

Análisis de estabilidad de un sistema no lineal con controladores PD inmune

Stability analysis of a nonlinear system with PD immune controllers

Raúl Brenes Astorga
Estudiante, escuela de ingeniería eléctrica
Universidad de Costa Rica
jose.brenesastorga@ucr.ac.cr

Mercedes Chacón Vásquez
Profesora, escuela de ingeniería eléctrica
Universidad de Costa Rica
mercedes.chaconvasquez@ucr.ac.cr

Palabras clave: *Control inmune, control no lineal, control PD, criterio de Popov, criterio del círculo, estabilidad absoluta*

I. INTRODUCCIÓN

El algoritmo inmune ha sido utilizado en años recientes como una manera de mejorar de manera significativa el control de procesos al combinarse con controladores de tipo PID presentando una buena adaptabilidad, rechazo de perturbaciones y que al combinarse con diversas técnicas de optimización enfocadas en reducir criterios de error como el ITAE, entre otros; muestran resultados muy positivos en términos de desempeño, ejemplos de esto son [1],[2],[3],[4],[5]. El concepto detrás de su funcionamiento se deriva del proceso biológico en el que, el cuerpo elimina amenazas externas por medio del proceso de eliminación de antígenos.[3].

El algoritmo inmune se representa como:

$$u(t) = K [1 - \eta f(\dot{u}(t))] e(t) \quad (1)$$

Donde K y η son constantes positivas, $e(t)$ es la señal de error, $u(t)$ es la señal de control y f es una función no lineal. Una de las formas más comunes de implementar el algoritmo es por medio de una función hiperbólica de criterio

$$f(x) = 1 - \frac{1}{\cosh(ax)} = 1 - \frac{2}{e^{ax} + e^{-ax}}, \text{ con } a > 0 \quad (2)$$

Este trabajo presenta el análisis y deducción de las condiciones que garantizan la estabilidad de un sistema de primer orden implementando un controlador PD en conexión con una no linealidad sectorial general usando el **criterio del círculo** y el **criterio de Popov**, para luego aplicar las deducciones a las no linealidades propuestas y así mostrar su estabilidad de manera inmediata ya que representan casos particulares; probando la estabilidad del algoritmo inmune implementado en una conexión propia de un sistema de Lur'e y otras dos variantes de este método.

II. ANÁLISIS Y DEDUCCIÓN DE LAS CONDICIONES DE ESTABILIDAD

A continuación se muestra el análisis de estabilidad para un sistema descrito por el siguiente modelo en espacio de estados

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad y = Cx + Du, \quad u = -\psi(t, y) \quad (3)$$

Definición 1. [6] (*Condición de sector*): Sea $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.

Se dice que ψ pertenece al sector $[\alpha, \beta]$ con $\beta > \alpha$, denotado como $\psi \in [\alpha, \beta]$; si se satisface que $\psi(0) = 0$ y además:

$$\forall (u \neq 0) \left(\alpha \leq \frac{\psi(u)}{u} \leq \beta \right) \quad (4)$$

Teorema 1. [6] *Criterio de Popov (Caso escalar)*: Si para $\psi \in [0, k]$, $G(s)$ es Hurwitz y existe $\gamma \geq 0$ tal que

$$\forall (\omega \geq 0) \left(\frac{1}{k} + \Re\{G(j\omega)\} - \gamma\omega\Im\{G(j\omega)\} > 0 \right) \quad (5)$$

Entonces el sistema (3) es globalmente, asintóticamente estable.

Teorema 2. [6] *Criterio del Círculo (Caso escalar)*: El sistema (3) es globalmente, asintóticamente para una no linealidad $\psi \in [\alpha, \beta]$, con $\alpha < 0 < \beta$, si $G(s)$ es Hurwitz y además:

$$\forall (\omega \geq 0) \left(\Re \left\{ \frac{\frac{1}{\beta} + G(j\omega)}{\frac{1}{\alpha} + G(j\omega)} \right\} < 0 \right) \quad (6)$$

Gráficamente el resultado anterior establece que para garantizar la estabilidad, el diagrama de Nyquist de $G(s)$ debe estar completamente en el interior del disco $D(\alpha, \beta)$. [6]

El tipo de sistema más común que se encuentra en las industrias corresponde al sistema de primer orden, por lo que para efectos del siguiente análisis, se hará tomando en cuenta la función de transferencia de dicho tipo de proceso para así poder utilizarse en la mayor cantidad de aplicaciones posibles.

Un sistema de primer orden está descrito por la siguiente función de transferencia

$$P(s) = \frac{a_0}{bs + 1} \quad (7)$$

Donde a_0 y b son constantes reales positivas.

Para una no linealidad en el sector $[0, k]$

La función de transferencia de un controlador tipo PD con filtro de constante λ corresponde a

$$C(s) = K_p + \frac{K_d s}{\lambda s + 1} = \frac{[K_p(\lambda s + 1) + K_d s]}{(\lambda s + 1)} \quad (8)$$

La función de lazo abierto para un sistema de primer orden en conexión con el controlador PD con filtro viene dada por la expresión

$$G(s) = C(s)P(s) = \frac{[K_p(\lambda s + 1) + K_d s]}{(\lambda s + 1)} \cdot \frac{a_0}{bs + 1} = \frac{a_0 [K_p(\lambda s + 1) + K_d s]}{\lambda bs^2 + (\lambda + b)s + 1} \quad (9)$$

Note que $G(s)$ es Hurwitz.

Sustituyendo $s = j\omega$, se separan las partes real e imaginaria de $G(s)$, luego se multiplica la parte imaginaria por $-\gamma\omega$ y se suman las expresiones para obtener

$$\Re\{G(j\omega)\} - \gamma\omega\Im\{G(j\omega)\} = \frac{a_0 [K_p + \omega^2 (\lambda^2 K_p + \lambda K_d) + K_d \omega^2 b]}{(1 - \lambda b \omega^2)^2 + (\lambda + b)^2 \omega^2} + \frac{\gamma a_0 \omega^2 [\omega^2 (\lambda^2 K_p b + \lambda K_d b) + (K_p b - K_d)]}{(1 - \lambda b \omega^2)^2 + (\lambda + b)^2 \omega^2} \quad (10)$$

Bajo la condición de que $K_p b - K_d > 0$, basta tomar $\gamma = \frac{1}{K_p b - K_d} > 0$ y la expresión se convierte en

$$\Re\{G(j\omega)\} - \gamma\omega\Im\{G(j\omega)\} = \frac{a_0 [K_p + \omega^2 (\lambda^2 K_p + \lambda K_d) + K_d \omega^2 b]}{(1 - \lambda b \omega^2)^2 + (\lambda + b)^2 \omega^2} + \frac{a_0 \omega^2 \left[\frac{\omega^2 (\lambda^2 K_p b + \lambda K_d b)}{K_p b - K_d} + 1 \right]}{(1 - \lambda b \omega^2)^2 + (\lambda + b)^2 \omega^2} > 0 \quad (11)$$

para todo $\omega \geq 0$.

De la ecuación anterior se infiere mediante el **Criterio de Popov** que el sistema sería globalmente, asintóticamente estable para cualquier no linealidad en el sector $[0, \infty]$. Cabe destacar que al hacer $\lambda = 0$ y al escoger γ de la misma manera el caso ideal se deduce de manera inmediata ya que la expresión anterior toma la forma

$$\Re\{G(j\omega)\} - \gamma\omega\Im\{G(j\omega)\} = \frac{a_0 (K_p + K_d \omega^2 b)}{b^2 \omega^2 + 1} + \frac{a_0 \omega^2}{b^2 \omega^2 + 1} > 0, \text{ para todo } \omega \geq 0 \quad (12)$$

Mediante el **Criterio de Popov** se sigue que el sistema usando un controlador PD ideal sería asintóticamente estable para cualquier no linealidad en el sector $[0, \infty]$.

Para una no linealidad en el sector $[-c, c]$, con $c > 0$

Partiendo de la expresión (9), considere la ecuación

$$\frac{\frac{1}{c} + G(s)}{-\frac{1}{c} + G(s)} = \frac{\lambda b s^2 + (\lambda + b)s + 1 + a_0 c [\lambda K_p s + K_p + K_d s]}{-\lambda b s^2 - (\lambda + b)s - 1 + a_0 c [\lambda K_p s + K_p + K_d s]} \quad (13)$$

Sustituyendo $s = j\omega$ y aislando la parte real de la expresión se obtiene

$$\Re \left\{ \frac{\frac{1}{c} + G(j\omega)}{-\frac{1}{c} + G(j\omega)} \right\} = \frac{[(a_0 c K_p)^2 - (\lambda b \omega^2 - 1)^2] + \omega^2 [(a_0 c K_d + a_0 c \lambda K_p)^2 - (\lambda + b)^2]}{(\lambda b \omega^2 + a_0 c K_p - 1)^2 + \omega^2 (a_0 c K_d + a_0 c \lambda K_p - (\lambda + b))^2} \quad (14)$$

Finalmente, a partir de la expresión anterior, es posible determinar las relaciones de las ganancias que hacen que la parte real de la expresión sea negativa

$$\Re \left\{ \frac{\frac{1}{c} + G(j\omega)}{-\frac{1}{c} + G(j\omega)} \right\} < 0 \iff |a_0 c K_p| < |\lambda b \omega^2 - 1| \wedge |a_0 c K_d + a_0 c \lambda K_p| < |\lambda + b| \quad (15)$$

De la condición que toma en cuenta únicamente a la ganancia proporcional, se infiere que existen rangos de frecuencia en los cuales la desigualdad no se satisface. Como el **criterio del círculo** establece que la parte real de la expresión debe ser negativa para toda frecuencia no negativa, no es posible garantizar la estabilidad del lazo para no linealidades en el sector $[-c, c]$ por medio de este criterio, con la excepción de que $\lambda = 0$, condición que

es precisamente el caso del PD ideal ya que las condiciones pasan a ser

$$\Re \left\{ \frac{\frac{1}{c} + G(j\omega)}{-\frac{1}{c} + G(j\omega)} \right\} < 0 \iff |a_0 c K_p| < 1 \quad \wedge \quad |a_0 c K_d| < |b| \iff K_p < \frac{1}{a_0 c} \quad \wedge \quad K_d < \frac{b}{a_0 c} \quad (16)$$

Si se satisfacen las condiciones anteriores, por el **Criterio del Círculo** se puede afirmar que el sistema sería globalmente, asintóticamente estable para cualquier no linealidad en el sector $[-c, c]$.

III. RESULTADOS

Del análisis anterior, se conocen las condiciones que permiten mostrar la estabilidad del lazo para dos tipos de no linealidades sectoriales generales por lo que solo queda verificar que la función que se introduzca en el lazo de control cumpla con la condición de sector.

Teorema 3. *Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable, que pasa por el origen y que está completamente definida en el primer y tercer cuadrante. Si f' tiene un máximo absoluto en el origen, entonces f satisface la condición de sector, con $f \in [0, f'(0)]$.*

La demostración del teorema 3 se omite por cuestiones de extensión. □

Proposición 1. *La función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de criterio $f(x) = 1 - \frac{2}{e^{-ax} + e^{ax}}$, con $a > 0$ pertenece al sector $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$*

Proposición 2. *La función $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de criterio $g(x) = \frac{2}{1+e^{-ax}} - 1$ con $a > 0$, pertenece al sector $[0, \frac{a}{2}]$*

Proposición 3. *La función $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de criterio $h(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \arctan(ax)$ con $a > 0$, pertenece al sector $[0, \frac{2a}{\pi}]$*

La demostración de las proposiciones 2 y 3 son una aplicación directa del teorema 3. La demostración de la proposición 1 se omite por cuestiones de extensión. □

A continuación se muestra evidencia gráfica de la estabilidad, para un sistema usando un PD ideal y una no linealidad en el sector $[-c, c]$ con $c > 0$ y el gráfico de popov para un sistema usando un PD y una no linealidad en el sector $[0, k]$.

CONCLUSIONES

1. La estabilidad del algoritmo inmune utilizando la función f puede ser garantizada, bajo los criterios discutidos; únicamente para el caso del controlador PD ideal.
2. La estabilidad absoluta de un sistema de primer orden en conexión con un controlador PD ideal puede ser garantizada para cualquier no linealidad en los sectores $[0, \infty]$ y $[-c, c]$ con $c > 0$.
3. La estabilidad absoluta de un sistema de primer orden en conexión con un controlador PD físicamente realizable, puede ser garantizada para cualquier no linealidad en el sector $[0, \infty]$.

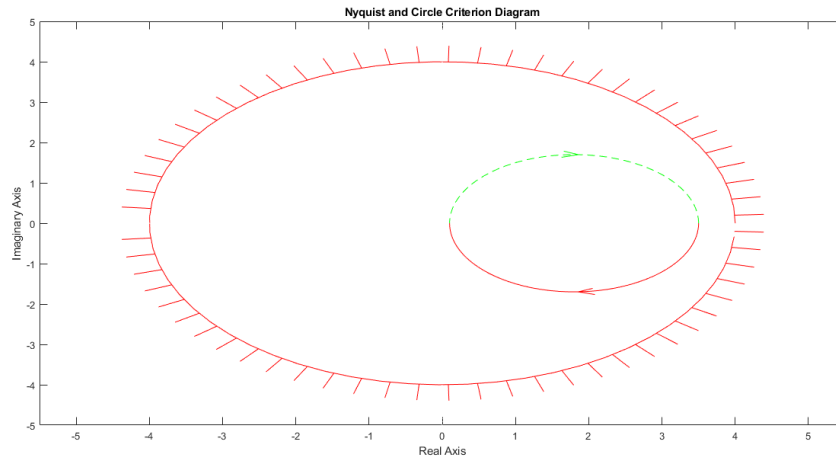


Fig. 1: Ejemplo del criterio del círculo para un sistema usando un PD ideal y una no linealidad en el sector $[-c, c]$.

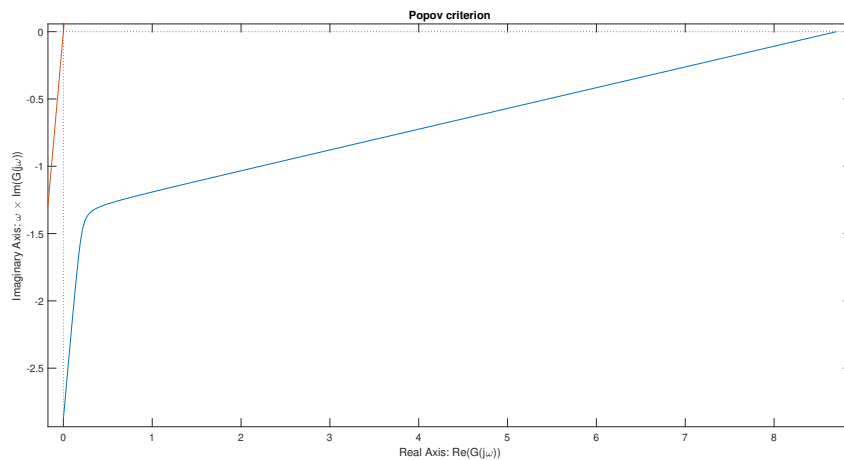


Fig. 2: Gráfico de Popov para un sistema usando un PD y una no linealidad en el sector $[0, k]$.

REFERENCIAS

- [1] S. Wang, Y. Jiang y H. Yang, «Chaos Optimization Strategy on Fuzzy-immune-PID Control of the Turbine Governing System,» págs. 1594-1598, 2006.
- [2] A. Dai, X. Zhou y X. Liu, «Design and Simulation of a Genetically Optimized Fuzzy Immune PID Controller for a Novel Grain Dryer,» págs. 14 981-14 990, 2017.
- [3] S. Gherbi y F. Bouchareb, «Optimal Tuning of a Fuzzy Immune PID Parameters to Control a Delayed System,» vol. 8, n.º 6, págs. 865-869, 2014.
- [4] D. Peng, H. Zhang, C. Huang, J. Lin y H. Li, «Study of Immune PID Networked Control System Based on TrueTime,» vol. 6, n.º 6, págs. 912-915, 2011. DOI: 10.4304/jnw.6.6.912-915.
- [5] M. Xian-min y W. Chen, «Optimization of PID Parameters for Coal Gas Monitored Control System Based on Artificial Immune Algorithm *,» 2011.
- [6] H. K. Khalil, *Nonlinear Control*. Pearson, 2015, ISBN: 9780133499261.