the end: then stop.”

Alice’s Adventures in Wonderland

– Lewis Carroll

2.1. Construcción de campos cuánticos mediante entrelazadores de Wigner

Existe una correspondencia uno-a-uno entre los campos libres y los entrelazadores que relacionan el espacio de estados de una partícula individual y el espacio objetivo del campo. Parte de los objetivos de esta sección es probar esta correspondencia, mediante métodos basados en el formalismo de Weinberg [9, 10].

2.1.1. Campos masivos

Considérese un bosón de masa m y espín $s \in \mathbb{N}$, en un espaciotiempo Minkowskiano de 4 dimensiones. El espacio de posibles estados para esta partícula involucra una representación irreducible y unitaria (y de energía positiva) $U^{(m,s)}$ del grupo propio ortócrono de Poincaré, \mathcal{P}_+^\uparrow . Esta representación $U^{(m,s)}$ es inducida por otra representación unitaria e irreducible $D^{(s)}$, definida de la siguiente forma, para $m > 0$. Considere la capa másica

$$H_m^+ := \{ p \in \mathbb{M}^4 : (pp) = m^2, p^0 > 0 \}.$$

$D^{(s)}$ es la representación de dimensión $2s + 1$ del estabilizador del grupo propio ortócrono de Lorentz, \mathcal{L}_+^\uparrow , para algún $\bar{p} \in H_m^+$.

Resulta que para una partícula masiva, el grupo estabilizador, llamado a veces el *little group* de la partícula, es $SO(3)$ [10]. $D^{(s)}$ actúa sobre un espacio de Hilbert $\mathfrak{h}^{(s)}$ de dimensión $2s + 1$. La representación $U^{(m,s)}$ a su vez actúa sobre $\mathcal{H}^{(m,s)} = L^2(H_m^+, d\mu; \mathfrak{h}^{(s)})$, donde $d\mu(p)$ es la medida Lorentz invariante en dicho espacio: $d\mu(p) := d^3\mathbf{p}/2E(p)$, $E(p) := \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. La acción $U^{(m,s)}$ del grupo \mathcal{P}_+^\uparrow sobre $\mathcal{H}^{(m,s)}$ está dada por

$$(U^{(m,s)}(a, \Lambda))\psi(p) := e^{ip \cdot a} D^{(s)} R(\Lambda, a)\psi(\Lambda^{-1}p), \quad (2.1)$$

donde $R \in SO(3)$ es la *rotación de Wigner*, un elemento particular del estabilizador de \bar{p} dado por la fórmula:

$$R(\Lambda, p) = B_p^{-1} \Lambda B_{\Lambda^{-1}p} \quad (2.2)$$

Aquí B_p , para $p \in H_m^+$, representa un boost que lleva \bar{p} a p . La representación $U^{(m,s)}$ puede extenderse a todo \mathcal{P} incorporando representantes de la transformación de paridad P y la transformación de inversión temporal T .

Note que $P \in O(3)$ y que siempre es posible extender $D^{(s)}$ a $O(3)$ para s entero, por lo que P puede incorporarse en forma natural a $U^{(m,s)}$. La acción de $U^{(m,s)}(P)$ se obtiene de (2.1) una vez que se cuenta con $D^{(s)}(P)$. Es posible escoger B_p tal que

$$PB_p P = B_{Pp}. \quad (2.3)$$

Esta elección permite demostrar dos propiedades de la rotación de Wigner, las cuales se muestran a continuación.

Lema 2.1. *Sea B_p un boost que lleva \bar{p} a $p \in H_m^+$, el cual respeta la igualdad (2.3). Las siguientes igualdades son verdaderas:*

- (a) $R(P, p) = P$,
- (b) $R(P\Lambda P, p) = PR(\Lambda, Pp)P$.

Demostración. Se utiliza la definición de la rotación de Wigner R , en conjunto con la propiedad (2.3). Primero la “rotación” asociada a una inversión:

$$R(P, p) = B_p^{-1} P B_p = B_p^{-1} B_p P = P$$

Se prosigue del mismo modo con la segunda identidad:

$$\begin{aligned} R(P\Lambda P, p) &= B_p^{-1} P \Lambda P B_{P\Lambda^{-1}Pp} \\ &= P B_{Pp}^{-1} \Lambda B_{\Lambda^{-1}Pp} P = PR(\Lambda, Pp)P. \quad \square \end{aligned}$$

La ecuación (2.1) en conjunto con la primera identidad del teorema anterior da la extensión de $U^{(m,s)}$ a P ,

$$(U^{(m,s)}(P)\psi)(p) = D^{(s)}(P)\psi(Pp).$$

Similarmente, un representante antiunitario de T está dado por

$$(U^{(m,s)}(T)\psi)(p) = D^{(s)}(T)\psi(-Tp).$$

En 1963, Weinberg publica sus resultados en el desarrollo de la teoría de campos cuánticos para cualquier espín. Su trabajo incluye la formulación de reglas de Feynman, así como expresiones para los propagadores. Para lograr esto, se basa en tres postulados. suposiciones.

- (1) La matriz de correlaciones \mathbb{S} está dada por la fórmula de Dyson:

$$\mathbb{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 \cdots dt_n T[H'(t_1) \cdots H'(t_n)]. \quad (2.4)$$

donde H' es el término de interacción del hamiltoniano.

- (2) \mathbb{S} debe ser invariante ante transformaciones del grupo propio ortócrono de Lorentz \mathcal{L}_+^\uparrow . Para esto es suficiente poder expresar H' como:

$$H'(t) = \int d^3x \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) \quad (2.5)$$

donde \mathcal{H} una función de densidad escalar microcausal, lo cual quiere decir simplemente que debe satisfacer:

$$U(\Lambda, a)\mathcal{H}(x)U(\Lambda, a)^{-1} = \mathcal{H}(\Lambda x + a), \quad (2.6)$$

y

$$[\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')] = 0 \quad \text{si } x - x' \text{ es de tipo espacio.} \quad (2.7)$$

- (3) \mathcal{H} se construye a partir de operadores de creación y destrucción de las partículas libres descritas por el hamiltoniano libre: $a^\dagger(p)$ y $a(p)$. Esto representa un problema porque la ley de transformación de los operadores involucra el momento del modo que crean o destruyen. La única solución conocida requiere que \mathcal{H} sea construido a partir de combinaciones lineales de dichos operadores, llamadas campos cuánticos. Un campo cuántico φ_r , para $r = 1, \dots, N$, debe satisfacer además la relación:

$$U(\Lambda, a)\varphi_r(x)U^{-1}(\Lambda, a) = \sum_{r'} D_{r'r}(\Lambda)\varphi_{r'}(\Lambda x + a) \quad (2.8)$$

y

$$[\varphi_r(x), \varphi'_r(x')]_{\pm} = 0, \quad (2.9)$$

para alguna representación D del grupo de Lorentz toda vez que $x - x'$ sea de tipo espacio. La condición (2.8) garantiza (2.6) si introducimos factores de acoplamiento covariantes en la interacción. La condición (2.9) garantiza (2.7) siempre que \mathcal{H} contenga un número par de factores fermiónicos.

El campo cuántico $\varphi_r(x)$ es un operador en un espacio de Hilbert \mathfrak{h} que contiene al espacio de estados de una sola partícula, $H^{(m,s)}$, y al estado de vacío cuántico Ω , caracterizado hasta factores escalares por ser invariante ante las transformaciones de Poincaré. El campo $\varphi_r(x)$ también cumple con la función de crear estados de una partícula cuando se aplica sobre el vacío:

$$\varphi_r(x)\Omega \in H^{(m,s)}.$$

Para un valor fijo de p lo anterior implica que

$$(\varphi_r(x)\Omega)(p) \in \mathfrak{h}^{(s)}.$$

De lo anterior, junto con la ley de covariancia prescrita al campo φ , se deduce que

$$\begin{aligned} (\varphi_r(x)\Omega)(p) &= (U^{(m,s)}(x, I_{\mathcal{L}\uparrow})\varphi_r(0)U^{(m,s)}(x, I_{\mathcal{L}\uparrow})^{-1}\Omega)(p) \\ &= (U^{(m,s)}(x, I_{\mathcal{L}\uparrow})\varphi_r(0)\Omega)(p) \\ &= e^{i(px)}(\varphi_r(0)\Omega)(p) \\ &= (2\pi)^{-3/2}e^{i(px)}((2\pi)^{3/2}\varphi_r(0)\Omega)(p). \end{aligned}$$

Así, tras definir $v_r(p) := ((2\pi)^{3/2}\varphi_r(0)\Omega)(p)$, se obtiene la siguiente igualdad:

$$(\varphi_r(x)\Omega)(p) = (2\pi)^{-3/2}e^{i(px)}v_r(p) \in \mathfrak{h}^{(s)}. \quad (2.10)$$

La función v_r se llama el *entrelazador* para el campo φ_r . Si la partícula es su propia antipartícula, el conjugado hermítico del campo también mapea el vacío a un estado en $H^{(m,s)}$,

$$\varphi_r(x)^*\Omega \in H^{(m,s)}.$$

De un procedimiento similar al anterior se deduce la existencia de una segunda familia de entrelazadores $v_r^c(p)$, la cual satisface

$$(\varphi_r^*(x)\Omega)(p) = (2\pi)^{-3/2}e^{i(px)}v_r^c(p) \in \mathfrak{h}^{(s)}. \quad (2.11)$$

Sea $u \in \mathcal{S}(\mathbb{M}^4)$. La acción de φ_r , distribución con valores en $\mathfrak{h}^{(s)}$ sobre u está dada por:

$$\varphi(u) := \langle \varphi(x), u(x) \rangle = \int dx^4 u(x) \varphi_r(x). \quad (2.12)$$

En consecuencia, la acción del lado izquierdo de (2.10) sobre la función de prueba u es

$$(\varphi_r(u)\Omega)(p) = (2\pi)^{-3/2} \hat{f}(p) v_r(p),$$

con \hat{f} la transformada de Fourier de f .

Los entrelazadores de un campo cuántico también pueden interpretarse como un mapeo lineal $v: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^{(s)}$. Si $\{e_{(r)} : r = 1, \dots, N\}$ es una base de \mathfrak{h} , el mapeo está dado por

$$v(p)e_{(r)} := v_r(p). \quad (2.13)$$

Teorema 2.2. *El entrelazador v de un campo satisface la siguiente ecuación:*

$$D^{(s)}(R(\Lambda, p)) \circ v(\Lambda^{-1}p) = v(p) \circ D(\Lambda), \quad (2.14)$$

la cual se conoce como la relación de entrelazamiento.

En forma similar, el entrelazador conjugado debe satisfacer la misma identidad, reemplazando $D(\Lambda)$ por su conjugado complejo. Además, para cada entrelazador v existe un único entrelazador conjugado v^c dado por la ecuación

$$D^{(s)}(-\mathbf{1})v^c(p)e_{(r)} = v(p)D(-\mathbf{1})e_{(r)}. \quad (2.15)$$

Demostración. Para probar (2.14), usamos (2.8), con $a = 0$, y aplicamos los operadores en ambos lados a Ω para hacer aparecer a los entrelazadores v_r :

$$\begin{aligned} U(\Lambda)\varphi_r(x)U(\Lambda)^{-1}\Omega &= \sum_{r'} \varphi_{r'}(\Lambda x)\Omega D_{r'r}(\Lambda) \\ U(\Lambda)\varphi_r(x)\Omega &= \sum_{r'} \varphi_{r'}(\Lambda x)\Omega D_{r'r}(\Lambda) \\ U(\Lambda)e^{i(p x)}v_{r'}(p) &= \sum_{r'} v_{r'}(p)D_{r'r}(\Lambda)e^{i(p\Lambda x)} \\ D^{(s)}(R(\Lambda, p))v_{r'}(p)e^{i(\Lambda^{-1} p x)} &= \sum_{r'} v_{r'}(p)D_{r'r}(\Lambda)e^{i(p\Lambda x)} \end{aligned}$$

Nótese que $(\Lambda^{-1} p x) = (\Lambda \Lambda^{-1} p \Lambda x) = (p \Lambda x)$, por lo que las fases a ambos lados se cancelan. El resultado es la ecuación (2.14) en forma de componentes. \square

La construcción de un campo cuántico general se reduce así a encontrar el entrelazador apropiado. La tarea se simplifica considerablemente si se consideran instancias particulares de Λ en la ecuación (2.14).

Nótese que v como función de p puede saberse a partir de su valor en \bar{p} . En (2.14), haga $\Lambda = B_p$. Como $R(B_p) = \mathbf{1}_{\mathfrak{h}^{(s)}}$, se obtiene:

$$v(\bar{p}) = v(p) \circ D(B_p).$$

Equivalentemente:

$$v(\bar{p}) \circ D(B_p^{-1}) = v(p). \quad (2.16)$$

Para hallar el valor de $v(\bar{p})$ debe solucionarse una versión simplificada de (2.14): Primero note que \mathcal{L}_+^\uparrow contiene un subgrupo isomorfo a $SO(3)$. Sea R un elemento de dicho subgrupo, y sustitúyase $\Lambda = R$ y $p = \bar{p}$ en (2.14). La rotación de Wigner es R misma, por lo que se obtiene en:

$$D^{(s)}(R) \circ v(\bar{p}) = v(\bar{p}) \circ D(R). \quad (2.17)$$

Esta ecuación puede escribirse en términos de los generadores de la representación $D^{(s)}$. Se muestran algunos ejemplos en [10].

Hasta aquí se ha demostrado que la existencia de un campo cuántico covariante masivo de espín s , con el efecto deseado sobre el estado de vacío cuántico Ω , implica la existencia del entrelazador $v: \mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^{(s)}$, el cual obedece la relación de entrelazamiento (2.14) y puede ser construido a partir de las soluciones de (2.17). También es posible construir un campo cuántico con las características mencionadas a partir de dos representaciones D y $D^{(s)}$. Para hacer esto, primero se deben determinar el entrelazador v y su conjugado v^c , a partir de las ecuaciones (2.17), (2.15). Una vez que se cuenta con ambos, el *campo cuántico libre* de v puede ser construido como una superposición de operadores de creación y destrucción

$$\varphi_r(x) = (2\pi)^{3/2} \int_{H_m^+} d\mu(p) \sum_{k=1}^{2s+1} \left\{ e^{i(px)} v_r^k(p) a^*(p) + e^{-i(px)} \overline{v_r^{c,k}(p)} a(p) \right\}. \quad (2.18)$$

Un objeto construido de esta forma es una distribución covariante, capaz de crear estados localizados a partir del vacío.

Sobre la unicidad de los campos masivos irreducibles En la literatura frecuentemente se destaca que un campo masivo que transforma bajo una representación D *irreducible* es único. Esto es debido a que, en dado caso, el entrelazador $v(p)$ existe si y solo si $D|SO(3)$ contiene a $D^{(s)}$ como subrepresentación. Esto ocurre si y solo si D contiene

alguna representación irreducible $D^{(j,k)}$ con $|j - k| \leq s \leq j + k$. Cada $D^{(j,k)}$ contiene a $D^{(s)}$ exactamente una vez. Por ende, el entrelazador $v^{(j,k)}(\bar{p})$ es único hasta factores.

2.2. Funciones de correlación y propagadores

Sean $\varphi_{r,1}(x)$ y $\varphi_{r',2}(x)$ dos campos cuánticos con entrelazadores $v_1(p)$ y $v_2(p)$, su función de correlación de Wightman se define como el valor esperado en el vacío de su producto:

$$\langle\langle \varphi_{1,r}(x) \varphi_{2,r'}(x') \rangle\rangle = (2\pi)^{-3} \int d\mu(p) e^{-i(p(x-x'))} M_{rr'}^{\varphi_1\varphi_2}(p) \quad (2.19)$$

donde

$$M_{rr'}^{\varphi_1\varphi_2}(p) := (v_{1,r}^c(p)v_{2,r'}(p))_{\mathfrak{h}^{(s)}} = \sum_{k=-j}^j v_{1,r}^k(p)^* v_{2,r'}^k(p). \quad (2.20)$$

Nótese que la función de correlación de Wightman no involucra ninguna forma de ordenamiento temporal de las variables x y x' . El lado derecho de (2.19) puede reescribirse como

$$\int d^4p \delta_+(p^2 - m^2) e^{-i(p(x-x'))} M_{rr'}^{\varphi_1\varphi_2}(p)$$

donde la función $\delta_+(p^2 - m^2)$ restringe la integral sobre d^4p a H_m^+ .

La función $M_{rr'}^{\varphi_1\varphi_2}(p)$ es positiva por definición, y puede calcularse tomando la transformada de Fourier de la función de correlación después de separar la función delta sobre la capa másica. La segunda igualdad en (2.20) brinda una alternativa para calcular $M_{rr'}^{\varphi_1\varphi_2}$, si se tiene conocimiento de los entrelazadores de los campos.

2.3. El propagador cinemático

El protocolo para introducir el ordenamiento temporal consiste en reemplazar el término $\delta_+(p^2 - m^2)$ por $D_m^F = (i/2\pi)(p^2 - m^2 + i0)^{-1}$. La expresión que resulta de esto coincide con el valor esperado en el vacío del *producto ordenado en el tiempo* de los campos

$$\langle\langle \mathbb{T} \varphi_{1,r}(x) \varphi_{2,r'}(x') \rangle\rangle = \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p \frac{e^{-i(p(x-x'))}}{p^2 - m^2 + i0} M_{rr'}^{\varphi_1\varphi_2}(p). \quad (2.21)$$

En el caso del campo de Klein–Gordon localizado en un punto $\phi(x)$, el propagador cinemático es simplemente el propagador de Feynman,

$$D_m^F(x) = \theta(x^0)W_m(x) + \theta(-x^0)W_m(-x) = D_F(x),$$

donde θ es la función escalón de Heaviside y $W_m(x)$ es la función de dos puntos de Wightman. La derivación de la ecuación (2.21) es una tarea estándar (véanse, por ejemplo, los libros de texto [11] y [10].), mientras que la prueba de la existencia como un producto distribucional en el sentido de Hörmander es menos conocida pero clara por la forma del conjunto de frentes de onda de $W_m(x)$, dado por la ecuación (5.36) de [12]. Una prueba completa se ofrece en [13]. En el caso general de dos campos arbitrarios φ y φ' dados por la ecuación (2.18), el propagador cinemático es una derivada de $D_F(x)$,

$$\langle\langle T_0\varphi\varphi'\rangle\rangle(x) = {}_mM^{\varphi,\varphi'}(i\partial) D_F(x). \quad (2.22)$$

2.4. Espín 1

2.4.1. Caso $s = 1$

La teoría de entrelazadores puede usarse para calcular la función de dos puntos del primero de los campos tipo- A : el campo vectorial A_μ , el cual se asocia con los bosones de espín 1. En el caso masivo, A no es más que el *campo de Proca*, descubierto por el físico Alexandru Proca, como parte de su teoría de la interacción débil [14], desarrollada entre 1936 y 1941. Los bosones W^\pm , conocidos por actuar como intermediarios en procesos de decaimiento nuclear, y el bosón Z , el cual fue incorporado posteriormente al Modelo Estándar por Steven Weinberg como mediador de la transferencia de momento, espín y energía en la dispersión elástica de neutrinos, son todas excitaciones de campos de Proca. Respecto a su comportamiento en el régimen UV, se verá en breve que su función de dos puntos de Wightman posee un término cuadrático en los momentos, y por lo tanto un grado de escalamiento igual a 2, lo cual se traduce en una amplitud superficialmente divergente. El campo A es libre de divergencia:

$$\partial^\mu A_\mu(x) = 0, \quad (2.23)$$

y sus componentes obedecen la ecuación de Klein–Gordon:

$$(\square + m^2)A_\mu = 0. \quad (2.24)$$

El tensor de rango 2 antisimétrico $F := dA$, con componentes $F_{\mu\nu}$ dadas por

$$F_{\mu\nu}(x) := \partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x), \quad (2.25)$$

posee también dimensión de escalamiento igual a 2. El núcleo de su función de Wightman, es un polinomio **homogéneo de grado 4**. De (2.23), (2.24) y (2.25), es fácil verificar que

$A_m u$ satisface la **ecuación de Proca**:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) + m^2 A^\nu(x) = 0. \quad (2.26)$$

Lo que prosigue ahora es el cálculo de las funciones de correlación de F . Primero, se aplicarán los métodos descritos en las secciones anteriores para construir los entrelazadores v_μ de A_μ , a partir de los cuales es posible calcular los entrelazadores $v_{\nu\mu}$ de $F_{\nu\mu}$. Luego, se procede a calcular la parte en la capa másica del propagador de Wightman de F (ecuación (2.20)).

Se usará la siguiente realización $D^{(1)}$ de la representación de espín 1 de $O(3)$. En un marco de reposo de \bar{p} , cada $R \in O(3)$ corresponde a una matriz de 4×4 de la forma

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0^t & \underline{R} \end{bmatrix},$$

donde \underline{R} es una matriz ortogonal 3×3 . Consideramos la representación $D^{(1)}$ como realizada en el espacio $\mathfrak{h}^{(1)} := \mathbb{C}^3$ por la representación definitoria de las rotaciones,

$$D^{(1)}(R) := \underline{R}.$$

La transformación PT está representada por el operador de conjugación compleja de componentes en \mathbb{C}^3 ,

$$D^{(1)}(-\mathbf{1})(z_1, z_2, z_3) := (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3). \quad (2.27)$$

Debido a su irreducibilidad, esta elección es única salvo factores constantes. Entonces, la transformación PT se representa en $L^2(H_m^+; \mathbb{C}^3)$ por

$$(U^{(m,1)}(-\mathbf{1})\psi)(p) := \overline{\psi(p)}. \quad (2.28)$$

El espacio objetivo para los campos vectoriales es $\mathfrak{h} := \mathbb{C}^4$ con la base denotada por $\{e_{(0)}, e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}\}$, y $D(\Lambda)$ actúa como la representación definitoria de $O(1, 3)$, esto es, $D(\Lambda)z := \Lambda z$.

Usando (2.17) $v(p) := v(\bar{p}) \circ B_p^{-1}$, donde $v(\bar{p})$ es un mapeo lineal de \mathbb{C}^4 a \mathbb{C}^3 que satisface $\underline{R} \circ v(\bar{p}) = v(\bar{p}) \circ R$ para todo $R \in SO(3)$. Para que la divergencia sea 0, v debe satisfacer $\bar{p}^\mu v(\bar{p})_\mu = 0$, i.e.,

$$(\hat{v}\bar{p}) = 0,$$

donde se ha definido $\hat{v} := v(\bar{p})$. Al ser un entrelazador entre dos representaciones irreducibles de $SO(3)$, v es único, salvo factores constantes.

Se sabe también que este entrelazador está dado por

$$(\hat{v}z) := i\underline{z}, \quad (2.29)$$

donde \underline{z} es la parte espacial de z , i.e., $\underline{z} := (z^1, z^2, z^3)$ si $z = (z^0, z^1, z^2, z^3)$.¹

Usamos la ecuación (2.16) para obtener $v(p)$ a partir de \hat{v} :

$$v_\mu^p(p) \doteq v^p(p)e_{(\mu)} \equiv \hat{v}^p B_p^{-1} e_{(\mu)}.$$

Finalmente, $A_\mu(x)$ se define como el campo libre para este entrelazador.²

Lema 2.3. *El campo de Proca $A_\mu^p(x)$ es hermitiano, local, covariante y covariante de paridad.³ Es libre de divergencia, $\partial^\mu A_\mu^p = 0$. Es el campo cuántico libre único, hasta equivalencia unitaria, para partículas masivas de espín 1 con estas propiedades. Su función de dos puntos en la capa másica está dada por*

$$M_{\mu\nu}^{AA}(p) = -g_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2}. \quad (2.30)$$

Demostración. La covarianza y la localidad se derivan de las propiedades del entrelazador de Wigner. Este último obviamente satisface la relación entrelazadora también para la transformación de paridad, por lo que el campo es covariante de paridad. Para demostrar que A_μ^p es hermitiano, necesitamos demostrar que la función entrelazadora $v^p(p)$ es autoconjugada. Dado que $D(-\mathbf{1}) = -\mathbf{1}$ y las transformadas de Lorentz conmutan con conjugación compleja, $\Lambda\bar{z} = \overline{\Lambda z}$, tenemos

$$v^{pc}(p)z = D^{(1)}(-\mathbf{1})v^p(p)D(-\mathbf{1})\bar{z} = -\overline{v^p(p)\bar{z}} = \overline{iB_p^{-1}\bar{z}} = \underline{iB_p^{-1}z} = v^p(p)z,$$

lo que prueba la afirmación. El hecho de que el campo Proca esté libre de divergencias se deriva de

$$v_\mu^p(p)p^\mu = v^p(p)p = \hat{v}^p B_p^{-1}p = \hat{v}^p \bar{p} = 0. \quad (2.31)$$

Para calcular la función de dos puntos, tenga en cuenta que para $x = (x^0, \underline{x})$ y $w = (w^0, \underline{w})$ en \mathbb{R}^4 se mantiene

$$(\hat{v}^p x, \hat{v}^p w)_{\mathbb{C}^3} = (\underline{x}, \underline{w})_{\mathbb{C}^3} = x^0 \omega^0 - x \cdot \omega,$$

¹El factor i ha sido elegido para hacer que el entrelazador sea su propia conjugada compleja.

²Más intrínsecamente, \mathfrak{h} es la complexificación del espacio de los vectores de Lorentz, y $\mathfrak{h}^{(1)}$ es la complexificación del complemento ortogonal minkowskiano del momento de referencia \bar{p} , con el producto escalar dado por el negativo de la extensión sesquilínea del producto de Minkowski, $(c \otimes x, c' \otimes x') := -\bar{c}'c' x \cdot x'$. Entonces $D^{(1)}(R)$ y $D(R)$ ambos actúan como $c \otimes x \mapsto c \otimes Rx$ (donde en el caso de $D^{(1)}$, x está restringido a estar en \bar{p}^\perp), y el entrelazador \hat{v}_p está dado por $\hat{v}^p(c \otimes x) := ic \otimes Ex$, donde E es el proyector ortogonal (minkowskiano) sobre \bar{p}^\perp . La propiedad de entrelazador se deriva del hecho de que R conmuta con la proyección E .

³Es decir, covariante bajo el grupo de Poincaré ortócrono.

donde $x \cdot w$ es el producto escalar en \mathbb{R}^3 .

Usando $(B_p^{-1}x)^0 = \bar{p} \cdot B_p^{-1}x/m = p \cdot x/m$, obtenemos

$$(v^p(p)x, v^p(p)\omega)_{\mathbb{C}^3} = \frac{(p \cdot x)(p \cdot \omega)}{m^2} - x \cdot \omega. \quad (2.32)$$

Sustituyendo en (2.20), esto produce la ecuación (2.30).

La unicidad se deriva de la observación al final de la subsección 5.2, ya que la representación vectorial del grupo de Lorentz es irreducible.

La función entrelazamiento v^F de la intensidad de campo $F_{\mu\nu}$ se lee de la Ec. (2.30): viene dado por

$$v_{\mu\nu}^F(p) = i(p_\mu v_\nu^p(p) - p_\nu v_\mu^p(p)). \quad (2.33)$$

Su “función de dos puntos” sobre la capa másica está dada por

$$\begin{aligned} \langle\langle F_{\mu\nu}(x)F_{\alpha\beta}(x') \rangle\rangle &=: M_{\mu\nu,\alpha\beta}^{FF}(p) \\ &= -p_\mu p_\alpha g_{\nu\beta} + p_\nu p_\alpha g_{\mu\beta} - p_\nu p_\beta g_{\mu\alpha} + p_\mu p_\beta g_{\nu\alpha}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Nótese que los términos $\sim p^4$ se cancelan. \square

Dado que $\partial_\mu \partial_\rho (x^t x_t - i0)^{-1} = -2(g_{\mu\rho}(x^t x_t) - 4x_\mu x_\rho)(x^t x_t - i0)^{-3}$, el propagador cinemático (ver (2.22)) fuera de la diagonal puede calcularse de la siguiente forma [5]:

$$\begin{aligned} &(g_{\mu\rho} \partial_\nu \partial_\sigma - g_{\nu\rho} \partial_\mu \partial_\sigma - g_{\mu\sigma} \partial_\nu \partial_\rho + g_{\nu\sigma} \partial_\mu \partial_\rho)(x^t x_t - i0)^{-1} \\ &= -4((g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho} g_{\mu\sigma})x^2 - 2(g_{\mu\rho} x_\nu x_\sigma - g_{\nu\rho} x_\mu x_\sigma - g_{\mu\sigma} x_\nu x_\rho + g_{\nu\sigma} x_\mu x_\rho))(x^t x_t - i0)^{-3} \\ &=: h_{\mu\nu,\rho\sigma}(x) (x^t x_t - i0)^{-3}, \end{aligned}$$

donde $h_{\mu\nu,\rho\sigma}(x)$ es un polinomio homogéneo y armónico de grado 2. De echo, estos polinomios forman una base para el espacio vectorial de polinomios armónicos cuadráticos en \mathbb{M}^4 [5].

2.5. Espines mayores

Consideremos ahora el caso de espín entero arbitrario $s \geq 2$. Entre la infinitud de campos locales libres para espín s que actúan en un espacio de Hilbert, hay dos campos tensoriales que destacan por tener un comportamiento UV óptimo, a saber, dimensión de escalamiento $s + 1$. El primero de tales campos es un tensor totalmente simétrico $A_{\mu_1 \dots \mu_s}^p$ de rango s , que es libre de trazas y divergencias, y se transforma bajo la Grupo de

Lorentz según la representación irreducible $D^{(s/2, s/2)}$. Se caracteriza únicamente por estas propiedades hasta la equivalencia unitaria. En general, se hará referencia a esta clase de campos como **potenciales**. Aplicando un cierto operador diferencial sobre el potencial se obtiene el correspondiente tensor de **intensidad de campo** $F_{\mu_1 \nu_1 \dots \mu_s \nu_s}$, cuyo rango es $2s$. A pesar de poseer el doble de componentes que el potencial, el tensor de intensidad de fuerzas puede usarse para describir la misma teoría libre de interacciones (Una vez que se introducen las interacciones, surgen complicaciones en el caso de la intensidad de campo. La evidencia mas clara de tales complicaciones es la imposibilidad de escribir un lagrangiano electromagnético sin invocar el potencial A_μ).

Espacios de una partícula

Tomamos la representación $D^{(s)}$ que actúa sobre el espacio de 3-tensores simétricos libres de trazas con producto tensorial $(\mathbb{C}^3)^{\otimes s}$. Dicho producto es inducido por el producto escalar consideramos en \mathbb{C}^3 ,

$$\langle u_1 \otimes \dots \otimes u_s \mid v_1 \otimes \dots \otimes v_s \rangle \doteq \langle u_1 \mid v_1 \rangle \dots \langle u_s \mid v_s \rangle.$$

Sea g_3 el tensor métrico del producto escalar canónico en \mathbb{C}^3 y sea \hat{g}_3 su levantamiento a un tensor contravariante de rango dos, $\hat{g}_3 = \sum_{i,j=1}^3 g_3^{ij} e_{(i)} \otimes e_{(j)}$ con respecto a una base $\{e_{(1)}, e_{(2)}, e_{(3)}\}$ en \mathbb{C}^3 . Este \hat{g}_3 se caracteriza por satisfacer:

$$\langle \hat{g}_3 \mid u \otimes v \rangle = \langle \bar{u} \mid v \rangle \quad \text{para todo } u, v \in \mathbb{C}^3 \quad \text{y todo } i_3, \dots, i_s.$$

Seguidamente, se define el proyector E al subespacio de tensor simétrico de traza nula en $(\mathbb{C}^3)^{\otimes s}$ mediante la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} E(u_1 \otimes \dots \otimes u_s) &= \frac{1}{s!} \sum_{\pi \in S_s} \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^k c_k \langle \bar{u}_{\pi(1)} \mid u_{\pi(2)} \rangle \dots \langle \bar{u}_{\pi(2k-1)} \mid u_{\pi(2k)} \rangle \\ &\quad \times E_+(u_{\pi(2k+1)} \otimes \dots \otimes u_{\pi(s)}) \hat{g}_3^{\otimes k}. \end{aligned}$$

El proyector al subespacio de tensores simétricos E_+ está dado por

$$E_+(u_1 \otimes \dots \otimes u_s) \doteq \frac{1}{s!} \sum_{\pi \in S_s} u_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes u_{\pi(s)}.$$

Aquí S_s denota el grupo de permutaciones de s elementos; y $\lfloor s/2 \rfloor$ denota la parte entera de $s/2$.

Las constantes c_k fueron calculadas en [15]. A saber, $c_0 = 1$, $c_1 = \frac{1}{3}$, y en general,

$$c_k = (-1)^k 2^{-2k} \frac{\Gamma(\frac{n}{2} + 2l - k - 1)}{\Gamma(\frac{n}{2} + 2l - 1)}.$$

El espacio de tensores simétricos libres de trazas tiene dimensión $2s + 1$ y es irreducible bajo la representación del producto del grupo de rotaciones. Entonces es claro que podemos usar dicho subespacio como una representación del *pequeño espacio de Hilbert* $\mathfrak{h}^{(s)}$. Además,

$$D^{(s)}(R) E(u_1 \otimes \cdots \otimes u_s) \doteq E(D^{(1)}(R)u_1 \otimes \cdots \otimes D^{(1)}(R)u_s).$$

El representante antiunitario de la transformación PT, $-\mathbf{1}$, viene dado por:

$$D^{(s)}(-\mathbf{1}) E(u_1 \otimes \cdots \otimes u_s) \doteq E(\bar{u}_1 \otimes \cdots \otimes \bar{u}_s).$$

Finalmente, el producto escalar en $\mathfrak{h}^{(s)}$ está dado por

$$\begin{aligned} & \langle E(u_1 \otimes \cdots \otimes u_s) | E(v_1 \otimes \cdots \otimes v_s) \rangle \\ &= \frac{1}{(s!)^2} \sum_{\pi, \sigma \in S_s} \sum_{k=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} \langle u_{\pi(1)} | \bar{u}_{\pi(2)} \rangle \cdots \langle u_{\pi(2k-1)} | \bar{u}_{\pi(2k)} \rangle \langle \bar{v}_{\sigma(1)} | v_{\sigma(2)} \rangle \cdots \langle \bar{v}_{\sigma(2k-1)} | v_{\sigma(2k)} \rangle \\ & \quad \times \langle u_{\pi(2k+1)} | v_{\sigma(2k+1)} \rangle \cdots \langle u_{\pi(s)} | v_{\sigma(s)} \rangle. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Los campos

Nuevamente, basta con exhibir los entrelazadores apropiados para constatar que los campos son entidades matemáticas consistentes.

El espacio objetivo \mathfrak{h} para el tensor potencial es el subespacio de tensores simétricos sin trazas en $(\mathbb{C}^4)^{\otimes s}$. La restricción de $\Lambda^{\otimes s}$ a dicho subespacio, denotada aquí por $D(\Lambda)$, resulta ser isomorfa a $D^{(s/2, s/2)}$ [16]. Algo similar ocurre con las intensidades de campo, las cuales resultan habitar en las representaciones $D^{(s,0)} \oplus D^{(0,s)}$ del grupo de Lorentz. \mathfrak{h} es un subespacio invariante de $(\mathbb{C}^4)^{\otimes 2s}$, y $D(\Lambda)$ es la restricción correspondiente de $\Lambda^{\otimes 2s}$.

Los entrelazadores del potencial y la intensidad de campo de una partícula de espín s pueden escribirse en términos de los entrelazadores de espín 1. Aquellos resultan ser

$$v_{\mu_1 \cdots \mu_s}^s(p) \doteq E(v_{\mu_1}^p(p) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_s}^p(p)) \quad (2.36)$$

$$v_{\mu_1 \nu_1 \cdots \mu_s \nu_s}^{s,F}(p) \doteq E(v_{\mu_1 \nu_1}^F(p) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_s \nu_s}^F(p)), \quad (2.37)$$

donde $v_{\mu}^p(p)$ y $v_{\mu\nu}^F(p)$ son los entrelazadores para el potencial de espín uno y el tensor de intensidad de campo, respectivamente.

El núcleo de la función de dos puntos de Wightman de una intensidad de campo de espín s es

$$\begin{aligned} & \langle v_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_s\nu_s}^{s,F}(p) \mid v_{\alpha_1\beta_1\cdots\alpha_s\beta_s}^{s,F}(p) \rangle \\ & \equiv \langle v_{\mu_1\nu_1}^F(p) \otimes \cdots \otimes v_{\mu_s\nu_s}^F(p) \mid E(v_{\alpha_1\beta_1}^F(p) \otimes \cdots \otimes v_{\alpha_s\beta_s}^F(p)) \rangle. \end{aligned}$$

2.6. Ejemplo: Espín 2

Las partículas de espín dos pueden interpretarse como gravitones masivos, y el potencial tensor $h_{\mu\nu}^p$ ($\equiv A_{\mu\nu}^p$) podría, en el límite sin masa, modelar las fluctuaciones cuánticas del campo métrico. La intensidad del campo sería entonces (dos veces) el tensor de Riemann linealizado $R_{\mu\nu\alpha\beta}$.

Las funciones de dos puntos se calculan partiendo de que, para $s = 2$, la proyección sobre los tensores simétricos de traza nula en $(\mathbb{C}^3)^{\otimes 2}$, de acuerdo con (2.20), está dada por

$$E(u \otimes v) = E_+(u \otimes v) - \frac{1}{3} \langle \bar{u} \mid v \rangle \hat{g}_3.$$

Potencial

Para el potencial, la función de dos puntos en la capa másica es [4]:

$$\begin{aligned} M_{\mu\nu,\alpha\beta}^{hp} h^p &= \frac{2}{3} \frac{p_\mu p_\nu p_\alpha p_\beta}{m^4} + \frac{1}{2} (g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + g_{\nu\alpha} g_{\mu\beta}) - \frac{1}{3} g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{p_\mu p_\alpha}{m^2} g_{\nu\beta} + \frac{p_\nu p_\beta}{m^2} g_{\mu\alpha} + \frac{p_\mu p_\beta}{m^2} g_{\nu\alpha} + \frac{p_\nu p_\alpha}{m^2} g_{\mu\beta} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{p_\mu p_\nu}{m^2} g_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{m^2} g_{\mu\nu} \right). \end{aligned}$$

Intensidad de campo

Sea $w_{\alpha\beta\kappa\tau}(p) := \frac{1}{2} E(v_{\alpha\beta}(p) \otimes v_{\kappa\tau}(p))$ el entrelazador para $R_{\alpha\beta\kappa\tau}$, dado por la fórmula (2.37), donde E es el proyector en $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$ dado por

$$E(v_{\alpha\beta} \otimes v_{\kappa\tau}) := v_{\alpha\beta} \vee v_{\kappa\tau} - \frac{1}{3} \langle \delta_K \mid v_{\alpha\beta} \otimes v_{\kappa\tau} \rangle \quad (2.38)$$

con $\delta_K = \sum_{r=1}^3 \varepsilon_r \otimes \varepsilon_r$ cuya traza es 3. Esto conduce a la fórmula:

$$\langle E(u \otimes v) \mid E(w \otimes z) \rangle = \frac{1}{2} \langle u \mid w \rangle \langle v \mid z \rangle + \frac{1}{2} \langle u \mid z \rangle \langle v \mid w \rangle - \frac{1}{3} \langle u \mid v \rangle \langle w \mid z \rangle. \quad (2.39)$$

Comenzando ahora desde la fórmula (2.20), obtenemos

$$\begin{aligned}
M_{\alpha\beta\kappa\tau,\rho\sigma\lambda\gamma}^{RR}(p) &= \frac{1}{4} \sum_{r,s} \langle E(v_{\alpha\beta,r} \otimes v_{\kappa\tau,s}) \mid E(v_{\rho\sigma,r} \otimes v_{\lambda\gamma,s}) \rangle \\
&= \frac{1}{8} \sum_{r,s} \langle v_{\alpha\beta,r} \mid v_{\rho\sigma,r} \rangle \langle v_{\kappa\tau,s} \mid v_{\lambda\gamma,s} \rangle + \langle v_{\alpha\beta,r} \mid v_{\lambda\gamma,r} \rangle \langle v_{\kappa\tau,s} \mid v_{\rho\sigma,s} \rangle \\
&\quad - \frac{1}{12} \sum_{r,s} \langle v_{\alpha\beta,r} \mid v_{\kappa\tau,r}^* \rangle \langle v_{\rho\sigma,s}^* \mid v_{\lambda\gamma,s} \rangle \\
&= \frac{1}{8} M_{\alpha\beta,\rho\sigma}^{FF} M_{\kappa\tau,\lambda\gamma}^{FF} + \frac{1}{8} M_{\alpha\beta,\lambda\gamma}^{FF} M_{\kappa\tau,\rho\sigma}^{FF} - \frac{1}{12} M_{\alpha\beta,\kappa\tau}^{FF} M_{\rho\sigma,\lambda\gamma}^{FF}
\end{aligned}$$

donde se ha utilizado que los $v_{\mu\nu,r}$ son puramente imaginarios.

Se procede insertando la expresión (2.20) para el núcleo de Wightman de $F_{\mu\nu}$ en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
&(p_\rho g_{\beta\sigma} - p_\sigma g_{\beta\rho})(p_\lambda g_{\tau\gamma} - p_\gamma g_{\tau\lambda}) + (p_\lambda g_{\beta\gamma} - p_\gamma g_{\beta\lambda})(p_\rho g_{\tau\sigma} - p_\sigma g_{\tau\rho}) \\
&\quad - \frac{2}{3} g_{\beta\tau} (p_\rho p_\lambda g_{\sigma\gamma} - p_\sigma p_\lambda g_{\rho\gamma} - p_\rho p_\gamma g_{\sigma\lambda} + p_\sigma p_\gamma g_{\rho\lambda}).
\end{aligned}$$

Hay más términos que no contienen el producto $p_\alpha p_\kappa$. De la expresión (2.39) extraemos el coeficiente, por ejemplo, de $p_\alpha p_\kappa p_\rho p_\lambda$ en $M_{\alpha\beta\kappa\tau,\rho\sigma\lambda\gamma}^{RR}(p)$, que es:

$$\frac{1}{8} \left(g_{\beta\sigma} g_{\tau\gamma} + g_{\beta\gamma} g_{\tau\sigma} - \frac{2}{3} g_{\beta\tau} g_{\sigma\gamma} \right) =: G_{\beta\tau,\sigma\gamma}$$

ergo,

$$M_{\alpha\beta\kappa\tau,\rho\sigma\lambda\gamma}^{RR}(p) = \sum \pm G_{\beta\tau,\sigma\gamma} p_\alpha p_\kappa p_\rho p_\lambda + 15 \text{ términos similares.} \quad (2.40)$$

Los otros términos provienen de permutar los índices $\mu \leftrightarrow \nu$ y $\rho \leftrightarrow \sigma$ en [5] en los diferentes casos visibles en el lado derecho de (2.40): se consideran los 48 términos, sin duplicaciones. El único problema restante son los signos \pm que los preceden.

Para ver los signos, reensamblamos los términos de manera explícita:

$$\begin{aligned}
&G_{\beta\tau,\sigma\gamma} p_\alpha p_\kappa p_\rho p_\lambda - G_{\beta\tau,\sigma\lambda} p_\alpha p_\kappa p_\rho p_\gamma - G_{\beta\tau,\rho\gamma} p_\alpha p_\kappa p_\sigma p_\lambda + G_{\beta\tau,\rho\lambda} p_\alpha p_\kappa p_\sigma p_\gamma \\
&+ G_{\beta\kappa,\rho\lambda} p_\alpha p_\tau p_\sigma p_\gamma - G_{\beta\kappa,\rho\gamma} p_\alpha p_\tau p_\sigma p_\lambda - G_{\beta\kappa,\sigma\lambda} p_\alpha p_\tau p_\rho p_\gamma + G_{\beta\kappa,\sigma\gamma} p_\alpha p_\tau p_\rho p_\lambda \\
&+ G_{\alpha\tau,\rho\lambda} p_\beta p_\kappa p_\sigma p_\gamma - G_{\alpha\tau,\rho\gamma} p_\beta p_\kappa p_\sigma p_\lambda - G_{\alpha\tau,\sigma\lambda} p_\beta p_\kappa p_\rho p_\gamma + G_{\alpha\tau,\sigma\gamma} p_\beta p_\kappa p_\rho p_\lambda \\
&+ G_{\alpha\kappa,\sigma\gamma} p_\beta p_\tau p_\rho p_\lambda - G_{\alpha\kappa,\sigma\lambda} p_\beta p_\tau p_\rho p_\gamma - G_{\alpha\kappa,\rho\gamma} p_\beta p_\tau p_\sigma p_\lambda + G_{\alpha\kappa,\rho\lambda} p_\beta p_\tau p_\sigma p_\gamma.
\end{aligned}$$

El propagador cinemático

Ahora es posible proceder con el cálculo del propagador cinemático del tensor linealizado de Riemann: dado que $(\pm i)^4 = 1$, obtenemos $p_\alpha p_\kappa p_\rho p_\lambda \leftrightarrow \partial_\alpha \partial_\kappa \partial_\rho \partial_\lambda$ con un factor $(4\pi^2)^4$. Al igual que en [5], abreviamos $(x^2 - i0)^{-1}$ como x^{-2} , manteniendo presente que se trata de un abuso de notación, justificado solamente por tratarse de un cálculo fuera del origen. Se llega así a

$$\partial_\alpha \partial_\kappa \partial_\rho \partial_\lambda [x^{-2}] =: q_{\alpha\kappa\rho\lambda}(x) x^{-10}.$$

En efecto, dado que $\partial_\mu \partial_\rho (x^2) = 2g_{\mu\rho}$ y $\partial_\mu \partial_\rho (x^{-2}) = -2(g_{\mu\rho}x^2 - 4x_\mu x_\rho)x^{-6}$, se tiene

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \partial_\kappa \partial_\rho \partial_\lambda [x^{-2}] &= \partial_\alpha \partial_\kappa [-2(g_{\rho\lambda}x^2 - 4x_\rho x_\lambda)x^{-6}] \\ &= -2 \partial_\alpha [(2g_{\rho\lambda}x_\kappa - 4g_{\kappa\rho}x_\lambda - 4g_{\kappa\lambda}x_\rho)x^{-6} + (g_{\rho\lambda}x^2 - 4x_\rho x_\lambda)(-6x_\kappa x^{-8})] \\ &= 8 \partial_\alpha [(g_{\rho\lambda}x_\kappa + g_{\kappa\rho}x_\lambda + g_{\kappa\lambda}x_\rho)x^{-6} - 6x_\kappa x_\rho x_\lambda x^{-8}] \\ &= 8 [(g_{\alpha\kappa}g_{\rho\lambda} + g_{\alpha\lambda}g_{\kappa\rho} + g_{\alpha\rho}g_{\kappa\lambda})x^{-6} - 6(g_{\rho\lambda}x_\alpha x_\kappa + g_{\kappa\rho}x_\alpha x_\lambda + g_{\kappa\lambda}x_\alpha x_\rho)x^{-8} \\ &\quad - 6(g_{\alpha\kappa}x_\rho x_\lambda + g_{\alpha\rho}x_\kappa x_\lambda + g_{\alpha\lambda}x_\kappa x_\rho)x^{-8} + 48x_\alpha x_\kappa x_\rho x_\lambda x^{-10}] \\ &= 8q_{\alpha\kappa\rho\lambda}(x) x^{-10}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} q_{\alpha\kappa\rho\lambda}(x) &:= (g_{\alpha\kappa}g_{\rho\lambda} + g_{\alpha\lambda}g_{\kappa\rho} + g_{\alpha\rho}g_{\kappa\lambda})x^4 \\ &\quad - 6(g_{\alpha\kappa}x_\rho x_\lambda + g_{\alpha\rho}x_\kappa x_\lambda + g_{\alpha\lambda}x_\kappa x_\rho + g_{\rho\lambda}x_\alpha x_\kappa + g_{\kappa\rho}x_\alpha x_\lambda + g_{\kappa\lambda}x_\alpha x_\rho)x^2 \\ &\quad + 48x_\alpha x_\kappa x_\rho x_\lambda. \end{aligned}$$

Seguidamente, se calcula el d'Alembertiano de los polinomios q :

$$\square(x^2) = g_{\mu\nu} \partial^\mu \partial^\nu (x^2) = 2g_{\mu\nu} \partial^\mu x^\nu = 2\partial_\nu x^\nu = 8;$$

además,

$$\square(x^4) = \square((x^2)^2) = 2x^2 \square(x^2) + 2\partial^\mu (x^2) \partial_\mu (x^2) = 16x^2 + 8x^\mu x_\mu = 24x^2;$$

luego,

$$\begin{aligned} \square(x_\rho x_\lambda x^2) &= \square(x_\rho x_\lambda)x^2 + 2\partial_\mu (x_\rho x_\lambda) \partial^\mu (x^2) + 8x_\rho x_\lambda \\ &= 2g_{\rho\lambda}x^2 + 4x^\mu (g_{\mu\rho}x_\lambda + g_{\mu\lambda}x_\rho) + 8x_\rho x_\lambda \\ &= 2g_{\rho\lambda}x^2 + 16x_\rho x_\lambda. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\Box(x_\alpha x_\kappa x_\rho x_\lambda) &= \Box(x_\alpha x_\kappa) x_\rho x_\lambda + 2\partial^\mu(x_\alpha x_\kappa) \partial_\mu(x_\rho x_\lambda) + x_\alpha x_\kappa \Box(x_\rho x_\lambda) \\
&= 2g_{\alpha\kappa} x_\rho x_\lambda + 2x_\kappa \partial_\alpha(x_\rho x_\lambda) + 2x_\alpha \partial_\kappa(x_\rho x_\lambda) + 2g_{\rho\lambda} x_\alpha x_\kappa \\
&= 2g_{\alpha\kappa} x_\rho x_\lambda + 2g_{\alpha\rho} x_\kappa x_\lambda + 2g_{\alpha\lambda} x_\kappa x_\rho + 2g_{\kappa\rho} x_\alpha x_\lambda + 2g_{\kappa\lambda} x_\alpha x_\rho + 2g_{\rho\lambda} x_\alpha x_\kappa.
\end{aligned}$$

Al combinar esto se llega a

$$\begin{aligned}
\Box(q_{\alpha\kappa\rho\lambda}(x)) &= 24(g_{\alpha\kappa}g_{\rho\lambda} + g_{\alpha\lambda}g_{\kappa\rho} + g_{\alpha\rho}g_{\kappa\lambda})x^2 \\
&\quad - 6g_{\alpha\kappa}(2g_{\rho\lambda}x^2 + 16x_\rho x_\lambda) - 6g_{\rho\lambda}(2g_{\alpha\kappa}x^2 + 16x_\alpha x_\kappa) - \dots \\
&\quad + 48(2g_{\alpha\kappa}x_\rho x_\lambda + 2g_{\rho\lambda}x_\alpha x_\kappa + \dots).
\end{aligned}$$

Un vistazo cuidadoso a la expresión anterior revela que todos los términos se cancelan; los polinomios q son Minkowski armónicos. Por ende, el polinomio en el numerador del propagador no renormalizado es también armónico en el sentido de Minkowski y el propagador como un todo exhibe la estructura de un multipolo armónico. Explícitamente:

$$\begin{aligned}
\langle\langle T R_{\alpha\beta\kappa\tau}(x) R_{\rho\sigma\lambda\gamma}(x') \rangle\rangle &= \sum \pm G_{\beta\tau,\sigma\gamma} \partial_\alpha \partial_\kappa \partial_\rho \partial_\lambda D_0^F(x) + 15 \text{ términos similares} \\
&=: \frac{16\pi^8}{3} h_{\alpha\beta\kappa\tau,\rho\sigma\lambda\gamma}(x) D_0^F(x)^5
\end{aligned}$$

donde

$$G_{\beta\tau,\sigma\gamma} := \frac{1}{8} \left(g_{\beta\sigma} g_{\tau\gamma} + g_{\beta\gamma} g_{\tau\sigma} - \frac{2}{3} g_{\beta\tau} g_{\sigma\gamma} \right);$$

los términos similares se obtienen realizando las permutaciones $(\alpha, \beta, \rho, \sigma)$ con $(\kappa, \tau, \lambda, \gamma)$, $(\tau, \kappa, \lambda, \gamma)$, $(\kappa, \tau, \gamma, \lambda)$ y $(\tau, \kappa, \gamma, \lambda)$ respectivamente, mientras que los signos se escogen de modo que las simetrías del campo se transfieran al propagador.

Capítulo 3

Sobre la estructura multipolar de los propagadores de Feynman de bosones sin masa

Los multipolos armónicos son funciones en $\mathbb{R}^4 \setminus \{0\}$ de la forma $P(x) = p(x)_k |x|^{2k+2}$, con p_k un polinomio armónico y homogéneo de orden k . Los multipolos son soluciones homogéneas de la ecuación de Laplace $\Delta f = 0$.

En este capítulo se prueba que, a pesar de las apariencias, los propagadores de partículas bosónicas sin masa siguen una estructura análoga a la de los multipolos armónicos, donde el cuadrado de la norma euclidiana es reemplazado por la forma cuadrática de Minkowski. Además, el operador de Laplace es reemplazado por el operador de D'Alembert, queriéndose decir con esto que el polinomio en el numerador satisface la ecuación de onda. La renormalizabilidad de los propagadores se obtiene automáticamente, una vez que se prueba que el polinomio en el numerador del multipolo es armónico en este espacio, i.e., $\square p = 0$.

La prueba es una adaptación de resultados conocidos sobre la producción de bases armónicas vía diferenciación. La facilidad con la que estos resultados se transfieren a \mathbb{M}^4 se debe principalmente al hecho de que muchas identidades diferenciales se preservan bajo la sustituciones formales $r^2 \mapsto x_\mu x^\mu$ y $\Delta \mapsto \square$.

3.1. Armónicos esféricos via diferenciación

Muchos resultados interesantes pueden probarse simplemente derivando la función $x \mapsto |x|^{2-n}$ para $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Resultados que, como es señalado en [17], *implican derivación, pero no integración*. Esto es deseable si se desea establecer un paralelismo con la forma general de los propagadores, puesto que la integración, en espacios euclidianos, se lleva a cabo sobre la esfera unitaria \mathbb{S} , la cual se vuelve una superficie no acotada

al reemplazar r^2 por $x_\mu x^\mu$, introduciendo posibles complicaciones. Por ejemplo, por este método puede llegarse a una prueba alternativa del teorema de descomposición armónica de polinomios homogéneos:

$$\mathcal{P}_m = \mathcal{H}_m + |x|^2 \mathcal{H}_{m-1} + \cdots + |x|^{2k} \mathcal{H}_{m-2k}, \quad (3.1)$$

con $k = \lfloor m/2 \rfloor$. El resultado de mayor relevancia para el propósito de este capítulo es el siguiente teorema, en el cual se brinda una forma explícita de la proyección canónica de un polinomio homogéneo de orden m sobre \mathcal{H}_m .

Teorema 3.1. Suponga $n > 2$ y $p \in \mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$. La proyección canónica $\Lambda_m(p)$ de p sobre $\mathcal{H}_m(\mathbb{R}^n)$ es

$$\Lambda_m(p) = c_m^{-1} K [p(\partial) |x|^{2-n}] \quad (3.2)$$

con

$$c_m = \prod_{k=0}^{m-1} (2 - n - 2k). \quad (3.3)$$

Ahora, para llegar a una expresión semejante a $p(\partial)(x_\mu x^\mu)^{-1}$, se escoge $n = 4$ en (3.2) (la dimensión de \mathbb{M}^4) y se aísla el término en paréntesis cuadrados mediante la propiedad involutiva de K , la *transformada de Kelvin* [17]:

$$p(\partial)(|x|^2)^{-1} = c_m K(\Lambda_m(p)) = c_m \Lambda_m(p) / |x|^{2(m+1)}.$$

La función anterior se trata precisamente de un multipolo armónico.

3.2. Multipolos armónicos

En esta sección probaremos que el Teorema 3.1 continua siendo verdadero tras sustituir simultáneamente $|x|^2$ por la forma cuadrática de Minkowski $x^\mu x_\mu$ y Δ por $\square := \partial_\mu \partial^\mu$. El término *función armónica* se reserva para denotar soluciones de la ecuación de Laplace. En cambio, se dirá de una función f que es *d'Alembertiana* si $\square f = 0$. Se llamará $\mathcal{H}(\mathbb{M}^4)$ al espacio de polinomios homogéneos d'Alembertianos de orden m sobre \mathbb{M}^4 . El conjunto de polinomios homogéneos de orden m sobre \mathbb{M}^4 se denotará \mathcal{P}_m . Por conveniencia se define que $\mathcal{P}_{-1} = \mathcal{P}_{-2} = \{0\}$.

Las pruebas de los resultados en esta sección se basan en tres identidades diferenciales, recopiladas en el siguiente teorema.

Teorema 3.2. (a) Sean u y v dos funciones reales, dos veces derivables y continuas en un abierto $\Omega \subset \mathbb{M}^4$. Entonces

$$\square (uv) = u\square v + 2\partial^\mu u \partial_\mu v + u\square v. \quad (3.4)$$

(b) Sea r un número real y x^μ un punto en \mathbb{M}^4 , fuera del cono de luz, entonces

$$\partial_\nu ((x_\mu x^\mu)^r) = 2r x_\nu (x_\mu x^\mu)^{r-1}, \quad (3.5a)$$

$$\square ((x_\mu x^\mu)^r) = 4r(r+1)(x_\mu x^\mu)^{r-1}. \quad (3.5b)$$

Resulta útil tener presente también la siguiente observación.

Teorema 3.3. La función $x \mapsto (x_\mu x^\mu)^{-1}$, definida fuera del cono de luz, es d'Alembertiana.

Ahora se estudiará el efecto de una derivada parcial general sobre $(x_\mu x^\mu)^{-1}$, las cuales se representarán mediante un multiíndice α , con $|\alpha| = m$. Para comenzar, considérense los tres primeros valores no triviales de m . De (3.5a) puede verse que:

$$\partial_\nu (x_\mu x^\mu)^{-1} = (x_\mu x^\mu)^{-2} (-2x_\nu),$$

$$\partial_\sigma \partial_\nu (x_\mu x^\mu)^{-1} = (x_\mu x^\mu)^{-3} [8x_\sigma x_\nu + x_\mu x^\mu (-2g_{\nu\sigma})],$$

$$\partial_\rho \partial_\sigma \partial_\nu (x_\mu x^\mu)^{-1} = (x_\mu x^\mu)^{-4} [-48x_\rho x_\sigma x_\nu + x_\mu x^\mu (-6g_{\nu\sigma} x_\rho + 8g_{\sigma\rho} x_\nu + 8g_{\nu\rho} x_\sigma)].$$

De estos primeros casos puede deducirse la estructura de una derivada parcial general $\partial_\alpha (x_\mu x^\mu)$.

Teorema 3.4. Si $|\alpha| = m$, entonces

$$\partial_\alpha (x_\mu x^\mu)^{-1} = (x_\mu x^\mu)^{-(m+1)} [c_m x^\alpha + (x_\mu x^\mu) q_\alpha], \quad (3.6)$$

donde q_α es algún elemento de \mathcal{P}_{m-2} y $c_m = (-2)^m m!$.

Demostración. La prueba se llevará a cabo mediante inducción sobre m . Claramente, el resultado es verdadero si $m = 0$. Asíumase como hipótesis inductiva que (3.6) es válida para algún α con $|\alpha| = m$. Cualquier derivada $\partial_{\alpha'}$ con $|\alpha'| = m+1$ puede escribirse como $\partial_\beta \partial_\alpha$, para algún β . Derivando a la derecha de (3.6) y reordenando se llega a:

$$\begin{aligned} \partial_\beta \partial_\alpha (x_\mu x^\mu)^{-1} &= (x_\mu x^\mu)^{-(m+2)} \{c_{m+1} x_\beta x^\alpha \\ &\quad + (x_\mu x^\mu) [-2(m+1)x_\beta q_\alpha + c_m \partial_\beta x^\alpha + (x_\mu x^\mu) \partial_\beta q_\alpha]\}. \end{aligned}$$

Para concluir la prueba, basta con notar que cada término dentro de los paréntesis cuadrados a la derecha de la igualdad son homogéneos de orden $m-1$. \square

Un aspecto crucial de esta identidad es que dicho polinomio es también d'Alembertiano. Es posible demostrar esto mediante el siguiente lema:

Lema 3.5. Si $p \in \mathcal{P}_m$, entonces

$$\square \left((x_\mu x^\mu)^{-(m+1)} p \right) = (x_\mu x^\mu)^{-(m+1)} \square p. \quad (3.7)$$

Demostración. Se calcula $\square \left((x_\mu x^\mu)^r p \right)$ mediante la identidad (3.4):

$$\square \left((x_\mu x^\mu)^r p \right) = (x_\mu x^\mu)^r \square p + 4r (x_\mu x^\mu)^{r-1} [x_\nu \partial^\nu p + (r+1)p].$$

Dado que $p \in \mathcal{P}_m$, $x_\nu \partial^\nu p = m$, con lo cual la expresión a la derecha se reduce a:

$$(x_\mu x^\mu)^r \square p + 4r(r+m+1)(x_\mu x^\mu)^{r-1} p.$$

Por último, se sustituye $r = -m - 1$ para llegar a la identidad (3.7). \square

Para concluir que el polinomio a la derecha de (3.6) es d'Alambertiano, basta con aplicar el operador \square a ambos lados de dicha ecuación. El Teorema 3.3 permite igual el lado izquierdo a 0; en el lado derecho, se hace uso de (3.7):

$$\square \partial_\alpha (x_\mu x^\mu)^{-1} = 0 = (x_\mu x^\mu)^{-(m+1)} \square [c_m x^\alpha + (x_\mu x^\mu) q_\alpha].$$

Considérese ahora una expresión de la forma $p(\partial)(x_\mu x^\mu)^{-1}$, $p \in \mathcal{P}_m$. Escribiendo p como $\sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$ se puede ver fácilmente que

$$p(\partial)(x_\mu x^\mu)^{-1} = (x_\mu x^\mu)^{-(m+1)} \left[c_m p + (x_\mu x^\mu) \sum_\alpha a_\alpha q_\alpha \right]. \quad (3.8)$$

Por linealidad, es evidente que la expresión en corchetes es d'Alembertiana. Se llega así al teorema principal de esta sección.

Teorema 3.6. Sea $p \in \mathcal{P}_m$ y defínase

$$\Lambda_m(p) = \frac{1}{c_m} (x_\mu x^\mu)^{(m+1)} p(\partial)(x_\mu x^\mu)^{-1}. \quad (3.9)$$

Entonces

- (a) $\Lambda_m(p) \in \mathcal{H}(\mathbb{M}^4)$,
- (b) $p = \Lambda_m(p) + (x_\mu x^\mu)q$, para algún $q \in \mathcal{P}_{m-2}$.

Para efectos de la renormalización de los propagadores, el inciso (a) es particularmente importante, pues implica la existencia de una regularización homogénea e invariante. Nótese que la estructura adoptada por los propagadores es análoga al multipolo armónico $p(\partial)(x_\mu x^\mu)^{-1}$:

$$p(\partial)(x_\mu x^\mu)^{-1} = c_m \frac{\Lambda_m(p)}{(x_\mu x^\mu)^{m+1}}, \quad (3.10)$$

el mismo tipo de estructura para la cual se garantiza en [6] que tal regularización existe y es única.

Del inciso (b) uno podría verse tentado a escribir $\mathcal{P}_m(\mathbb{M}^4) = \mathcal{H}_m(\mathbb{M}^4) \oplus_{x_\mu x^\mu} \mathcal{P}_{m-2}(\mathbb{M}^4)$, justo como ocurre en \mathbb{R}^4 . Sin embargo, la unicidad de la descomposición (b) en el Teorema 3.6 no es tan clara. Aún así, repetidas aplicaciones del teorema brindan una representación (quizás no única en forma) de $p \in \mathcal{P}_m$:

$$p = \Lambda_m(p) + x_\mu x^\mu p_m + (x_\mu x^\mu)^2 p_{m-2} + \cdots + (x_\mu x^\mu)^k p_{m-2k} \quad (3.11)$$

donde $k = \lfloor m/2 \rfloor$ (el entero más grande mayor o igual a $m/2$).

Se llega así al resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.7. *Sea $M^{FF}(p)$ el núcleo de la función de dos puntos de Wightman de la intensidad de campo de un bosón sin masa con helicidad h , el cual, como ya fue demostrado, es un polinomio homogéneo de grado $2h$. Sea también $D_0(x) = -\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (2\pi)^{-2} (x_\mu x^\mu - i0)^{-1}$ el propagador de Feynman escalar de masa 0, tal y como se definió en capítulos anteriores. El propagador no-regularizado de F está dado por*

$$M^{FF}(i\partial)D_0(x) = \frac{c_{2h}}{(2\pi)^2} \frac{\Lambda_{2h}(p)}{(x_\mu x^\mu - i0)^{2h+1}}. \quad (3.12)$$

El lado derecho de(3.12) es un análogo minkowskiano del potencial multipolar, definido por primera vez por Maxwell durante un estudio de las aproximaciones de la magnetostática. El polinomio en el numerador es también Minkowski armónico, por lo que al lado derecho de la ecuación se le denomina **multipolo armónico**.

Capítulo 4

Renormalización mejorada

4.1. Introducción

La presencia de divergencias ultravioleta fue reconocida por primera vez en el cálculo de Pauli y Heisenberg de la contribución de segundo orden a la autoenergía del electrón. Desde entonces, han plagado la teoría de cuántica de campos desde sus cimientos, conduciendo a preocupaciones que ponen en duda la consistencia de la teoría. Tales preocupaciones persisten a lo largo de las décadas de 1930 y 1940, hasta el desarrollo de la teoría de la renormalización covariante por parte de Schwinger, Feynman, Tomonaga y Dyson a fines de la década de 1940. Sin embargo, muchos consideraron que el procedimiento de substracción de infinitos era ad hoc y conceptualmente insatisfactorio. A finales de la década de 1960, la creación del grupo de renormalización de Wilson facilitó los medios necesarios para adoptar un enfoque más satisfactorio en términos conceptuales para la renormalización. Esto, a su vez, llevó a la predicción experimental del comportamiento de escala de la libertad asintótica. Además, también permitió interpretar las teorías cuánticas de campos como teorías de campos efectivas.

A pesar de estos logros teóricos y experimentales, en la literatura todavía se alberga la persistente sospecha de que la teoría cuántica perturbativa de campos no está suficientemente bien definida matemáticamente para servir como base para la investigación teórica del campo. La literatura cita abiertamente como culpables a la presencia de divergencias ultravioleta y la necesidad de renormalización. Desde el punto de vista filosófico, varios autores realistas contemporáneos [18, 19] han desarrollado una actitud diferente hacia la importancia de la renormalización para la investigación filosófica. Estos grupos sostienen que la teoría de campos efectivos alberga valiosas lecciones filosóficas acerca de cómo las teorías logran representar exitosamente el mundo. En su perspectiva, la renormalización no se enfoca primordialmente en eliminar las divergencias ultravioleta, sino en investigar

cómo cambia la estructura de la teoría conforme a la escala de energía. Para garantizar una adecuada correspondencia empírica, una formulación de la teoría cuántica de campos debe disponer de los recursos necesarios para recuperar este comportamiento de escala.

4.2. El origen de las divergencias ultravioleta

Las divergencias ultravioleta generalmente se diagnostican como resultado de la integración sobre momentos arbitrariamente grandes en bucles internos cerrados de gráficos de Feynman. Para tomar un ejemplo concreto, considere el primer gráfico de bucle que contribuye a la dispersión 2-2 en el modelo ϕ^4 . La contribución de este gráfico es:

$$\mathcal{A}(p_1, p_2, p_3, p_4) = \int_0^\infty \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 + m^2)} \frac{1}{((p_1 + p_2 - k)^2 + m^2)} \quad (4.1)$$

En el régimen de cantidad de movimiento grande donde $k \gg m, p_i$, esta expresión tiende a:

$$\mathcal{A}(p_1, p_2, p_3, p_4) \propto \int_0^\Lambda \frac{k^{d-1}}{k^4} dk = \int_0^\Lambda k^{d-5} dk \quad (4.2)$$

donde Λ es un regulador ultravioleta. Si $d < 4$, la integral converge como $\Lambda \rightarrow \infty$, si $d = 4$, la integral diverge como $\ln(\Lambda)$, y si $d > 4$ la integral diverge como potencias de Λ . Sea $D \equiv d - 4$ el grado superficial de divergencia. Al contar las potencias de los momentos en el numerador, el denominador y la medida de integración, esta cantidad se puede usar para determinar cuándo un gráfico de Feynman contiene una divergencia ultravioleta. En el espacio de Minkowski, donde $d = 4$, la ecuación es divergente en la ultravioleta.

El teorema de conteo de potencias de Weinberg [2], [10, Sec. 12.1] encapsula de manera más general el enfoque convencional para identificar las divergencias ultravioleta presentes en la teoría de campos perturbativos. Considere un gráfico de Feynman de bucle arbitrario con momentos externos p_1, p_2, \dots, p_E y momentos de bucle, k_1, k_2, \dots, k_L , en un espacio-tiempo de dimensión d . La contribución a la amplitud de dicho gráfico tiene la forma:

$$\mathcal{A}(p_1, \dots, p_E) = \int \frac{d^d k_1 \dots d^d k_L}{(2\pi)^{dL}} \frac{\mathcal{B}(p_1, \dots, p_E, k_1, \dots, k_L)}{\mathcal{C}(p_1, \dots, p_E, k_1, \dots, k_L)}$$

donde el numerador y el denominador son productos de los momentos y los propagadores. Weinberg pudo demostrar que las integrales son ultravioleta finitas si y solo si el grado de divergencia superficial correspondiente es negativo, no solo para el grafo original, sino también para todos sus subgrafos.

Este resultado resulta de gran utilidad al momento de determinar la necesidad de una nueva normalización. En el caso en que $D \geq 0$, se puede analizar el comportamiento de la teoría conforme $\Lambda \rightarrow \infty$, lo que permite establecer las redefiniciones de cargas y masas que vuelven finita a la teoría en el régimen ultravioleta. En teorías perturbativamente renormalizables, solo es necesario un número finito de redefiniciones, mismas que deben calibrarse con datos experimentales. Suponiendo que también se abordan adecuadamente las divergencias infrarrojas durante este proceso, el resultado de este procedimiento es una serie de potencias formales bien definida, cuyos primeros términos pueden ser comparados con los datos experimentales.

A partir del conteo de potencias en relación con la aparición de divergencias ultravioleta surgen ciertas incógnitas acerca de la interpretación del regulador ultravioleta. ¿Sugiere éste la existencia de una red espaciotemporal? ¿Refleja una ignorancia acerca de la física por encima de una determinada escala energética? ¿Se ha generado un daño irreversible a las simetrías espaciotemporales de la teoría? A raíz de tales interrogantes surge la iniciativa de buscar un formalismo alternativo que explique el surgimiento de las divergencias UV y su correcta interpretación en dicho marco teórico.

La explicación alternativa comienza señalando que las integrales de Feynman que se evalúan contienen multiplicaciones de *distribuciones* en el integrando. La operación de multiplicación de distribuciones no siempre está bien definida. Que se pueda definir o no es muy sensible a los soportes de las distribuciones. Recuerde que las distribuciones, ϕ , toman funciones de prueba, f , y devuelven números:

$$T_f : \phi \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx.$$

El espacio de las funciones de prueba de soporte compacto, $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, es el espacio $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. El espacio de distribuciones regulares, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, se define como:

$$\{ T : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C} \text{ lineal y continuo} \}.$$

Para estar en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, ϕ debe satisfacer

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) f(x) dx < \infty \quad \text{para todo } f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Esto es equivalente a exigir que

$$\int_{\Omega} |\phi(x)| dx < \infty$$

para todo abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, que es simplemente $\phi(x) \in L^1_{\Omega}(\mathbb{R}^n)$.

Esta condición muestra por qué la multiplicación puntual, $(f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$, no se traslada a las distribuciones regulares en general. Para que sea el caso de que $f \in L^1_\Omega$, f no debe tener ninguna singularidad que crezca más rápido que $1/x^n$, para $n \geq 1$. Sin embargo, si $f, g \in L^1_\Omega$, y ambos tienen singularidades superpuestas como $1/x^{n/2}$, $f \cdot g$ tiene una singularidad como $1/x^n$, y entonces $f \cdot g \notin L^1_\Omega$. En este caso, aunque f y g son distribuciones regulares, $f \cdot g$ no es una distribución regular. La moraleja es que uno no puede simplemente multiplicar distribuciones sin verificar cuidadosamente sus soportes y esperar obtener siempre resultados matemáticamente bien definidos. Si integra un producto de distribuciones que no está bien definido, produce una divergencia.

Las integrales de Feynman discutidas anteriormente surgen en la evaluación perturbativa de expresiones para la matriz S que tienen la forma:

$$\mathbb{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \int T(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) d^4x_1 \cdots d^4x_n.$$

Sin embargo, $\phi(x)$ es una función con valor de operador acotado en ningún lugar del espaciotiempo, por lo que $\phi(x)$ solo tiene un significado matemático en el sentido de las distribuciones. Además, la ordenación temporal se ejecuta mediante la multiplicación por la función discontinua de Heaviside. Por lo tanto, el lado derecho de la Ecuación contiene muchos productos de distribuciones, pero no hemos verificado que esta operación esté bien definida para $\phi(x)$. Resulta que no lo es y esto, se afirma, es la razón por la cual las divergencias ultravioleta están presentes en la teoría estándar del campo perturbativo. Esto podría parecer que hace inútil el proyecto de comprender el significado de la evaluación perturbativa, pero de hecho, identificar la fuente del problema es el primer paso en la dirección de una solución.

4.3. Teoría perturbativa causal

One must only adopt the following two rules. First, use well-defined quantities only, for example free fields. Second, make justified operations only in the calculations; in particular do not multiply certain distributions by discontinuous step functions. If one really follows these rules, then no infinity can appear and life is beautiful.

Günter Scharf, *Finite Quantum Electrodynamics*

La teoría de la perturbación causal es un enfoque axiomático de la teoría cuántica de campos que ha surgido del artículo seminal de Epstein y Glaser [20].

En la teoría cuántica de campos perturbativa, la cantidad que se evalúa es:

$$\mathbb{S} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^n}{n!} \int \mathbb{T}(\phi(x_1) \cdots \phi(x_n)) d^4x_1 \cdots d^4x_n$$

En la teoría de la perturbación causal se hacen algunas modificaciones a esta expresión:

$$\mathbb{S}' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-i^n}{n!} \int \mathbb{T}(T(x_1) \cdots T(x_n)) g(x_1) \cdots g(x_n) d^4x_1 \cdots d^4x_n.$$

En primer lugar, se señala explícitamente el carácter distributivo de los operadores de campo. En segundo lugar, los $g(x_1) \cdots g(x_n)$ son funciones de prueba que curan las divergencias infrarrojas de la teoría.

El objetivo de la teoría de la perturbación causal es producir una construcción orden por orden de la matriz \mathbb{S} donde cada término, S_n , es una distribución de valor de operador bien definida correspondiente a un operador lineal en un espacio de Hilbert separable. Lo que encuentras al producir esta construcción es que

$$S_n \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \{ T : \mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C} \text{ lineal y continuo } \},$$

donde

$$\mathcal{D}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = \{ f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) : 0 \notin \text{supp}(f) \}.$$

En otras palabras, la construcción resulta en distribuciones casi regulares, pero no del todo. Esto inmediatamente lleva a uno a preguntarse si un $T^0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ puede

extenderse de forma única a un $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$? Es decir, ¿podemos reconstruir distribuciones regulares de forma única? Para responder a esta pregunta, necesitamos una medida de la singularidad de una distribución en el origen.

4.4. Grado de escalamiento y conteo de potencias

El grado de escalamiento de $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ en $x = 0$ está dado por:

$$\text{sd}(T) := \inf\{\omega \in \mathbb{R} : \lambda^\omega T(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0} 0\}.$$

Se puede afirmar, hasta cierto punto, que los argumentos de conteo de potencia de la teoría de campos perturbativa estándar se basan en estimaciones de sd . Si $T^0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ es una distribución con $\text{sd}(T^0) < n$, hay una distribución única $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ con $\text{sd}(T) = \text{sd}(T^0)$ extendiendo T^0 . Cuando $\text{sd}(T^0) \geq n$, no hay extensión única. Sin embargo, hay una extensión única de tipo:

$$T^0 + \sum_{\alpha \leq \text{sd}(T^0)} C_\alpha \partial^\alpha \delta(x).$$

Esto implica que para obtener una extensión única, es necesario determinar un conjunto finito de números, los C_α . Estos son análogos a las correcciones de renormalización presentes en la teoría de campos perturbativa convencional.

Así, la teoría de la perturbación causal cubre todos los aspectos necesarios para tratar modelos que sean empíricamente adecuados, sin que aparezcan divergencias ultravioleta en la teoría.

4.5. Regularización de teorías sin masa

El enfoque de Bogoliubov, Epstein y Glaser para la teoría cuántica de campos causal perturbativa reduce la renormalización a un problema matemático bien definido y físicamente motivado: la extensión de distribuciones en el espacio de configuración originalmente solo definida para argumentos no coincidentes. El estudio de tales extensiones se vuelve así fundamental para la construcción de una teoría cuántica de campos finita.

En un contexto puramente matemático, Hörmander construye todas esas extensiones para distribuciones homogéneas. Aplicado a Teoría cuántica de campos, sus resultados permiten resolver el problema de renormalizar amplitudes primitivamente divergentes en el caso sin masa.

Para abordar el problema general de renormalizar teorías sin masa, sin embargo, es inevitable, si se sigue la estrategia de Nikolov [6] investigar una clase más amplia de distribuciones, llamadas homogéneas asociadas. En dicho trabajo, se traduce la formulación recursiva de Epstein–Glaser de productos ordenados en el tiempo de campos cuánticos locales a un problema de análisis funcional que se ajusta al marco general de Hörmander y llena el vacío mencionado anteriormente al considerar extensiones de distribuciones homogéneas asociadas.

En una teoría de campos cuánticos sin masa, las amplitudes de Feynman de dos puntos son distribuciones homogéneas $\tau^0(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)$ definidas fuera de la diagonal, esto es, para $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2$. Consideraremos aquí el caso del espacio de Minkowski \mathbb{M}^D , D -dimensional.¹

El espacio vectorial de todas las amplitudes de 2 puntos homogéneas no renormalizadas $\tau^0(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$, es generado linealmente por funciones básicas de la forma

$$\tau_{\alpha;m,\sigma}(\mathbf{x}) := (\mathbf{x}^2 + i0)^\alpha h_{m,\sigma}(\mathbf{x}), \quad \tau_{\alpha;m}^0 \in \mathcal{D}'(M \setminus \{0\}), \quad (4.3)$$

donde $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathbf{x}^2 = (x^0)^2 - \sum_{j=1}^{D-1} (x^j)^2$ y $\{h_{m,\sigma}(\mathbf{x})\}_\sigma$ es una base de polinomios homogéneos armónicos de grado m .

Notamos que para $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ la distribución $\tau_{\alpha;m}^0$ es homogéneo de grado $2\alpha + m$ en $M \setminus \{0\}$ y por tanto, por [21, Teo. 3.2.3] tiene una única extensión homogénea en M del mismo grado:

$$\tau_{\alpha;m} \in \mathcal{D}'(M), \quad \tau_{\alpha;m}|_{M \setminus \{0\}} = \tau_{\alpha;m}^0, \quad (\mathbf{x} \cdot \partial_{\mathbf{x}} - 2\alpha - m)\tau_{\alpha;m}(\mathbf{x}) = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}).$$

Proposición 4.1. *La familia de distribuciones de un parámetro $\tau_\alpha(\mathbf{x})$ para $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ y cualquier polinomio armónico homogéneo $h_m(\mathbf{x}) := h_{m,\sigma}(\mathbf{x})$ que forme parte de una base de dicho espacio, se extiende a una función meromorfa de α con polos simples en $\alpha = -\frac{D}{2} - m - n$, $n = 0, 1, \dots$. Su expansión de Laurent alrededor de los polos es*

$$\tau_{-\frac{D}{2}-m-n+\varepsilon;m}(\mathbf{x}) = K_{n,m} \square_{\mathbf{x}}^n h_m(\partial_{\mathbf{x}}) \delta(\mathbf{x}) \frac{1}{\varepsilon} + \tau_{-\frac{D}{2}-m-n;m}^{\text{ext}}(\mathbf{x}) + O(\varepsilon),$$

donde los coeficientes $K_{n,m}$ vienen dados por

$$K_{n,m} = -i \frac{(-1)^m \pi^{\frac{D}{2}}}{2^{2n+m} n! \Gamma(\frac{D}{2} + n + m)}.$$

Las distribuciones extendidas $\tau_{-\frac{D}{2}-n-m;m}^{\text{ext}}(\mathbf{x})$ ($n, m = 0, 1, \dots$) son homogéneas asociadas en todo el espacio de Minkowski M de grado $-2n + m - D$ y orden 1, tales que

$$(\mathbf{x} \cdot \partial - 2n - m)\tau_{-\frac{D}{2}-n-m;m}^{\text{ext}}(\mathbf{x}) = 2K_{n,m} \square_{\mathbf{x}}^n h_m(\partial_{\mathbf{x}}) \delta(\mathbf{x}).$$

¹Para $D = 2$, la cuadrática del cono de luz es factorizable y, por lo tanto, se reduce al caso $D = 1$, por lo que en este trabajo D está restringido a ser mayor que 1.

Así, la investigación llevada a cabo en [6] culmina con el siguiente corolario [6, Cor. 3,5].

Teorema 4.2. *Una amplitud de Feynman no renormalizada de dos puntos de la forma $h_m(\mathbf{x})/(\mathbf{x}^2 + i0)^s$ (para $\mathbf{x} \neq 0$) tiene una extensión homogénea si y solo si*

$$m =: \text{el grado de armonicidad} > \text{el grado de divergencia} := 2s - m - D.$$

Además, en este caso la extensión homogénea es única si se impone la covarianza de Lorentz.

El conteo de potencias es reemplazado así por un resultado más fuerte, una condición suficiente pero además necesaria para la existencia de una extensión. A su vez, la cantidad $S := 2(m - s) - D$ desplaza al grado de divergencia como cuantificador de la renormalizabilidad de una amplitud.

Respecto a la unicidad, la condición de renormalización NST es el requisito de que la extensión del propagador transforme bajo la **misma** representación irreducible del grupo de Lorentz que el campo, lo cual puede reformularse como el requisito de que el propagador se transforme bajo la misma representación irreducible del grupo de Lorentz que la función de dos puntos.

Para determinar la representación bajo la cual transforma el propagador, se puede hacer uso del operador de Casimir en la representación de polinomios homogéneos Minkowski armónicos [12]. Para evitar trabajar con potencias enteras de D_0 , las cuales no están bien definidas en el origen, se traslada el propagador al espacio de momento. Allí, los propagadores están dados por un único denominador $p^2 + i0$ multiplicado por un polinomio en p . Esta transición se puede realizar fácilmente, ya que el operador Casimir del grupo de Lorentz tiene la misma forma en momento y espacio de configuración. Sea $\tilde{H}_m(p)$ un polinomio homogéneo de grado $m \in \mathbb{N}$. Entonces,

$$\left[2p^2 \square_p - 4(p\partial_p) - 2(p\partial_p)^2\right] \frac{\tilde{H}_m(p)}{p^2 + i0} = -2m(m+2) \frac{\tilde{H}_m(p)}{p^2 + i0} + 2p^2 \frac{\square_p \tilde{H}_m(p)}{p^2 + i0}.$$

Por lo tanto, el único propagador covariante con el campo tiene un polinomio **Minkowski armónico** en el numerador.

4.6. El propagador de Stora

Sea M^{FF} el kernel de Wightman de una intensidad de campo F bosónica de masa 0 y helicidad h . Por el inciso (b) del Teorema 3.6,

$$M^{FF}(p) = \Lambda_{2h}(M^{FF})(p) + (x_\mu x^\mu) Q_{2h-2}(p),$$

donde $\Lambda_{2h}(M^{FF})(p) =: P^F$ es la proyección de M^{FF} en \mathcal{H}_{2h} y Q_{2h-2} es un polinomio homogéneo de orden $2h - 2$. $(x_\mu x^\mu)Q_{2h-2}$ es entonces la "parte anarmónica" de M^{FF} .

Sustituyendo en (3.12), se obtiene

$$M^{FF}(i\partial)D_0(x) = \Lambda_{2h}(M^{FF})(i\partial)D_0(x) + Q_{2h-2}(i\partial)\delta(x). \quad (4.4)$$

Dado que M^{FF} no es armónico, el propagador cinemático evidentemente no es covariante. La parte inarmónica del núcleo, una vez aplicada sobre D_0 , produce un término singular, dado por una suma de derivadas de la delta de Dirac,

$$Q_{2h-2}(i\partial)\delta(x).$$

Al remover la contribución de la parte inarmónica se obtiene la (única) distribución homogénea y covariante propuesta por Stora. De este modo, bajo la prescripción NST, el verdadero propagador de F está dado por

$$\langle\langle T F(x)F(0) \rangle\rangle = \Lambda_{2h}M^{FF}(i\partial)D_0(x). \quad (4.5)$$

Como el proyector Λ_{2h} es idempotente, es claro que el propagador de Stora es idéntico al propagador cinemático fuera de la diagonal.

4.7. Extensión a teorías de campos masivas

Los métodos descritos anteriormente parecieran tener una aplicabilidad limitada cuando se trata de renormalizar teorías masivas, debido a que las funciones de dos puntos que comúnmente emergen en estas no suelen ser homogéneas. Desarrollos posteriores muestran que esta limitación es solo aparente. Citando a Todorov [22]:

There is a parallel between studying renormalization of a massless QFT and neglecting friction by the founders of modern physics – starting with Galileo. Both idealizations allow to grasp the essence of the problem. Introducing friction in classical mechanics, and masses in the analysis of small distance behavior seems to be just adding technical details to the general picture.

Una posible estrategia consiste en seguir la propuesta de Nikolov basada en un espacio de posición extendido de dimensión $D + K$, donde los vectores minkowskianos x y p son remplazados por (x, κ) y (p, μ) , con κ y μ vectores euclidianos de dimensión K . Dado que no existe restricción alguna en la dimensión de los espacios de posición y momento de los

propagadores homogéneos, basta con escoger $\mu^2 = m^2$ para recuperar al propagador masivo de un espacio de dimensión D . La técnica puede extenderse a los multipolos minkowskianos que conforman la base del espacio de propagadores homogéneos.

La expansión de masa y escala (expansión s - m) de Dütsch ofrece otra alternativa. La misma consiste en un nuevo axioma para la teoría de la perturbación causal, que es una versión más fuerte de una condición de renormalización de uso frecuente en términos del grado de escala de Steinmann. En [23] se muestra que el postulado básico de la renormalización de Epstein–Glaser, a saber, que las amplitudes renormalizadas escalan como las no renormalizadas, hasta las correcciones logarítmicas, puede reforzarse, en el sentido de que estas correcciones, aunque necesariamente introduzcan una nueva escala masiva – no cambie la dependencia de m en la expansión:

$$D^F(x) = D_0^F(x) + m^2 [f_1(m^2 x^2) \log(-m^2(x^2 - i0)) + f_2(m^2 x^2)], \quad (4.6)$$

donde f_1, f_2 son funciones *analíticas*.

El argumento propuesto en [5] es el siguiente. Por tratarse esencialmente de derivadas de $D^F(x)$, las funciones de dos puntos de espines mayores poseen una expansión análoga, donde el término independiente de m es precisamente la función de dos puntos de masa cero. Así, en virtud del axioma introducido por Dütsch es claro que debe reemplazarse esta por su regularización para llegar al propagador masivo.

De paso, se muestra cómo llegar a la expansión de arriba. Una expresión exacta para el propagador causal masivo D^F es

$$D^F(x) = \frac{m}{4\pi^2} \frac{K_1(m\sqrt{-(x^2 - i0)})}{\sqrt{-(x^2 - i0)}} = \frac{-im}{4\pi^2} \frac{K_1(m\sqrt{-(x^2 - i0)})}{\sqrt{x^2 - i0}},$$

siendo el eje real negativo la línea de corte. Sustituyendo el desarrollo en series de K_1 ,

$$K_1(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z^2/4)^k}{k!(k+1)!} \left[\frac{z}{2} \log \frac{z}{2} - \frac{z}{4} (\psi(k+1) + \psi(k+2)) \right],$$

se ve que el primer sumando da $i(x^2 - i0)/4\pi^2 = D_0^F(x)$, y el resto está claro. Sigue que la prescripción del valor principal es suficiente para la buena definición de $D^F(x)$.

4.8. Ejemplo: $s = 3$

El núcleo de la función de Wightman para $h = 3$ es el producto interno en $\mathfrak{h}^{(s)}$ dado por

$$\begin{aligned} & \langle v_{\mu_1 \nu_1 \mu_2 \nu_2 \mu_3 \nu_3}^{s,F}(p) \mid v_{\alpha_1 \beta_1 \alpha_2 \beta_2 \alpha_3 \beta_3}^{s,F}(p) \rangle \\ & := \langle E v_{\mu_1 \nu_1}^F(p) \otimes v_{\mu_2 \nu_2}^F(p) \otimes v_{\mu_3 \nu_3}^F(p) \mid E v_{\alpha_1 \beta_1}^F(p) \otimes v_{\alpha_2 \beta_2}^F(p) \otimes v_{\alpha_3 \beta_3}^F(p) \rangle. \end{aligned}$$

En virtud de la ecuación (2.35), esto es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{36} \sum_{\pi, \sigma \in \mathcal{S}_3} \langle v_{\mu_{\pi(1)} \nu_{\pi(1)}}^F \mid v_{\mu_{\sigma(1)} \nu_{\sigma(1)}}^F \rangle \langle v_{\mu_{\pi(2)} \nu_{\pi(2)}}^F \mid v_{\mu_{\sigma(2)} \nu_{\sigma(2)}}^F \rangle \langle v_{\mu_{\pi(3)} \nu_{\pi(3)}}^F \mid v_{\mu_{\sigma(3)} \nu_{\sigma(3)}}^F \rangle \\ & + \langle v_{\mu_{\pi(1)} \nu_{\pi(1)}}^F \mid \overline{v_{\mu_{\pi(2)} \nu_{\pi(2)}}^F} \rangle \langle \overline{v_{\mu_{\sigma(1)} \nu_{\sigma(1)}}^F} \mid v_{\mu_{\sigma(2)} \nu_{\sigma(2)}}^F \rangle \langle v_{\mu_{\pi(3)} \nu_{\pi(3)}}^F \mid v_{\mu_{\sigma(3)} \nu_{\sigma(3)}}^F \rangle. \end{aligned}$$

Dado que los entrelazadores de la intensidad de campo F son puramente imaginarios, ver fórmula (2.33), lo anterior es igual a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{36} \sum_{\pi, \sigma \in \mathcal{S}_3} \left[M_{\mu_{\pi(1)} \nu_{\pi(1)}, \mu_{\sigma(1)} \nu_{\sigma(1)}}^{FF} M_{\mu_{\pi(2)} \nu_{\pi(2)}, \mu_{\sigma(2)} \nu_{\sigma(2)}}^{FF} M_{\mu_{\pi(3)} \nu_{\pi(3)}, \mu_{\sigma(3)} \nu_{\sigma(3)}}^{FF} \right. \\ & \left. + M_{\mu_{\pi(1)} \nu_{\pi(1)}, \mu_{\pi(2)} \nu_{\pi(2)}}^{FF} M_{\mu_{\sigma(1)} \nu_{\sigma(1)}, \mu_{\sigma(2)} \nu_{\sigma(2)}}^{FF} M_{\mu_{\pi(3)} \nu_{\pi(3)}, \mu_{\sigma(3)} \nu_{\sigma(3)}}^{FF} \right]. \end{aligned}$$

Puede verse con claridad que la función de dos puntos en la capa másica consta de 72 términos que son productos de tres polinomios homogéneos de orden 2. Se concluye que el núcleo de la función de Wightman es un **polinomio homogéneo de orden 6**. Llámese P a dicho polinomio. En virtud de (3.6), el propagador causal es un cierto multipolo minkowskiano fuera de la diagonal. En concreto, el propagador exhibe la siguiente estructura

$$\frac{\Lambda_6(P)(x)}{(x_\mu x^\mu - i0)^7}.$$

El conteo de potencias no arroja resultados concluyentes; calculamos el grado de divergencia $D = 2(3 - 1) = 4 = 3 + 1$, como es de esperar para un campo de este tipo. Si en cambio se considera ahora el indicador definido en (4.2),

$$S = 6 - 4 = 2.$$

Se concluye así que el caso de *helicidad* 3 sigue el mismo patrón que sus antecesores. El propagador es regularizable y la única regularización homogénea covariante se obtiene a partir de la proyección armónica de su función de dos puntos en la capa másica.

Por último, los argumentos planteados en la sección anterior nos permiten concluir que el propagador de *espín* 3 es regularizable.

Capítulo 5

Valor Principal de Cauchy como regularización de los multipolos armónicos

“Arrakis teaches the attitude of the knife – chopping off what’s incomplete and saying: ‘Now, it’s complete because it’s ended here’.
– from “Collected Sayings of Maud’Dib”
by the Princess Irulan”

Frank Herbert, *Dune*

En este capítulo nos basamos en un teorema, descubierto por primera vez en el 2017 por el matemático costarricense Ricardo Estrada [7]. En este, se da una condición necesaria y suficiente para la existencia del valor principal de Cauchy de un multipolo (euclidiano). Dicha extensión al origen cuenta las virtudes buscadas en una regularización de amplitudes de probabilidad en teoría cuántica de campos: preserva la homogeneidad de la distribución sin introducir nuevas escalas mediante constantes arbitrarias.

En esta parte nos apartamos del formalismo de Hörmander de regularizaciones homogéneas, en el cual se basan los criterios de renormalización mejorada en [6] y se propone en su lugar una regularización basada en análogos minkowskianos del teorema de Estrada.

5.1. Valor principal de multipolos euclidianos

El *valor principal de Cauchy* es un tipo de límite utilizado para asignar un valor significativo a integrales impropias que estrictamente divergen. Para singularidades aisladas

el protocolo consiste en aproximarse a la singularidad isotrópicamente. En espacios de dimensión 1, se tiene lo siguiente.

Definición 5.1. Sea U una parte abierta de \mathbb{R}^n . Sea $f: U \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ una función no acotada e integrable en $U \setminus \mathcal{B}(x_0; \varepsilon)$ para todo $\varepsilon > 0$. El *valor principal* de $\int_U f$ se define como

$$\text{pv} \int_U f(x) dx := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_U f(x) \theta(|x - x_0| - \varepsilon) dx \quad (5.1)$$

siempre y cuando el límite exista. Si es el caso, decimos que la integral *converge en valor principal*. \diamond

En \mathbb{R}^n , se integra sobre la región que excluye a la bola de radio ε al rededor de la singularidad y se deja ε tender a 0. Como este tipo de integración converge incluso para funciones que no son localmente integrables, se utiliza como una forma de *regularización*.

Definición 5.2. Sea U una parte abierta de \mathbb{R}^n . Sea f una función localmente integrable en $U \setminus \{x_0\}$, $x_0 \in U$. Una *regularización* F de f es una distribución que satisface:

$$\langle F(x), \phi(x) \rangle = \int_U f(x) \phi(x) dx \quad (5.2)$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}(U)$ para la cual la integral converge. \diamond

Definición 5.3. Sea f una función localmente integrable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. La distribución $\text{pv}(f)$ está dada por:

$$\langle \text{pv}(f(x)), \varphi(x) \rangle := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int f(x) \theta(|x| - \varepsilon) \varphi(x) d^n x. \quad (5.3)$$

\diamond

Para f homogénea de grado $d \in \mathbb{R}$, la expresión anterior puede reducirse a la acción de una distribución en una dimensión: sea $x = r\omega$, $r = \sqrt{x \cdot x}$ y $\omega = x/r \in \mathbb{S}^{n-1}$. Entonces:

$$\langle \text{pv}(f(x)), \varphi(x) \rangle = \int_0^\infty r^{d+n-1} \Phi(r) dr \quad (5.4a)$$

donde

$$\Phi(r) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\omega) \varphi(r\omega) d\omega. \quad (5.4b)$$

Esta función Φ es suave y de soporte compacto en (ε, ∞) . La integral impropia en (5.4a) es de segunda especie. La función radial $r \mapsto r^{d+n-1}$ posee una singularidad algebraica en $r = 0$ si $d \leq -n$. Supongamos que es el caso y hagamos $d = -n - N$ con $N \in \mathbb{N}$. La integral

(5.4a) será convergente si y solo si los primeros $N + 1$ coeficientes de Taylor de $\Phi(r)$ se anulan en $r = 0$.

Expandamos ϕ usando el teorema de Taylor:

$$\phi(x) = \sum_{|\alpha|=0}^N \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!} x^\alpha + \sum_{|\alpha|=N+1} h_\alpha(x) x^\alpha.$$

La primera suma puede escribirse como $\sum_{j=0}^N Q_j(x)$ donde Q_j es un polinomio homogéneo de grado j . Entonces

$$\Phi(r) = \sum_{j=0}^N r^j \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\omega) Q_j(\omega) d\omega + r^{N+1} \sum_{|\alpha|=N+1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_\alpha(r\omega) \omega^\alpha d\omega.$$

Sea $H_N(r) := \sum_{|\alpha|=N+1} \int_{\mathbb{S}^{n-1}} h_\alpha(r\omega) \omega^\alpha d\omega$. Es claro que $\lim_{r \downarrow 0} H_N(r) = 0$. Por la unicidad del polinomio de Taylor $T_N[\Phi(r)]$ concluimos:

$$T_N[\Phi(r)] = \sum_{j=0}^N r^j \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\omega) Q_j(\omega) d\omega.$$

Vemos así que la existencia de la extensión F equivale a la anulación de las cantidades:

$$(f, Q_j) := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} f(\omega) Q_j(\omega) d\omega \quad \text{para } j = 0, 1, \dots, N. \quad (5.5)$$

Regularización del potencial multipolar

El criterio anterior se simplifica considerablemente cuando $f(x) = q_k(x)|x|^{-2k-n+2}$, con cada $q_k \in \mathcal{P}_k$. Siendo este el caso, $d = -k - n + 2$ y $N = k - 2$. Además,

$$(f, Q_j) = (q_k, Q_j) = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} q_k(\omega) Q_j(\omega) d\omega.$$

La anulación de estos productos para $j = 0, \dots, k - 1$ es equivalente a la condición $q_k \in \mathcal{H}_k$ (ver [7, Lema 4.2]), por lo que existencia de la extensión F está determinada por completo por esta circunstancia.

En síntesis, la regularización F existe para el multipolo euclidiano si y solo si el polinomio homogéneo en el denominador es además armónico.

5.2. Valor principal de multipolos en \mathbb{M}^4

Definición 5.4. Denotamos por \mathbb{V} al conjunto $\{x \in \mathbb{M}^4 : (x^0)^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} > 0\}$. Sea $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{M}^4 \setminus \partial\mathbb{V})$. La extensión al cono de luz propuesta para f es la distribución $F \in \mathcal{D}'(\mathbb{M}^4)$ dada por

$$\langle F(x), \varphi(x) \rangle := \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Sigma^c(\varepsilon)} f(x) \varphi(x) d^4x \quad (5.6)$$

donde $\Sigma(\varepsilon) := \{x \in \mathbb{M}^4 : \sqrt{|x^\mu x_\mu|} < \varepsilon\}$. \diamond

Esta regularización imita al valor principal de Cauchy para un solo punto singular en el sentido de que se aproxima a la singularidad isotrópicamente.

5.3. Una condición para la existencia del valor principal

Parametrización hiperbólica del espaciotiempo

Primero trataremos de reducir la dimensión del problema mediante un sistema de coordenadas análogo a las coordenadas esféricas. Se tratará de hecho de *tres* sistemas de coordenadas, definidos sobre regiones disjuntas del espacio-tiempo, menos el cono de luz. El lado derecho de (5.6), antes de tomar el límite, puede escribirse como

$$\int_{\Sigma^c(\varepsilon) \cap \mathbb{V}^\uparrow} f(x) \varphi(x) d^4x + \int_{\Sigma^c(\varepsilon) \cap \mathbb{V}^\downarrow} f(x) \varphi(x) d^4x + \int_{\Sigma^c(\varepsilon) \setminus \overline{\mathbb{V}}} f(x) \varphi(x) d^4x. \quad (5.7)$$

donde la flecha arriba (abajo) significa que se contemplan solo valores positivos (negativos) de x^0 . Sea $s := \sqrt{|x^\mu x_\mu|}$ y sea $v := x/s$.

$$\int_\varepsilon^\infty s^3 \left[\int_{\mathbb{H}_+^\uparrow} f(sv) \varphi(sv) d\sigma(v; \mathbb{H}_+) + \int_{\mathbb{H}_+^\downarrow} f(sv) \varphi(sv) d\sigma(v; \mathbb{H}_+) + \int_{\mathbb{H}_-} f(sv) \varphi(sv) d\sigma(v; \mathbb{H}_-) \right] ds. \quad (5.8)$$

Distribuciones homogéneas

Nos especializamos ahora en distribuciones f homogéneas, con algún grado de homogeneidad $d \in \mathbb{R}$. La igualdad (5.6) toma la forma especial:

$$\langle F(x), \varphi(x) \rangle = \int_0^\infty s^{d+3} \Phi(s) ds \quad (5.9)$$

donde

$$\begin{aligned} \Phi(s) := & \int_{\mathbb{H}_+^\uparrow} f(v) \varphi(sv) d\sigma(v; \mathbb{H}_+) + \int_{\mathbb{H}_+^\downarrow} f(v) \varphi(sv) d\sigma(v; \mathbb{H}_+) \\ & + \int_{\mathbb{H}_-} f(v) \varphi(sv) d\sigma(v; \mathbb{H}_-). \end{aligned}$$

Entonces, es claro de (5.8) que la acción de F sobre la función de prueba φ es igual a la acción de la distribución $\phi \mapsto \langle s^{d+3}\theta(s), \phi(s) \rangle$ sobre la función de prueba $\Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Para que la distribución sea singular en el cono de luz se debe tener $d \leq -1$. Especialicémosnos aun más estudiando el caso $d = -N - 4$, para algún $N \in \mathbb{N}$. El valor principal de tal distribución homogénea existirá si y solo si los primeros $N + 1$ coeficientes de Taylor alrededor de $s = 0$ se anulan. Al expandir φ alrededor de $x = 0$ como

$$\varphi(x) = \sum_{|\alpha|=0}^N \frac{\partial^\alpha \phi(0)}{\alpha!} x^\alpha + \sum_{|\alpha|=N+1} h_\alpha(x) x^\alpha = \sum_{j=0}^N Q_j(x) + \sum_{|\alpha|=N+1} h_\alpha(x) x^\alpha \quad (5.10)$$

se vuelve claro que

$$T_N[\Phi](s) = \sum_{j=0}^N s^j \int_{\mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_-} f Q_j.$$

Para que el valor principal exista es necesario y suficiente que $\int_{\mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_-} f Q = 0$. Si esto se cumple o no dependerá por supuesto de la distribución homogénea f escogida.

El valor principal de un multipolo euclidiano $x \mapsto p_k(x)/|x|^{2(k+1)}$ on $p_k \in \mathcal{H}_k(\mathbb{R}^4)$ siempre existe porque $N = k - 2$ en dado caso. Entonces, los polinomios homogéneos Q_j son siempre de orden menor al de p_k , garantizando

$$\int_{\mathbb{S}^3} p_k(\omega) Q_j(\omega) d\sigma(\omega) = 0.$$

En el capítulo 3 se probó que los propagadores tienen la forma

$$P_s(x) = \frac{p_{2s}(x)}{(x^2)^{2s+1}}$$

con $p_{2s} \in \mathcal{H}(\mathbb{M}^4)$. Podemos ver además que

$$\int_{\mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_-} P Q_j = \int_{\mathbb{H}_+} p_{2s}(v) Q_j(v) d\sigma(v; \mathbb{H}_+) - \int_{\mathbb{H}_-} p_{2s}(v) Q_j(v) d\sigma(v; \mathbb{H}_-). \quad (5.11)$$

El polinomio homogéneo Q_j escribirse como

$$Q_j(x) = \sum_{n=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} (x^2)^n q_{j-2n}(x), \quad \text{con } q \in \mathcal{H}(\mathbb{M}^4). \quad (5.12)$$

Insertando esto en la fórmula para los coeficientes obtenemos

$$\int_{\mathbb{H}_+ \cup \mathbb{H}_-} PQ_j = \sum_{n=0}^{\lfloor j/2 \rfloor} \left(\int_{\mathbb{H}_+} p_{2s}(\nu) q_{j-2n}(\nu) d\sigma(\nu; \mathbb{H}_+) \right. \\ \left. + (-1)^{n+1} \int_{\mathbb{H}_-} p_{2s}(\nu) q_{2s-2n}(\nu) d\sigma(\nu; \mathbb{H}_-) \right).$$

5.4. Un contraejemplo

Para helicidad 1 hallamos que las componentes de los propagadores están dadas por multipolos armónicos de la forma

$$\frac{h_{\mu\nu,\rho\sigma}(x)}{(x^2)^3}.$$

El caso $s = 1$ nos da $N = 0$ y por la tanto la existencia de la regularización propuesta para los propagadores bosónicos tipo F existe si y solo si

$$\int_{\mathbb{H}_+} p_2(\nu) d\sigma(\nu; \mathbb{H}_+) - \int_{\mathbb{H}_-} p_{2s}(\nu) d\sigma(\nu; \mathbb{H}_-) = 0, \quad (5.13)$$

lo cual es falso: ninguna de las integrales arriba converge, para el caso $\mu = \rho = 1, \nu = \sigma = 0$. Para ver esto, escríbanse las las integrales en (5.13) explícitamente, integrando hasta un valor finito a en la coordenada hiperbólica, el cual se deja luego tender a infinito. Se obtiene que la primer integral es igual a:

$$2 \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (-1 + 2(\cosh^2 u - (\sinh u \sin \theta \cos \phi)^2)) \sinh^2 u \sin \theta du d\theta d\phi \\ = \frac{16\pi}{3} \sinh^3 a \cosh a,$$

y la segunda a

$$\int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (1 + 2(\sinh^2 u - (\cosh u \sin \theta \cos \phi)^2)) \cosh^2 u \sin \theta du d\theta d\phi \\ = \frac{8\pi}{3} \cosh^3 a \sinh a,$$

por lo que la expresión (5.13) de hecho diverge, negando la existencia de la regularización mediante (5.6).

Capítulo 6

Conclusiones

Siguiendo un hilo de pensamiento análogo al de Axler [17], fue posible llegar a conclusiones análogas para el escenario minkowskiano, llegando finalmente a una prueba de la estructura multipolar armónica de derivadas homogéneas de $(x^\mu x_\mu)^{-1}$.

En virtud tanto de la definición del propagador cinemático como de la propiedad de homogeneidad de las funciones de dos puntos en la capa másica de las intensidades de campo, se concluye sin más preámbulos que los propagadores de las intensidades de campo de espín superior comparten esta misma estructura con sus predecesores.

El método de Bogoliubov, Epstein y Glaser para la teoría del campo cuántico causal perturbativo de extender distribuciones en el espacio de configuración, que originalmente sólo se definen para argumentos no coincidentes, se erige como una interpretación consistente, no estrictamente perturbativa, de las divergencias UV. La resolución de este problema de extensión de distribuciones se convierte en un aspecto clave para construir una teoría cuántica de campos finita. En este sentido, Hörmander ha construido todas estas extensiones para distribuciones homogéneas en un contexto puramente matemático. Al aplicar estos resultados a la teoría cuántica de campos, se puede resolver el problema de la renormalización de las amplitudes sin masa, invocando en última instancia el concepto de distribuciones homogéneas asociadas.

Junto con la prescripción de covarianza, el resultado preliminar antes mencionado sobre la estructura de los propagadores asegura su extensión homogénea e inequívoca al origen del espaciotiempo minkowskiano. El problema de la ambigüedad no se ve afectado hasta que se introducen más prescripciones de renormalización. En este sentido, la noción de amplitudes divergentes de Stora y el principio de covarianza que subyace en ella no son más que una de esas prescripciones, introducida en última instancia para hacer frente a los grados de libertad excesivos.

Imponer que las simetrías de los campos deben transferirse a los propagadores pro-

porciona un número insuficiente de restricciones para eliminar la ambigüedad. Imponer covarianza introduce suficientes restricciones adicionales para deshacerse de los grados de libertad restantes, sin destruir la homogeneidad ni tener que introducir nuevas escalas con la regularización.

En el Capítulo 2, se afirmó que el polinomio armónico en el numerador del propagador no regularizado es la proyección de la función de dos puntos en la capa másica, un polinomio homogéneo de grado $2j$, en el subespacio de polinomios armónicos. El propagador de Stora difiere del propagador cinemático solamente en que se ha eliminado el término anarmónico en la derivada distribucional homogénea del propagador escalar, por lo que la estructura multipolar permanece intacta.

Respecto al valor principal de Cauchy como una posible regularización de los multipolos armónicos, aun es necesario estudiar posibles definiciones alternativas de la regularización que preserven la estructura del valor principal, y que además produzcan integrales convergentes.

Bibliografía

- [1] N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields*, 3^a edición, Wiley, New York, 1980.
- [2] S. Weinberg, “High-energy behaviour in quantum field theory”, *Phys. Rev.* **118** (1960), 838–849.
- [3] W. Zimmermann, “The power counting theorem for Minkowski metric”, *Commun. Math. Phys.* **11** (1968), 1–8.
- [4] J. Mund y E. T. de Oliveira, “String-localized free vector and tensor potentials for massive particles with any spin: I. Bosons”, *Commun. Math. Phys.* **355** (2017), 1243–1282.
- [5] J. C. Várilly y J. M. Gracia-Bondía, “Stora’s fine notion of divergent amplitudes”, *Nucl. Phys. B* **912** (2016), 28–37.
- [6] N. M. Nikolov, R. Stora y I. Todorov, “Renormalization of massless Feynman amplitudes in configuration space”, *Rev. Math. Phys.* **26** (2014), 1430002.
- [7] R. Estrada, “Regularization and derivatives of multipole potentials”, *J. Math. Anal. Appl.* **446** (2017), 770–785.
- [8] J. Schwinger, “On the Euclidean structure of relativistic field theory”, *Proc. Natl. Acad. Sci.* **44** (1958), 956–965.
- [9] S. Weinberg, “Feynman rules for any spin”, *Phys. Rev.* **133** (1963), B1319–B1332.
- [10] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [11] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1995.

- [12] Ch. Gaß, “Constructive aspects of string-localized quantum field theory”, tesis doctoral, Georg-August-Universität Göttingen, 2022.
- [13] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, San Diego, 1975.
- [14] A. Proca, “Sur les équations fondamentales des particules élémentaires”, C. R. Acad. Sci. Paris **202** (1936), 1490–1492.
- [15] G. Grensing, “Symmetric and traceless tensors on Minkowski space”, Rep. Math. Phys. **14** (1978), 19–26.
- [16] I. M. Gel’fand, R. A. Minlos y Z. Ya. Shapiro, *Representations of the Rotation and Lorentz Groups and Their Applications*, Pergamon Press, London, 1963.
- [17] S. Axler, P. Bourdon y W. Ramey, *Harmonic Function Theory*, Springer, New York, 2001.
- [18] D. Wallace, “Taking particle physics seriously: A critique of the algebraic approach to quantum field theory”, Studies Hist. Philos. Sci. B **42** (2011), 116–125.
- [19] P. Williams, “Philosophy of science made effective: realism, reduction, and the renormalization group in quantum field theory”, Ph. D. thesis, Columbia University, 2016.
- [20] H. Epstein and V. J. Glaser, “The role of locality in perturbation theory”, Ann. Inst. Henri Poincaré A **19** (1973), 211–295.
- [21] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer, New York, 1983.
- [22] I. Todorov, Relativistic causality and position space renormalization, Nucl. Phys. B **912** (2016), 79–87.
- [23] M. Dütsch, “The scaling and mass expansion”, Ann. Henri Poincaré **16** (2015), 163–188.