

LA GEOMETRIA EN SU CONTEXTO HISTORICO*

Joseph C. Várilly
Escuela de Matemática
Universidad de Costa Rica

La geometría en los sistemas de enseñanza media ha sido retomado por diversas propuestas para remozar los programas de matemáticas; y en el caso de Costa Rica, con la puesta en práctica de un programa ambicioso que destaca la geometría desde el inicio del año escolar [1]. Es importante no perder de vista el aspecto histórico de las matemáticas, para que su enseñanza no se desligue de su evolución a través de los siglos. Los siguientes párrafos tratan de resumir el papel cambiante que la geometría ha jugado históricamente, de indicar sus principales corrientes, y de bosquejar sus tendencias actuales.

1 Prehistoria: astrometría

Muchas veces se oye que la geometría significa “medición de la tierra” y que fue una elaboración, por parte de los griegos, de los esquemas de mensuración heredados de los egipcios. Resulta, sin embargo, que entre los propios griegos antiguos se repetía este mismo mito de origen, pero no hay evidencias importantes para sustentarlo [2]. Los egipcios tenían una cultura matemática más bien rudimentaria (a pesar de sus maravillas de ingeniería); los mayores

avances matemáticos anteriores al surgimiento de la geometría provinieron de la medición, no de la tierra, sino del cielo.

Varias civilizaciones antiguas (Babilonia, China y Mesoamérica en particular) desarrollaron una alta capacidad de cálculo numérico sin llegar a hacer geometría. Podemos identificar dos *postulados cosmológicos* comunes a estas civilizaciones arcaicas:

- que la vida es *una rueda* que se repite cíclicamente (con un período largo de varios milenios) [3];
- que los astros y los planetas guían el destino de los seres humanos.

Como resultado de esta visión del mundo, se impuso la necesidad de determinar y predecir eventos astronómicos (eclipses, conjunciones y oposiciones de planetas, etc.) con la mayor exactitud posible. En consecuencia, las hazañas matemáticas de las sociedades antiguas incluyeron:

- *calendarios* precisos;
- *mediciones* exactas del cielo;
- *catálogos* de fechas y eventos claves;
- procedimientos de *cálculo* aritmético.

En particular, los babilonios llevaron estos cálculos a un alto nivel de sofisticación, desde

*Esta es una versión amplificada de una conferencia ofrecida como apoyo a la Capacitación en Matemáticas para profesores de III Ciclo de la Educación General Básica, el 15 de febrero de 1995. Agradezco a la Comisión Nacional Coordinadora de esta capacitación la oportunidad de colaborar con tan importante evento.

2000 a. C. hasta el segundo siglo precristiano. Entre los efectos de su sistema astrométrica que perduran hasta hoy, cabe mencionar su división del cielo en doce regiones iguales (asociadas a ciertas constelaciones del llamado círculo zodiaco) que corresponde a la división de la noche —y también el día— en doce “horas”; y su partición del círculo en 6×60 partes (para hacer mediciones de la bóveda celeste) que son los “grados” de uso cotidiano. (Su sistema numérico usaba múltiplos de 6 y de 10, y por ende de 60, y por eso dividieron las horas en 60 minutos y cada minuto en 60 segundos.) Sus cálculos astrométricos formaron la base del sistema de mediciones angulares usado luego por los griegos.

2 La geometría como construcción teórica

2.1 Thales

Thales fue un astrónomo radicado en Mileto, la principal ciudad griega de la costa de Ionia (al sur del actual sitio de la ciudad turca de Izmir) en las décadas posteriores a 600 a. C. Viajó bastante, posiblemente llegó a Egipto. Se cuenta que propuso el siguiente truco astuto para estimar las alturas de las pirámides (Figura 1). Si la pirámide tiene altura (desconocida) H , y si D es la longitud de su sombra (desde su punta hasta el centro de la base de la pirámide), sólo D se puede medir; si se clava un palo largo, de altura h , en el suelo, sea d la longitud de la sombra del palo. A cierta hora de la tarde, se tendrá $d = h$; al medir D a esa hora, también se tendrá $D = H$, y así se obtiene la longitud H que es inaccesible en forma directa. (Se reconoce en este procedimiento la semilla del llamado “teorema de Thales”.) También Thales usó un método parecido para estimar la distancia de un barco de la costa, y para hacer otras mediciones.

Pero Thales no se contentó con descubrir y

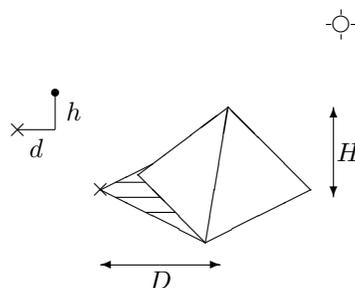


Figura 1: La altura de una pirámide

aplicar trucos astutos, que seguramente fueron empleados mil veces anteriormente. Su paso decisivo fue que *insistió en la universalidad de sus métodos*: aseguró que la coincidencia de longitudes ($d = h$, $D = H$) no era casualidad, ni mera regla empírica, sino que es un *fenómeno general* de comparación de tamaños [4].

2.2 El culto de Pitágoras

Medio siglo después, en Crotona, al otro extremo del mundo griego (actualmente el sur de Italia) surgió un culto misterioso, liderado por Pitágoras. Sus miembros predicaron varias doctrinas cosmológicas sobre el origen y la naturaleza del universo, entre los cuales podemos destacar dos rasgos principales:

- los *números enteros* constituyen la clave para entender el universo;
- hay que tratar de *entender el mundo en forma sistemática*, es decir, hay que *formular una teoría*.

Un ejemplo de sus investigaciones acerca de los números enteros es su clasificación de “números poligonales” (Figuras 2, 3). Destacan aquí su descubrimiento de patrones generales que estos números obedecían. Por ejemplo, si Δ_n denota el número de puntos en un triángulo de lado n , se tiene (en notación moderna) $\Delta_{n+1} = \Delta_n + (n + 1)$. Si C_n denota el

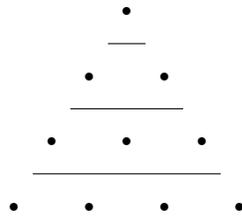


Figura 2: Números triangulares: 1, 3, 6, 10,...

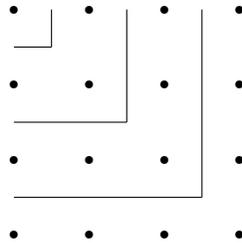


Figura 3: Números cuadrados: 1, 4, 9, 16,...

número de puntos en un cuadrado de lado n , se tiene $C_{n+1} = C_n + n + (n + 1)$. Si P_n denota el número de puntos en un pentágono de lado n , se tiene $P_{n+1} = P_n + n + n + (n + 1)$; y así sucesivamente [5].

La escuela de Pitágoras también desarrolló un estudio de las *proporciones* entre cantidades enteras. Su teoría de *armonías* musicales se basaba en el hecho que los sonidos musicales emitidos por cuerdas son más placenteros cuando las longitudes de dichas cuerdas son *commensurables*, es decir, múltiplos enteros de una unidad común; por ejemplo, un “octavo” musical corresponde a la proporción $1 : 2$, un “quinto” a $3 : 2$, un “cuarto” a $4 : 3$, un “tono” a $9 : 8 = (3 : 2) \div (4 : 3)$, etc. (Hoy en día, entendemos que este fenómeno se debe a la coincidencia de fases entre ondas sinusoidales que son submúltiplos de un “modo” común.) Se convencieron de que hay armonía en la naturaleza toda vez que dos cantidades son commensurables.

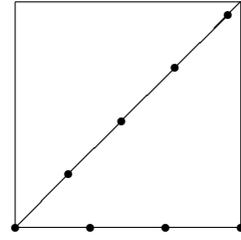


Figura 4: El lado y la diagonal no son commensurables

Enseguida, se toparon con la dificultad de que el mundo incluye muchas cantidades no commensurables, por ejemplo, el lado y la diagonal de un cuadrado (Figura 4).

Una teoría de *cantidades no racionales* emergió mucho más tarde. Fue desarrollado por miembros de la Academia de Platón en el siglo IV a. C., especialmente por Eudoxos y Theaetetos.

3 La geometría como objeto de investigación

3.1 Tres problemas difíciles

En el período 400–200 a. C. aproximadamente, la geometría emergió como una disciplina de estudio, y muchos de los mejores intelectos de la época se dedicaron a descifrar sus misterios. Surgió una tradición de *resolución de problemas de construcción*, orientada principalmente por tres problemas de excepcional dificultad.

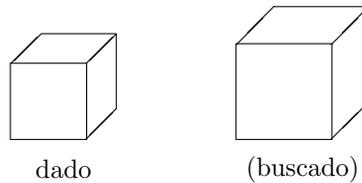


Figura 5: Duplicación del cubo

1. Hallar el lado de un cubo con el doble de volumen de un cubo dado (Figura 5).

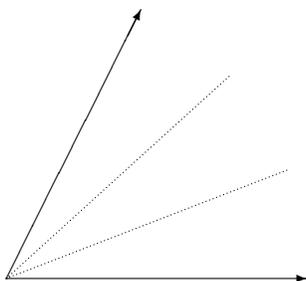


Figura 6: Trisección del ángulo

- Partir un ángulo dado en tres ángulos iguales (Figura 6).

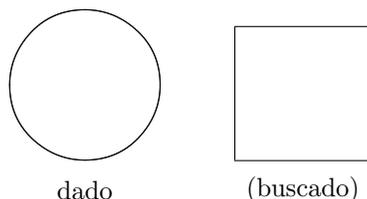


Figura 7: Cuadratura del círculo

- Construir un cuadrado cuya área fuera igual al área de un círculo dado (Figura 7).

No había, en principio, limitación alguna sobre los procedimientos que se podía emplear [6]. Muchos problemas de menor envergadura pueden efectuarse con instrumentos simples, como la regla no marcada y el compás (por ejemplo, para hallar la diagonal de un cuadrado hay que dibujar éste, y el ángulo recto necesario puede trazarse con la ayuda del compás). Pero los tres problemas mencionados demandaban otros instrumentos, como el segmento inclinado o “neusis” (usado por Arquímedes para duplicar el cubo y trisecar el ángulo), o ciertas curvas especiales como la “ofuride” usado por Eudoxos para duplicar el cubo o la “conchoide” y la “cuadratriz” usados por Nicómedes para duplicar el cubo y cuadrar el círculo [6, 7]. Pasaron dos milenios más antes del descubrimiento, en el siglo XIX, de

que estos tres problemas no admiten solución con los instrumentos básicos; pero la búsqueda de procedimientos directos y sencillos sostuvo una árdua labor de investigación durante el cuarto y tercer siglos a. C.

3.2 Una síntesis constructivista

Alrededor de 300 a. C., el Museo (es decir, biblioteca) de Alejandría tomó el liderazgo académico en el mundo. Allí trabajó Euclides, quien escribió un tratado enorme, en 13 partes, llamado *Elementos*, que culmina con la *construcción* (por inscripción en una esfera dada) de los cinco poliedros regulares convexos.

Esta construcción, en lo referente al icosaedro y el dodecaedro, depende de la teoría de las *magnitudes irracionales*, como la razón áurea $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$, desarrollado en el siglo IV; esta teoría a su vez depende de la teoría de proporciones y su aplicación a las figuras semejantes. Para dar a su obra mayor completitud, Euclides agregó una buena cantidad de materia básica al inicio, con muchas proposiciones relativamente “elementales”. El resultado fue un libro que combina matemáticas difíciles con lemas de fácil acceso, y que fue usado durante dos milenios posteriores como libro de texto.

Es poco probable que Euclides mismo habría recomendado el uso de sus *Elementos* como texto escolar. Su estilo más bien es el de un libro de matemática avanzada, con pruebas especiales para casos simples. Considérese, por ejemplo, su Proposición VI.31, un resultado atribuido a Hipócrates (alrededor de 440 a. C.) [8]:

Si $\triangle ABC$ es rectángulo, el área de una figura sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de dos figuras semejantes sobre los catetos (Figura 8).

La idea de su prueba puede resumirse así:

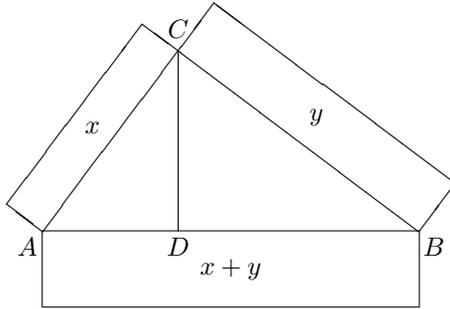


Figura 8: Prop. VI.31 de Euclides

1. Hay tres triángulos rectángulos semejantes: $\triangle BAC \sim \triangle CAD \sim \triangle BCD$.
2. Sus áreas se suman: $\text{Area}(\triangle BAC) = \text{Area}(\triangle CAD) + \text{Area}(\triangle BCD)$.
3. Por propiedades generales de proporciones, también se suman las áreas apoyadas sobre las respectivas hipotenusas.

El caso particular más famoso de esta proposición se obtiene al tomar *cuadrados* sobre los tres lados. Esta es la Proposición I.47 de los Elementos:

Si $\triangle ABC$ es rectángulo, el área de un cuadrado sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los dos cuadrados sobre los catetos (Figura 9).

Para este caso particular, Euclides cambió la prueba de Hippocrates, para no usar semejanza de triángulos en este caso especial. De hecho, comprobó que el cuadrado grande se subdivide en dos áreas que son respectivamente iguales a las de los otros cuadrados. Sin embargo, su argumento (por congruencia de ciertos triángulos) es menos transparente que la prueba original por semejanza.

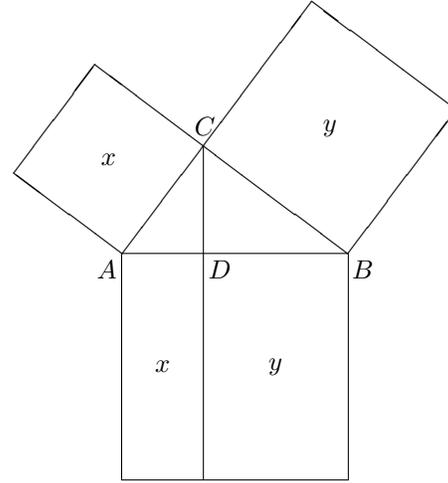


Figura 9: Prop. I.47 de Euclides

3.3 El método de agotamiento

Arquímedes de Siracusa (alrededor de 250 a. C.) pudo duplicar el cubo y trisecar el ángulo con el uso de segmentos inclinados, pero no pudo cuadrar el círculo satisfactoriamente. Sin embargo, logró cuadrar la parábola con el empleo de un método de gran significancia para el futuro, el llamado “método de agotamiento”. (Cuadrar una curva no cerrada significa hallar el área de un “segmento”, es decir, el área comprendido por la curva y una de sus cuerdas.) El método consiste en obtener dos juegos de aproximaciones sucesivas, *por defecto* y *por exceso*, al área deseada, y así obtener el único valor posible del área al “agotar” cualquier otra posibilidad.

En la Figura 10, la parábola tiene cuerda AB , con punto medio K ; y TA , TB , MN son tangentes a la parábola. Arquímedes [9] demostró que

$$\text{Area}(\text{segmento } APB) = \frac{2}{3} \text{Area}(\triangle ATB).$$

Se saben, por propiedades de triángulos, las relaciones $\text{Area}(\triangle APB) = \frac{1}{2} \text{Area}(\triangle ATB)$ y $\text{Area}(\triangle MTN) = \frac{1}{4} \text{Area}(\triangle ATB)$; esto

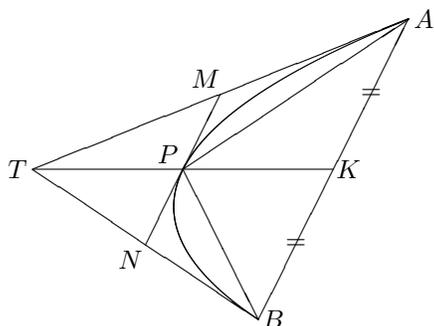


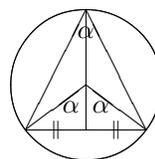
Figura 10: Cuadratura de la parábola

da aproximaciones por defecto (el triángulo $\triangle APB$) y por exceso (el trapecio $AMNB$). Ahora, las figuras AMP y PNB son *copias en miniatura* de la figura completa (arcos de una parábola limitados por una cuerda y dos tangentes) que juntos forman $\frac{1}{4}$ de su área; por ende, se puede repetir el esquema de la Figura 10 en ellas, y así sucesivamente. Se obtiene, después de n repeticiones, que el área deseada es mayor que $\text{Area}(\triangle APB)$ veces $(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + (\frac{1}{4})^n)$, mientras el área residual dentro del triángulo $\triangle ATB$ es mayor que $\text{Area}(\triangle MTN)$ veces $(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots + (\frac{1}{4})^n)$. Con base en estos estimados, Arquímedes concluyó: (i) que el área deseada no puede ser menor que $\frac{2}{3} \text{Area}(\triangle ATB)$; (ii) que el área residual no puede ser menor que $\frac{1}{3} \text{Area}(\triangle ATB)$; y por ende, que el área deseada es exactamente $\frac{2}{3} \text{Area}(\triangle ATB)$.

4 La época posgriega: trigonometría

Por razones aun desconocidas [10], el impulso intelectual de los griegos declinó después de 150 a.C. Las matemáticas de la edad posterior se alimentaron tanto de la geometría griega como de la aritmética babilonia. Una síntesis interesante de estas dos tradiciones fue el auge de la trigonometría numérica usado por astrónomos de los primeros siglos cristianos.

Entre ellos se destaca Claudio Tolomeo de Alejandría (alrededor de 150 d. C.) quien hizo extensas tablas astronómicas para analizar los movimientos de los planetas.

Figura 11: $\text{crd } \alpha = 2 \text{ sen } \alpha$

La *Tabla de Cuerdas* de Tolomeo expone la relación entre un ángulo α en un círculo y la longitud ($\text{crd } \alpha$) de la cuerda opuesta. Posteriormente, los árabes adaptaron las tablas de Tolomeo, con el uso de la longitud de la media cuerda, o “seno”, en vez de la cuerda completa, como parámetro para medir tamaños de ángulos (Figura 11). Resulta que el seno se adapta mejor a cálculos con triángulos rectángulos; el alemán Regiomontanus, alrededor de 1470, usó el seno para hacer nuevas tablas trigonométricas.

El esquema de Tolomeo se basa en una relación fundamental entre cuerdas de un círculo, que vale la pena mencionar. Si $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en un círculo, tiene dos pares de lados opuestos (AD y BC , AB y CD) y dos diagonales (AC y BD). Entre los tres productos hay una relación aditiva (Figura 12):

Teorema de Tolomeo: *Si $ABCD$ es un cuadrilátero inscrito en un círculo,*
 $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$.

Para ver la relevancia de este teorema para la trigonometría moderna, supóngase que BD es un diámetro de un círculo de radio 1, y sean $\alpha = \sphericalangle ABD$, $\beta = \sphericalangle DBC$. Entonces se tiene $BD = 2$, $AC = \text{crd}(\alpha + \beta)$, $AD = 2 \text{ sen } \alpha$ y $CD = 2 \text{ sen } \beta$, porque los ángulos $\sphericalangle DAB$ y $\sphericalangle BCD$ son rectos. La relación que descubrió

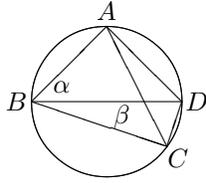


Figura 12: $AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot CD$

Tolomeo puede entonces escribirse, en lenguaje moderno, como

$$4 \sin(\alpha + \beta) = 4 \sin \alpha \cos \beta + 4 \cos \alpha \sin \beta.$$

Esta es la fórmula para el seno de una suma de ángulos.

5 Nuevos métodos del siglo XVII

5.1 Kepler: magnitudes variables

Con la llamada “revolución científica” del siglo XVII, la geometría fue renovada por la introducción de varias ideas nuevas. Primeramente, cabe mencionar a Johannes Kepler, quien en 1615 interrumpió sus investigaciones acerca de las órbitas planetarias para reconsiderar el problema de cálculo de volúmenes de sólidos regulares e irregulares [11]. Kepler propuso que el volumen de un barril debe ser considerada como una *función* de sus dimensiones r y a (radio de base y altura), pues estas pueden variar de un barril a otro.

Enfrentó el problema de decidir cuando un sólido, sujeta a ciertas limitaciones (e.g., construido con una cantidad fija de madera, o bien inscrito en una esfera de determinado radio), alcanzaba un volumen máximo. Formuló un postulado (que hoy en día llamaríamos un “principio variacional”): que un volumen dependiente de una dimensión variable *alcanza su valor máximo o mínimo cuando es insensible a una pequeña variación* de esa variable.

Por ejemplo, para obtener el volumen máximo de un cilindro de dimensiones r y a

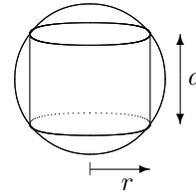


Figura 13: Cilindro inscrito en esfera

inscrito en una esfera de radio R (Figura 13), se calcula el volumen (base \times altura) como $\pi r^2 a$; la relación $(a/2)^2 + r^2 = R^2$ (de la inscripción) permite eliminar r : el volumen es una función de la altura, concretamente $V = \pi a(R^2 - a^2/4)$. Una pequeña variación h en la altura conlleva variaciones correspondientes en el radio de base y en el volumen; se calcula el cambio en el volumen:

$$\Delta V = \pi h(R^2 - \frac{3}{4}a^2) - \frac{3}{4}\pi a h^2 - \frac{1}{4}\pi h^3.$$

Este cambio es despreciable, si h es muy pequeño, cuando $R^2 - \frac{3}{4}a^2 = 0$, es decir, cuando $a = 2R/\sqrt{3}$. Según el principio de Kepler, el volumen máximo del cilindro se obtiene cuando la altura esta en proporción $1 : \sqrt{3}$ con el diámetro de la esfera.

5.2 El método de DesCartes

Cuando René DesCartes publicó su *Discurso del Método* en 1637, uno de los ejemplos principales de su esquema metodológico fue un capítulo sobre geometría, en donde expuso un procedimiento para estudiar curvas de cualquier especie, y no solamente curvas particulares como círculos o secciones cónicas.

Según DesCartes, una curva cualquiera puede expresarse por *una relación variable* entre la altura PM y la longitud OM , donde P es un punto arbitrario de la curva PR por estudiar, \vec{OX} es una semirecta fija, y M es la sombra o proyección del punto P sobre la recta OX (Figura 14).

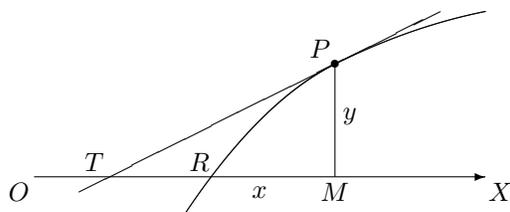


Figura 14: Coordenadas cartesianas

Resulta que las secciones cónicas (la elipse, la parábola, la hipérbola) obedecen relaciones *cuadráticas* entre las longitudes $y = PM$ y $x = OM$ [12]. Las relaciones *cúbicas* y de mayor grado entre estas cantidades producen curvas “nuevas”; una de estas nuevas curvas cúbicas es la llamada “hoja” de DesCartes.

Uno de los problemas abordado con éxito por el método de DesCartes es la clasificación de las *rectas tangentes* (como PT) a curvas cualesquiera. Esencialmente, esta clasificación se reduce a la tarea de hallar relaciones algebraicas entre $x = OM$ y la abscisa $t = OT$ de la recta tangente en P (a partir de la relación conocida entre PM y OM). DesCartes ofreció, en su *Geometría*, un procedimiento que permitió, en cada caso particular, derivar las relaciones para la recta tangente de la ecuación de la curva inicial.

Fue Isaac Newton quien, en 1665, sistematizó el recetario de DesCartes para extraer *reglas algebraicas generales* para ubicar la recta tangente de una curva cualquiera. Ese mismo año, Newton consideró la *cuadratura* de la curva PR , es decir, la relación funcional entre el $\text{Area}(PRM)$ y OM (véase la Figura 14), y descubrió que las rectas tangentes a la curva así determinada obedecen la ecuación de la curva original. En otras palabras, descubrió el llamado “teorema fundamental del cálculo”, de que la cuadratura y la determinación de las tangentes son procesos inversos. Con el empleo de la notación algebraica de DesCartes, Newton desarrolló extensas tablas de cuadra-

turas de curvas, que fueron la base del “cálculo diferencial e integral” de hoy [13].

La lección de los grandes avances del siglo XVII puede resumirse así: *la geometría revela su naturaleza plenamente solo si se usa el método de coordenadas*.

6 Nuevas geometrías en el siglo XIX

6.1 Geometrías no euclidianas

Hasta el año 1800, se creía que la geometría codificada por Euclides era una teoría universal, y que no admitía alternativas. Pero ya para 1825 Gauss, Bolyai y Lobachevskiy (y más tarde Riemann) lograron construir otras geometrías, que se distinguían de la de Euclides porque el “postulado de las paralelas” (el quinto de los cinco postulados al inicio del primer tomo de los Elementos) no es válido en ellas.

En lo tocante a este postulado, se distinguen tres alternativas: el esquema original (geometría “euclidiana”), la geometría “hiperbólica” descubierta por Bolyai y Lobachevskiy, y la geometría “elíptica” concebida por Riemann. Se busca una recta que pasa por un punto P paralela a una recta AB (si P no queda en AB); las posibilidades son las siguientes.

Caso euclidiano: Hay *una sola* recta que pasa por P , sin cortar la recta AB .

Caso hiperbólico: Hay *varias* rectas que pasan por P , sin cortar la recta AB (Figura 15).

Caso elíptico: Todas las rectas se cortan.

Un posible modelo del plano hiperbólico es un disco sin frontera, en donde las “rectas” se representan por arcos de círculo perpendiculares a la frontera (véase la Figura 15).

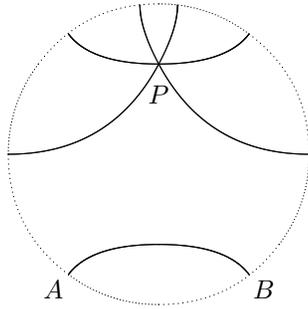


Figura 15: Rectas en geometría hiperbólica

Un posible modelo del plano elíptico es la superficie de una esfera, en donde las “rectas” se representan por círculos grandes de la esfera (se identifican los puntos diametralmente opuestos, para que dos círculos grandes cualesquiera se corten una sola vez).

6.2 Geometría posicional

La geometría posicional, a veces llamada “geometría proyectiva”, trata del estudio de las posiciones relativas de puntos y rectas (cuáles puntos son alineados, cuáles rectas se cortan, cuáles rectas pasan por determinados puntos), sin medir longitudes ni ángulos. Fue elaborado por Carnot y Poncelet y codificado por von Staudt (1847). Un ejemplo de esta geometría es el siguiente resultado, afirmado originalmente por Desargues en 1639.

Teorema de Desargues: Si los lados correspondientes de $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ se cortan en $X = BC \cap QR$, $Y = CA \cap RP$ y $Z = AB \cap PQ$, las rectas AP , BQ , CR son concurrentes si y sólo si X , Y , Z son colineales.

El punto $O = AP \cap BQ \cap CR$ (si existe) se llama el “centro de perspectiva” de los dos triángulos, y la recta XY es su “eje de perspectiva” (véase la Figura 16).

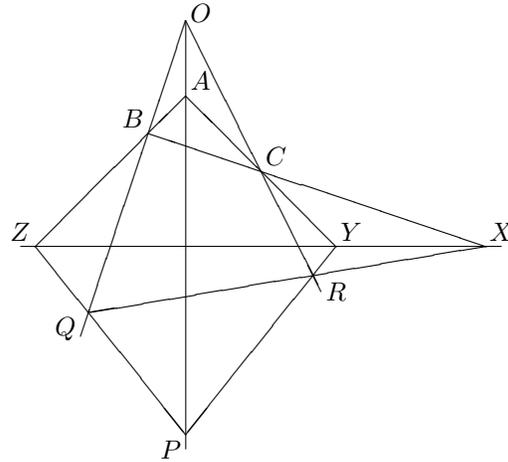


Figura 16: El teorema de Desargues

Para comprobar este resultado, se aprovecha las propiedades del espacio tridimensional. Imagínese un ángulo sólido demarcado por las rectas OA , OB y OC ; los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle PQR$ son secciones de este ángulo sólido por dos planos, y la recta de intersección de estos dos planos pasa por los puntos X , Y y Z . Luego se proyecta este esquema en una pantalla bidimensional.

7 Clasificación de las geometrías

Para mediados del siglo XIX, se aceptaba la idea de que no hay una sola geometría, sino varias. De ahí surgieron dos problemas nuevos: *¿qué es una geometría?* y *¿cómo se clasifican las geometrías?*

Una geometría interesante es la de un “complejo de rectas”, cuyos elementos no son puntos sino rectas en el espacio. Esta es una geometría *cuadridimensional*, pues se necesitan cuatro coordenadas para fijar la posición de una recta.

Félix Klein se dio cuenta de que la característica esencial que distingue una geometría de otras es su *grupo de simetrías* [14].

Las simetrías mencionadas actúan sobre un

conjunto base (de puntos, o de rectas, por ejemplo); y hay que averiguar las propiedades de ese conjunto que son *invariantes bajo simetría*.

Algunos ejemplos de geometrías distintas, en el esquema de Klein, son las siguientes.

Euclidiana El conjunto es el plano usual. Las simetrías posibles son traslaciones, rotaciones, reflexiones, y dilataciones. Unos invariantes típicos son la medida de un ángulo, la proporción entre dos segmentos, y el paralelismo de rectas.

Hiperbólica El conjunto es un disco sin frontera. Las simetrías posibles son las transformaciones circulares del disco (que llevan unos arcos de círculo en otros). Unos invariantes típicos son la medida de un ángulo y la longitud de un segmento.

Elíptica El conjunto es una esfera. Las simetrías posibles son las rotaciones del círculo y las reflexiones ecuatoriales. Unos invariantes típicos son la medida de un ángulo y la longitud de una cuerda.

Posicional El conjunto es el plano usual, amplificado por una recta de “puntos en el infinito”. Las simetrías posibles son las “colineaciones” (que llevan rectas en rectas). Un invariante típico es la “razón doble” de cuatro puntos colineales.

Hoy en día se sabe que el concepto geométrico clave es la *simetría*, entendida ésta como un grupo de transformaciones de un conjunto.

Las simetrías como traslaciones, rotaciones y dilataciones vienen en familias “continuas”. Las llamadas simetrías “discretas” (por ejemplo, las traslaciones de un patrón repetitivo, como las losetas de un mosaico) dan lugar a interesantes problemas geométricos, que han sido estudiados a lo largo del siglo XX.

8 Aspectos modernos de la geometría plana

8.1 Teselaciones

Una *teselación* es una subdivisión del plano en polígonos, llamados *losetas*. Si se impone alguna simetría de traslación, se obtienen patrones regulares que hay que clasificar [15].

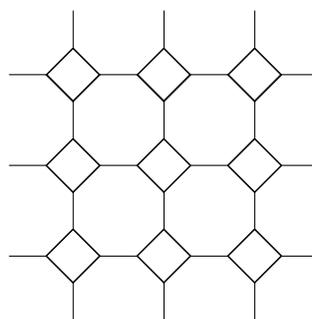


Figura 17: Una teselación semiregular

Se sabe, por ejemplo, que el plano admite solamente tres teselaciones por polígonos regulares congruentes: por triángulos equiláteros, por cuadrados, y por hexágonos regulares. Si se admiten losetas regulares de varios tipos, hay once teselaciones “semiregulares”, que tienen losetas de 3, 4, 6, 8 ó 12 lados (véase la Figura 17).

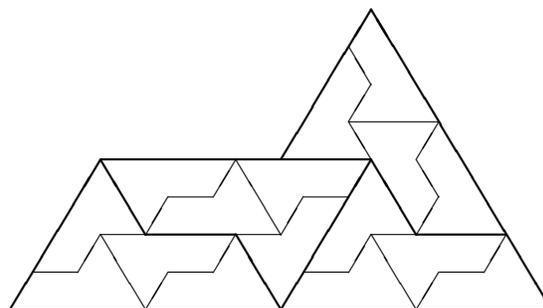


Figura 18: Una teselación autosimilar

8.2 Figuras autosimiles

Una figura plana es *autosimil* si se puede reproducir la propia figura por un cambio de escala (más una rotación o reflexión).

Desafortunadamente, esto implica que la figura tiene extensión infinita, en algún sentido. Los *fractales*, como el “conjunto de Mandelbrot”, son autosimiles —pues al magnificar una parte del borde de un fractal, se descubre copias en miniatura del fractal completo— pero sus bordes tienen una longitud infinita. Es fácil crear teselaciones autosimiles por una reducción de escala (Figura 18).

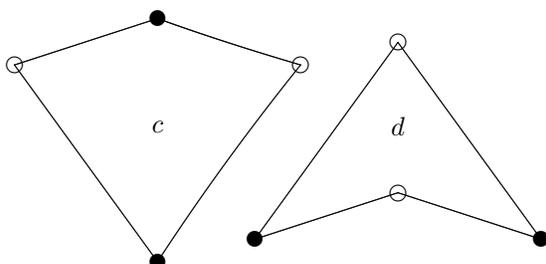


Figura 19: Las losetas de Penrose

Roger Penrose (1975) descubrió una teselación por dos tipos de cuadriláteros, que tiene simetría pentagonal, aunque no se repite periódicamente por traslación [16]. Una “cometa” es un cuadrilátero con ángulos de 72°, 72°, 72° y 144°, y con lados en la proporción $\phi : \phi : 1 : 1$ (donde $\phi \doteq 1.618$ es el “número áureo”); un “dardo” es un cuadrilátero con ángulos de 36°, 72°, 36° y 216°, y con lados en la proporción $1 : 1 : \phi : \phi$ (Figura 19). Para formar el mosaico, se marcan los vértices de dos maneras en la forma ilustrada y se obliga la coincidencia de vértices del mismo tipo.

Las losetas de Penrose poseen *autosimilitud* en el siguiente sentido. Dos cometas c y un dardo d pueden ensamblarse para formar una cometa más grande C (Figura 20). También,

se pueden ensamblar dos medios de dardos y una cometa para hacer un dardo más grande D (Figura 21). Estas relaciones pueden resumirse en esta fórmula simbólica:

$$\begin{aligned} 2c + d &= C, \\ c + d &= D. \end{aligned}$$

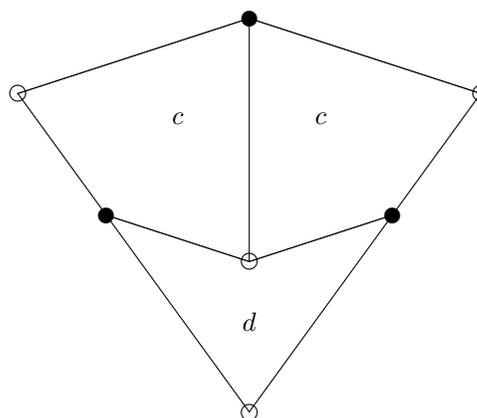


Figura 20: Cometa grande: $c + c + d = C$

Los lados de las nuevas figuras son ϕ^2 y ϕ (porque $\phi + 1 = \phi^2$); hay un cambio de escala por un factor de magnificación ϕ . Es evidente que se puede repetir el proceso de ensamblaje, para obtener cometas y dardos cada vez más grandes; o se puede, inversamente, descomponer estas figuras en cometas y dardos cada vez más pequeños.

8.3 La geometría del siglo XXI

El siglo que está por empezar traerá otros nuevos puntos de vista para explorar la geometría, aunque no se sabe su naturaleza aún. Lo cierto es que la simetría de figuras planas está lejos de ser un tema agotado. El concepto de autosimilitud no está todavía bien comprendido; es posible que tendrá repercusiones sutiles para el estudio de las materias cristalinas. Falta mucho por hacer también en la clasificación de los diseños simétricos, que todavía es terreno de las artes gráficas.

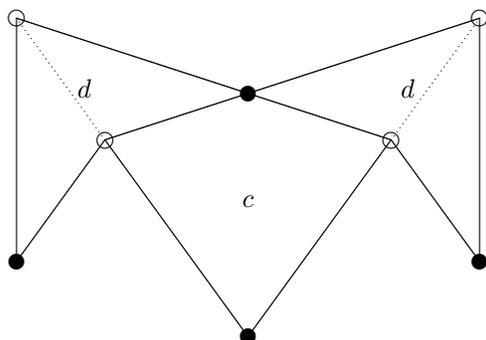


Figura 21: Dardo grande: $c + \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}d = D$

Habrán fenómenos novedosos en la geometría, que hoy podemos apenas discernir. A modo de ejemplo, se puede mencionar el descubrimiento por Alain Connes (1990) de que las teselaciones de Penrose forman un ejemplo de lo que él llama una “geometría no conmutativa”: esta es una nueva teoría que se espera sea capaz de dilucidar la naturaleza “cuántica” del espaciotiempo en donde vivimos [17]. Puede esperarse, entonces, que la geometría plana no quedará obsoleta, sino que aportará nuevos conocimientos a las generaciones futuras.

Notas bibliográficas

- [1] Véase en particular el *Programa de Estudios: Matemática, III Ciclo* publicado por el Ministerio de Educación Pública, San José, Costa Rica, 1995; y sus documentos de apoyo, entre ellos el de A. Ruiz, T. Tsijli, J. Oviedo e I. Contreras, “Fundamentos teóricos de los nuevos programas de matemáticas”, San José, febrero de 1995.
- [2] El nexo entre la geometría practicado por los griegos y las mediciones terrenales egipcias ha sido reconsiderado recientemente en D. H. Fowler, *The Mathematics of Plato's Academy*, Clarendon Press, Oxford, 1987. Fowler concluye que las pocas evidencias disponibles indican una influ-

encia casi nula de las prácticas egipcias sobre las eventuales teorías de los griegos.

- [3] La ciclicidad del tiempo se induce del ritmo de las estaciones. Casi todas las civilizaciones premodernas postularon una especie de “Gran Año” de renovación del mundo, con una duración que va desde 12000 años de los hindúes (un ciclo de cuatro “yugas” o edades) hasta los 57 años de los aztecas; en varios casos, se creía que los eventos se repetían en todo detalle en cada ciclo. La gran excepción fue la civilización hebrea, que predicó una historia lineal ordenada por Yahvé. Las consecuencias culturales de la creencia en un universo periódico son explorados a fondo en M. Eliade, *El mito del eterno retorno*, Alianza/Emecé, Madrid, 1972.
- [4] Honramos la memoria de Thales no por sus descubrimientos geométricos, que fueron escasos, sino por el paso a la abstracción, de lo particular a lo general, que dio origen a la matemática griega. Para conocer su obra específica, consúltese T. L. Heath, *A History of Greek Mathematics*, 2 tomos, Dover, New York, 1981.
- [5] Las fórmulas para Δ_{n+1} , C_{n+1} , P_{n+1} , hoy en día se llaman “reglas de recursión”. Los pitagóricos estudiaron la diferencia $C_{n+1} - C_n$, que llamaron el “gnomon” (la palabra significa una escuadra de carpintero). Es de notar que en ocasiones el gnomon es un cuadrado perfecto; por ejemplo, $C_5 - C_4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$. Es posible, aunque no hay evidencia segura, que la consideración de gnomones llevaron los pitagóricos a una versión *aritmética* del famoso teorema que lleva su nombre: véase Heath, *op. cit.*, tomo 1, pp. 79–82.
- [6] Los tomos iniciales de los Elementos de Euclides tratan de proposiciones y construcciones que requieren el uso de una regla no marcada y un compás solamente;

pero ningún otro documento de la época impuso esta restricción artificial. Para construcciones difíciles, el instrumento de preferencia era el *neusis*, una regla marcada de inclinación variable que servía para colocar un segmento de determinada longitud en cualquier posición conveniente. El uso de la *neusis* y las curvas especiales en las construcciones ha sido explorado a fondo por W. R. Knorr, *The Ancient Tradition of Geometric Problems*, Dover, Mineola, NY, 1986; véase también Fowler, *op. cit.*, pp. 287–293.

- [7] Las curvas especiales fueron construidos como lugares geométricos de puntos que obedecen determinadas condiciones; en general se construyen varios puntos sobre la curva pero hay que terminar su dibujo a mano alzada. Hay un catálogo de estas curvas, con indicaciones precisas para su construcción, en el libro de Luis González, *Lugares Geométricos*, Univ. de Costa Rica, San José, 1962.
- [8] Hipócrates resolvió un caso importante de la cuadratura de curvas, al dar un método de convertir el área de una “lúnula” (la figura entre dos arcos de círculo de distintos radios, como una luna menguante) al área de cierto polígono. Su método emplea una *neusis* y un resultado de adición de áreas equivalente a la Proposición VI.31 de Euclides; para los detalles, se puede consultar Knorr, *op. cit.*, o bien Heath, *op. cit.*, tomo 1, pp. 183–200.
- [9] De hecho, Arquímedes cuadró la parábola por dos métodos distintos; el que hemos bosquejado aquí era su segunda prueba. La primera consistió en dividir el segmento parabólico en varos trozos y equilibrar éstos en una balanza con contrapesos rectangulares, usando la “ley de la palanca”. Las dos pruebas están detalladas en Heath, *op. cit.*, tomo 2, pp. 85–
91. En una carta posterior a Eratosthenes, Arquímedes le reveló que solía hacer estos argumentos “mecánicos” inicialmente, en el proceso de descubrimiento de sus teoremas, y solamente después inventaba argumentos más “geométricos” en su lugar.
- [10] Algunos historiadores de la ciencia señalan la creencia en retornos cíclicos como un factor determinante en debilitar la esperanza de progreso que nutre el quehacer investigativo. Véase, por ejemplo, Eliade, *op. cit.*, y S. L. Jaki, *Science and Creation*, Scottish Academic Press, Edinburgh, 1974. Según Jaki, las raíces de la ciencia moderna se encuentran en la cultura de la Europa medieval, que obtuvo una orientación histórica lineal y abierta a partir de su religión monoteísta, algo que no estaba presente en la Grecia antigua.
- [11] Después de una década de servicio en Praga como el Matemático Imperial (es decir, el astrólogo personal del emperador), Kepler se retiró a la ciudad provincialiana de Linz, en Austria, donde notó que los mercaderes guardaban el vino en toneles y vasijas de varias formas y tamaños sin tener una idea muy exacta de su capacidad líquida. Esto lo inspiró a investigar las maneras de calcular volúmenes de sólidos de revolución, con atención a las pequeñas variaciones naturales en sus dimensiones. Publicó sus resultados en 1615, en un libro titulado *La medición de toneles*.
- [12] Una de las innovaciones de mayor valor que DesCartes introdujo en su *Geometría* fue el uso de letras minúsculas, como x , y , z , para denotar cantidades incógnitas. Anteriormente, se usaba nombres de segmentos, como PM , OT , etc., o bien se usaba palabras o frases para referirse a esas cantidades. El uso de letras simples significó una enorme incremento en la velocidad de hacer cálculos, además de fi-

jar la atención en las posibles dependencias de unas variables sobre otras. (La “hoja de DesCartes” es la curva cúbica $x^3 + y^3 = 3xy$; la parte de la curva con $x \geq 0, y \geq 0$ es un lazo en forma de hoja.)

- [13] En 1665, cuando Newton era estudiante de pregrado en Cambridge, obtuvo un ejemplar del libro de DesCartes (que no formaba parte del currículo estudiantil) y lo estudió sólo, trabajando cientos de ejemplos hasta que logró dominar las ideas de DesCartes sobre curvas. Al mismo tiempo, desarrolló sus propias ideas cinemáticas —concibía las curvas como trazos de puntos móviles y las áreas como rastros de segmentos corredizos— hasta que vio la conexión entre cuadratura y tangencia. Este enorme trabajo creativo está detallado en la biografía de R. S. Westfall, *Never at Rest: a Biography of Isaac Newton*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980.
- [14] Klein se dio cuenta de la importancia de los grupos de transformaciones después de visitar París en 1870 (unos meses antes de la guerra) donde conoció el trabajo de Jordan sobre el uso de grupos en la teoría de ecuaciones. Decidió ensayar una clasificación de las geometrías mediante sus grupos de simetría, y expuso esta idea en un discurso en 1872, al aceptar la cátedra de matemáticas en la Universidad de Erlangen. Este discurso fue reeditado en F. Klein, “Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen” (Consideraciones comparativas sobre nuevas investigaciones geométricas), *Math. Intelligencer* **1** (1978), 23–30. Para más ejemplos de cantidades invariantes bajo simetría, véase J. C. Várilly, *Elementos de Geometría Plana*, Editorial Univ. de Costa Rica, San José, 1988.
- [15] Un estudio muy completo y moderno de las teselaciones y las patrones regulares de figuras planas, ampliamente ilustrado, es el libro de B. Grünbaum y G. C. Shephard, *Tilings and Patterns*, W. H. Freeman, New York, 1987.
- [16] El descubrimiento de la teselación con simetría pentagonal por Penrose en 1975 fue una de las grandes sorpresas de la historia de la geometría. Se sabía que es imposible obtener una teselación *periódica* con simetría pentagonal, pero con las losetas de Penrose se puede armar mosaicos extensos con simetría pentagonal aproximada. Hay ilustraciones bellísimas de estas teselaciones, con instrucciones para fabricar y decorar las losetas, en Grünbaum y Shephard, *op. cit.*, y en M. Gardner, *Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers*, W. H. Freeman, New York, 1989. La autosimilitud de las losetas se debe a las propiedades del “número áureo” $\phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \doteq 1.618$, en particular la igualdad $\phi^2 = \phi + 1 \doteq 2.618$.
- [17] La *geometría no conmutativa* es un modo de analizar la estructura fina de objetos geométricos que resisten los métodos de análisis tradicionales. Por ejemplo, se distinguen muchos mosaicos al definir una “distancia” entre dos de ellos (cuanto menos se parecen, mayor es la distancia); pero sucede que la distancia entre dos mosaicos de Penrose es infinitésimo, porque a gran escala todos se parecen! Sin embargo, el método de Connes asigna a la totalidad de mosaicos de Penrose un grupo de simetría “escondida”: es esencialmente el grupo de números reales de la forma $m + n\phi$, donde m y n son enteros. Consúltese A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, London, 1994.