

# MA-870: GEOMETRÍA DIFERENCIAL

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

II Ciclo Lectivo del 2020

## Introducción

El ámbito natural del cálculo diferencial e integral en varias variables está constituido por espacios topológicos que son localmente euclidianos. Esto significa que cada punto del espacio posee un vecindario abierto homeomorfo a una bola abierta de algún  $\mathbb{R}^n$ ; entonces es posible importar las nociones de función diferenciable y de elemento de volumen desde  $\mathbb{R}^n$  al vecindario de marras. Así se confiere al espacio dado una estructura diferencial, dando lugar a una *variedad diferencial*. Unos ejemplos típicos son las esferas, los toros y los espacios proyectivos, sin omitir el propio  $\mathbb{R}^n$ . Otros ejemplos son los grupos de matrices invertibles (reales o complejos) y las órbitas de acciones (libres y propias) de tales grupos. El tema de este curso es el estudio de la estructura diferencial de tales variedades diferenciales.

Mediante las correspondencias locales con espacios euclidianos, es posible asignar *coordenadas locales* a ciertos abiertos de la variedad. Esto permite transportar el cálculo diferencial ordinario a la variedad, de manera consistente entre las diversas sistemas de coordenadas locales. A partir de ahí, se introduce varias estructuras globales sobre la variedad: campos vectoriales, formas diferenciales, y transformaciones lineales entre ellos. Sobre una variedad *orientable*, es posible definir integrales mediante formas de volumen. Una pieza clave de ese análisis es el llamado teorema de Stokes, que relaciona integrales sobre formas de grados diferentes.

La *geometría* de las variedades diferenciales depende de una estructura suplementaria, necesaria para definir los conceptos de torsión y curvatura. Esta es una *conexión afín*, que determina el desplazamiento paralelo de vectores tangentes. Otra estructura suplementaria es una *métrica riemanniana*, que permite definir una noción intrínseca de distancia entre puntos de la variedad. Dada una métrica, hay una única conexión afín compatible con ella y libre de torsión: con ello es posible calcular diversos invariantes métricos, entre ellos la curvatura escalar.

## Temario

**Variedades diferenciales** Definición y ejemplos de variedades. Funciones y aplicaciones diferenciables, particiones de la unidad. Vectores tangentes y campos vectoriales. Curvas integrales y flujo de un campo vectorial. Grupos de Lie y sus espacios homogéneos. Fibrados principales y fibrados vectoriales, los fibrados tangente y cotangente de una variedad diferencial.

**Formas diferenciales** Formas diferenciales de primer grado y su dualidad con campos vectoriales. Algebra tensorial, formas de grado superior. La derivada exterior de una forma diferencial, derivadas de Lie de campos vectoriales y formas. Formas cerradas y exactas, el lema de Poincaré.

**Integración en variedades** Variedades orientables. Integrales de  $n$ -formas. Cadenas y homología singular. Cohomología de de Rham, el teorema de Stokes.

**Conexiones y curvatura** Transporte paralelo de campos vectoriales. Conexiones afines, derivadas covariantes, símbolos de Christoffel, curvas geodésicas. Métricas riemannianas y conexiones de Levi-Civita. Curvatura riemanniana, tensores de Ricci, curvatura escalar. Espacios de curvatura constante, geometría esférica.

## Bibliografía

El curso seguirá mayormente los lineamientos de los libros *An Introduction to Manifolds* y *Differential Geometry* de Loring Tu. He aquí una selección de libros de mucha utilidad para este curso.

- [1] R. Abraham, J. E. Marsden and T. Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*, Springer, New York, 1988.
- [2] L. Conlon, *Differentiable Manifolds*, 2<sup>a</sup> edición, Birkhäuser, Boston, 2008.
- [3] M. Crampin y F. A. E. Pirani, *Applicable Differential Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [4] J. A. Dieudonné, *Éléments d'Analyse*, tomo 3, Gauthier-Villars, París, 1974.
- [5] H. Flanders, *Differential Forms*, Academic Press, Orlando, FL, 1963.
- [6] T. Frankel, *The Geometry of Physics: An Introduction*, 3<sup>a</sup> edición, Cambridge University Press, New York, 2012.

- [7] S. Helgason, *Differential Geometry, Lie Groups, and Symmetric Spaces*, Academic Press, New York, 1978.
- [8] J. M. Lee, *Manifolds and Differential Geometry*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2009.
- [9] J. R. Munkres, *Analysis on Manifolds*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1991.
- [10] A. N. Pressley, *Elementary Differential Geometry*, Springer, Berlin, 2010.
- [11] L. A. Santaló, *Introducción a la geometría diferencial de variedades diferenciables*, Universidad de Buenos Aires, 1965.
- [12] M. D. Spivak, *Cálculo en Variedades*, Reverté, Barcelona, 1975.
- [13] M. D. Spivak, *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, tomo 1, Publish or Perish, Berkeley, CA, 1979.
- [14] C. H. Taubes, *Differential Geometry: Bundles, Connections, Metrics and Curvature*, Oxford University Press, Oxford, 2011.
- [15] L. W. Tu, *An Introduction to Manifolds*, Springer, New York, 2008.
- [16] L. W. Tu, *Differential Geometry*, Springer, Cham, Suiza, 2017.

## Notaciones y convenios

Un curso de cálculo en varias variables es prerequisite de esta materia. Cabe mencionar algunos detalles de notación, aunque el lector ya habrá visto la mayoría de ellos.

- ◇ Las letras  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{C}$  denotan los números *naturales*,<sup>1</sup> *enteros*, *racionales*, *reales* y *complejos*, respectivamente.
- ◇ Si  $A$  y  $B$  son conjuntos disjuntos,  $A \cap B = \emptyset$ , su *unión disjunta* es  $\underline{A \uplus B}$ .
- ◇ Si  $R(x)$  es una relación lógica que depende de un parámetro  $x$ , se escribe:

$$\llbracket R(x) \rrbracket := \begin{cases} 1, & \text{si } R(x) \text{ es CIERTO;} \\ 0, & \text{si } R(x) \text{ es FALSO.} \end{cases}$$

---

<sup>1</sup>Los autores franceses usan  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$  y escriben  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \dots\}$ . En cambio, los autores alemanes suelen poner  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$  y  $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ . El lector debe cerciorarse si un determinado libro considera 0 como número natural o no. En estos apuntes, se seguirá el convenio francés, en el cual  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Esta función booleana se conoce como la *notación de Iverson*.<sup>2</sup> Por ejemplo, la *función indicatriz*  $\chi_A$  de un conjunto  $A$  se define como

$$\chi_A(x) := \llbracket x \in A \rrbracket = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A; \\ 0, & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

La función de signo sobre  $\mathbb{R}$  vale 1, 0,  $-1$  para un número positivo, cero o negativo, respectivamente. Su definición es simplemente

$$\text{signo}(t) := \llbracket t > 0 \rrbracket - \llbracket t < 0 \rrbracket.$$

La *delta de Kronecker*, comúnmente escrito  $\delta_{jk}$  o  $\delta_j^k$ , también se puede definir así:

$$\delta_{jk} = \llbracket j = k \rrbracket := \begin{cases} 1, & \text{si } j = k; \\ 0, & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

- ◊ Las coordenadas de un vector en  $\mathbb{R}^n$  se denotarán por *superíndices* (exponentes) en vez de subíndices:

$$x = (x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n.$$

Al tomar potencias de coordenadas, el uso de paréntesis evita ambigüedades; así, la norma euclidiana de  $x \in \mathbb{R}^n$  es:

$$\|x\| := \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^n)^2}.$$

Una lista de *vectores* empleará subíndices. Por ejemplo, la base ortonormal usual de  $\mathbb{R}^n$  será denotada por  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .

- ◊ Las formas  $\mathbb{R}$ -lineales  $\xi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  constituyen el espacio vectorial dual  $(\mathbb{R}^n)^*$  – a veces denotado por  $\mathbb{R}_n$ . Con respecto a la *base dual*  $\{\epsilon^1, \dots, \epsilon^n\}$ , definida por las relaciones  $\epsilon^i(e_j) = \llbracket i = j \rrbracket$ , los componentes de  $\xi$  se denotan por subíndices:

$$\xi = \xi_1 \epsilon^1 + \xi_2 \epsilon^2 + \dots + \xi_n \epsilon^n.$$

Entonces la evaluación de la forma lineal  $\xi$  sobre el vector  $x$  se presenta así:

$$\langle \xi, x \rangle \equiv \xi(x) = \xi_1 x^1 + \xi_2 x^2 + \dots + \xi_n x^n =: \xi_k x^k.$$

---

<sup>2</sup>Este símbolo fue introducido por Kenneth Iverson, el inventor del lenguaje de computación *APL*, en su libro *A Programming Language* (Wiley, New York, 1962). Fue recomendado por Donald Knuth para uso general, en: Donald E. Knuth, *Two notes on notation*, *American Mathematical Monthly* **99** (1992), 403–422. Véase también el libro: Ronald L. Graham, Donald E. Knuth and Oren Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1989.

- ◇ La notación  $\xi_k x^k$  al lado derecho de la última fórmula usa el **convenio de Einstein** para sumatorias: en una expresión con índices, se suma sobre todos los valores de cualquier índice que se repite una vez como subíndice y otra vez como superíndice, salvo indicación expresa de lo contrario.
- ◇ Los corchetes angulares  $\langle -, - \rangle$  también señalan una **dualidad** entre dos espacios vectoriales: la expresión  $\langle \xi, x \rangle$  es  $\mathbb{R}$ -lineal en  $x$  si  $\xi$  es fijo, y es  $\mathbb{R}$ -lineal en  $\xi$  si  $x$  es fijo. Se trata, entonces, de una aplicación *bilineal* de  $(\mathbb{R}^n)^* \times \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}$ .
- ◇ Si la entrada  $(i, j)$  de una matriz  $A$  se denota por  $a_{ij}$ , la matriz misma se denota por  $A = [a_{ij}]$ , sin más detalle. Se sobreentiende que los índices  $i, j$  recorren todos los valores permisibles.
- ◇ Si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es  $m$  veces continuamente diferenciable y  $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{N}$  cumplen  $|\mathbf{r}| \equiv r_1 + \dots + r_n = m$ , la letra  $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{N}$  denota un **multiíndice** y la derivada parcial correspondiente de  $f$ , de orden  $m$ , se denota por

$$\frac{\partial^{\mathbf{r}} f}{\partial x^{\mathbf{r}}} := \frac{\partial^{r_1 + \dots + r_n} f}{\partial^{r_1} x^1 \dots \partial^{r_n} x^n}.$$

- ◇ Si un vector en  $\mathbb{R}^n$  se expresa en coordenadas locales como  $\mathbf{x} = (x^1, \dots, x^n)$ , las derivadas parciales correspondientes se expresan con subíndices:  $\partial_j = \partial / \partial x^j$  para  $j = 1, \dots, n$ .
- ◇ Se adopta el siguiente convenio para *omitir un elemento de una lista*. Dada una lista ordenada  $(X_1, \dots, X_k)$ , se escribe un *techo*  $\widehat{\phantom{x}}$  sobre la entrada  $X_j$  para denotar su *ausencia* de la lista:

$$(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k) := (X_1, \dots, X_{j-1}, X_{j+1}, \dots, X_k).$$

# Índice general

	Introducción	1
<b>1</b>	<b>Variedades diferenciales</b>	<b>1-1</b>
1.1.	Definición y ejemplos de variedades	1-2
1.2.	Aplicaciones diferenciables	1-8
1.3.	Vectores tangentes	1-16
1.4.	Subvariedades	1-20
1.5.	Campos vectoriales	1-25
1.6.	Curvas integrales y flujos	1-32
1.7.	Grupos de Lie	1-35
1.8.	Espacios homogéneos	1-45
1.9.	Fibrados	1-48
1.10.	Ejercicios sobre variedades diferenciales	1-52
<b>2</b>	<b>Formas diferenciales</b>	<b>2-1</b>
2.1.	Formas diferenciales de primer grado	2-1
2.2.	Álgebra tensorial y álgebra exterior	2-4
2.3.	Formas diferenciales de grado superior	2-9
2.4.	La derivada exterior	2-15
2.5.	La derivada de Lie	2-22
2.6.	Formas cerradas y exactas	2-27
2.7.	Suplemento: cálculo de Cartan	2-32
2.8.	Ejercicios sobre formas diferenciales	2-34
<b>3</b>	<b>Integración en variedades</b>	<b>3-1</b>
3.1.	Variedades orientables	3-1
3.2.	Integrales de $n$ -formas	3-8
3.3.	Símplices y cadenas	3-10
3.4.	El teorema de Stokes	3-18
3.5.	Ejercicios sobre integración en variedades	3-28
<b>4</b>	<b>Conexiones y Curvatura</b>	<b>4-1</b>
4.1.	Transporte paralelo y conexiones afines	4-1
4.2.	Métricas riemannianas	4-7
4.3.	Tensores de curvatura	4-14
4.4.	Fibrados principales y formas de conexión	4-20
4.5.	Ejercicios sobre conexiones y curvatura	4-32

## 1 Variedades diferenciales

*Physics is very interesting. There are many, many interesting theorems in physics. Unfortunately, there are no definitions.*

— David Kazhdan<sup>1</sup>

Una *variedad diferencial*  $M$  de dimensión  $n$  es un espacio topológico que es localmente homeomorfo al espacio euclidiano  $\mathbb{R}^n$ ; esto significa que cada uno de sus puntos posee un vecindario homeomorfo a una bola abierta de  $\mathbb{R}^n$ . Se trata de transferir el cálculo diferencial e integral de funciones sobre  $\mathbb{R}^n$  a  $M$ , tomando en cuenta que las correspondencias con bolas en  $\mathbb{R}^n$  pueden variar de un punto a otro.

Para efectuar dichas correspondencias, se toma una colección de abiertos que cubren  $M$  acompañados con homeomorfismos hacia abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Este juego de *cartas locales* define la estructura diferencial de  $M$ , siempre y cuando aquellos homeomorfismos cuyos dominios traslapan sean compatibles. Antes de abordar la teoría diferencial en detalle, conviene repasar algunos conceptos topológicos.

**Definición 1.1.** Un **espacio topológico** es un conjunto  $X$  dotado de una colección  $\mathcal{T}$  de partes de  $X$  (esa colección  $\mathcal{T}$  es la **topología**) que satisface tres condiciones:

- (a)  $X \in \mathcal{T}$  y  $\emptyset \in \mathcal{T}$  ( $\emptyset$  denota el conjunto vacío).
- (b) Si  $U, V \in \mathcal{T}$ , entonces  $U \cap V \in \mathcal{T}$ .
- (c) Si  $\{U_\alpha : \alpha \in A\} \subseteq \mathcal{T}$ , entonces  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \mathcal{T}$ .

Los elementos de  $\mathcal{T}$  son los **abiertos** (o *partes abiertas*) de  $X$ . Un **vecindario** de  $x \in X$  es una parte  $V \subseteq X$  que incluye un abierto  $U \in \mathcal{T}$  que contiene  $x$ , o sea:  $x \in U \subseteq V$ . Una parte de  $X$  es abierta si y solo si es un vecindario de cada uno de sus propios puntos.

Sus complementos  $\{X \setminus U : U \in \mathcal{T}\}$  son los **cerrados** (o *partes cerradas*) de  $X$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.2.** Una **bola abierta** en  $\mathbb{R}^n$ , con centro  $x \in \mathbb{R}^n$  y radio  $r > 0$ , es el conjunto

$$B(x; r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| < r\}.$$

La *topología usual* de  $\mathbb{R}^n$  es la colección de uniones arbitrarias  $U = \bigcup_{\alpha \in A} B(x_\alpha; r_\alpha)$ . En este caso, basta tomar *uniones numerables*, porque cada  $B(x; r)$  es una unión numerable de bolas abiertas con centro en  $\mathbb{Q}^n$  y radio positivo en  $\mathbb{Q}$ .

La *bola cerrada*  $\bar{B}(x; r) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - x\| \leq r\}$  es un cerrado de  $\mathbb{R}^n$ .  $\diamond$

---

<sup>1</sup>Citado por James Milne en su página web, (<http://www.jmilne.org/math/index.html>).

**Ejemplo 1.3.** Si  $X \subset \mathbb{R}^n$ , sea  $\mathcal{T} := \{X \cap U : U \text{ abierto en } \mathbb{R}^n\}$ ; esta  $\mathcal{T}$  es la llamada **topología relativa** de  $X$ . Los cerrados de  $X$  son  $\{X \cap C : C \text{ cerrado en } \mathbb{R}^n\}$ .

De esta manera se define la “topología usual” de conjuntos como la **esfera**

$$\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\},$$

que se determinan en primera instancia como partes de  $\mathbb{R}^n$ . ◇

Por la Definición 1.1(c), una intersección arbitraria de cerrados en  $X$  es cerrada. Si  $A \subseteq X$  la intersección de cerrados que incluyen  $A$  es un cerrado  $\bar{A}$ , la **clausura** de  $A$ . Una parte  $A \subseteq X$  es **densa** en  $X$  si  $\bar{A} = X$ . Dícese que  $X$  es **separable** si alguna parte numerable es densa; por ejemplo,  $\mathbb{R}^n$  es separable porque  $\mathbb{Q}^n$  es una parte densa.

**Definición 1.4.** En un conjunto  $X$ , una función  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  es una **distancia métrica** si  $d$  es *simétrica*:  $d(x, y) = d(y, x)$  para  $x, y \in X$ ; *definida*:  $d(x, x) = 0$  si y solo si  $x = 0$ ; y cumple la *desigualdad triangular*:  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  para  $x, y, z \in X$ .

Una distancia  $d$  define *bolas abiertas*  $B_d(x; r) := \{y \in X : d(x, y) < r\}$ . Las uniones  $U = \bigcup_{\alpha \in A} B_d(x_\alpha; r_\alpha)$  son los abiertos de la *topología métrica* de  $X$ . Un espacio topológico es **metrizable** si su topología está dada por una métrica. Los espacios euclidianos  $\mathbb{R}^n$  (y sus partes  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  con las topologías relativas) son metrizablees. ◇

**Definición 1.5.** Una función  $f: X \rightarrow Y$  entre dos espacios topológicos es **continua** si para todo abierto  $V$  de  $Y$  su *preimagen*  $f^{-1}(V) := \{x \in X : f(x) \in V\}$  es abierto en  $X$ .

Una sucesión  $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq X$  **converge** a  $x \in X$  (escrito  $x_k \rightarrow x$ ) si para cada vecindario  $V$  de  $x$  hay  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_k \in V$  para  $k \geq N$ . Si  $f: X \rightarrow Y$  es continua, entonces  $x_k \rightarrow x$  en  $X$  implica  $f(x_k) \rightarrow f(x)$  en  $Y$ . El inverso (una función que preserva la convergencia de sucesiones es continua) es válido si  $X$  y  $Y$  son metrizablees y separables.

Un **homeomorfismo** entre dos espacios topológicos  $X, Y$  es una aplicación biyectiva y continua  $f: X \rightarrow Y$  tal que  $f^{-1}: Y \rightarrow X$  es también continua. En tal caso,  $U \leftrightarrow f(U)$  es una correspondencia biunívoca entre las topologías de  $X$  y  $Y$ ; y se dice que los espacios topológicos  $X$  y  $Y$  son *homeomorfos*. ◇

## 1.1. Definición y ejemplos de variedades

**Definición 1.6.** Sea  $M$  un espacio topológico metrizable y separable.<sup>2</sup> Una **carta local**  $n$ -dimensional para  $M$  es un par  $(U, \phi)$ , donde el *dominio*  $U$  de  $\phi$  es un abierto de  $M$ ,  $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ , y  $\phi: U \rightarrow \phi(U)$  es un homeomorfismo.

<sup>2</sup>Algunos autores admiten una clase más amplia de espacios topológicos subyacentes, al definir una variedad diferencial: los que son de Hausdorff, paracompactos y cumplen el primer axioma de numerabilidad. Consúltense cualquier texto de topología general para el alcance de esas propiedades.

Si  $(V, \psi)$  es otra carta local para  $M$  con  $U \cap V \neq \emptyset$ , entonces  $\phi(U \cap V)$  y  $\psi(U \cap V)$  son abiertos no vacíos de  $\mathbb{R}^n$ . Las dos cartas son *compatibles* si las **funciones de transición**:

$$\begin{aligned} \psi \circ \phi^{-1} &: \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V), \\ \phi \circ \psi^{-1} &: \psi(U \cap V) \rightarrow \phi(U \cap V), \end{aligned} \tag{1.1}$$

son continuas (de hecho, son homeomorfismos, al ser mutuamente inversos).  $\diamond$

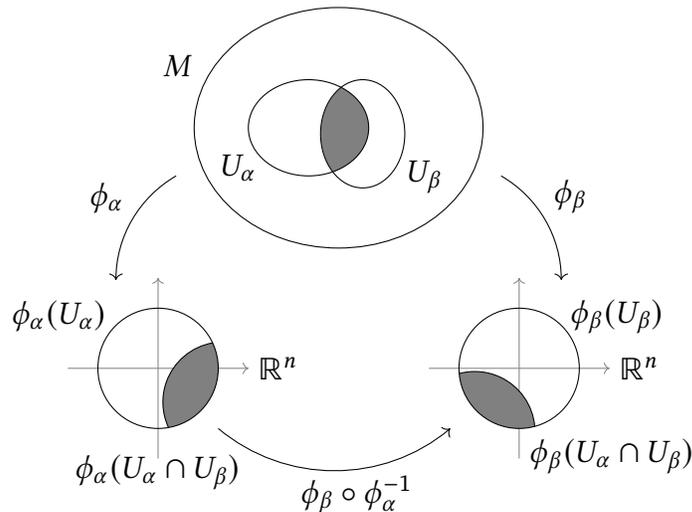


Figura 1.1: Una función de transición entre dos cartas locales

**Definición 1.7.** Un **atlas** sobre  $M$  es un juego  $\mathfrak{A} := \{ (U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A \}$  de cartas locales, todas de la misma<sup>3</sup> dimensión  $n$  y compatibles entre sí, tal que  $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$ .

Dos atlas  $\mathfrak{A}$  y  $\mathfrak{B}$  sobre  $M$  son *equivalentes* si cada carta local  $(U, \phi)$  de  $\mathfrak{A}$  es compatible con cada carta local  $(V, \psi)$  de  $\mathfrak{B}$  tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ ; en otras palabras, si  $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$  es también un atlas. Fíjese que la clase de equivalencia de  $\mathfrak{A}$  contiene un *atlas maximal*, constituido por la totalidad de cartas locales  $(V, \psi)$  compatibles con todas las cartas locales de  $\mathfrak{A}$ .

Una **variedad topológica** de dimensión  $n$  es un espacio topológico  $M$ , metrizable y separable, dotado de una clase de equivalencia de atlas – o bien,  $M$  dotado de un atlas maximal – cuyas cartas tienen imágenes en  $\mathbb{R}^n$ . Se escribe  $\dim M = n$  y se dice que  $n$  es la **dimensión** de esta variedad.<sup>4</sup>  $\diamond$

<sup>3</sup>Un teorema importante de la topología general asegura que un abierto no vacío de  $\mathbb{R}^n$  puede ser homeomorfo con un abierto no vacío de  $\mathbb{R}^m$  solo si  $m = n$ . Esto implica que la dimensión del espacio euclidiano ambiente no es ambigua.

<sup>4</sup>La existencia de una atlas sobre  $M$  indica que el espacio topológico  $M$  es localmente homeomorfo a  $\mathbb{R}^n$ ; en particular,  $M$  es localmente conexo y localmente compacto. El conjunto de Cantor es un ejemplo de un espacio topológico metrizable y separable que no admite atlas alguna.

**Definición 1.8.** Sea  $M$  un espacio topológico metrizable y separable. Un atlas sobre  $M$  es un **atlas de clase**  $C^k$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , si todas sus funciones de transición entre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  – véase la Figura 1.1 – son de clase  $C^k$ , es decir, son  $k$  veces continuamente diferenciables.

Por su definición, cada  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  es de clase  $C^0$ , por ser continua. El atlas dado es un **atlas de clase**  $C^\infty$  si es de clase  $C^k$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ ; en otras palabras, *si sus funciones de transición son suaves*.

Una **variedad diferencial** de dimensión  $n$  es un espacio topológico  $M$ , metrizable y separable,<sup>5</sup> dotado de una clase de equivalencia de *atlases de clase*  $C^\infty$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.9.** El **espacio euclidiano**  $\mathbb{R}^n$  con el atlas de una sola carta  $\{(\mathbb{R}^n, 1_{\mathbb{R}^n})\}$ , es una variedad diferencial de dimensión  $n$ .

De igual modo, *cualquier abierto*  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es una variedad diferencial de dimensión  $n$ , cuyo atlas es la sola carta  $\{(U, i)\}$ , donde  $i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  denota la inclusión.  $\diamond$

**Ejemplo 1.10.** Si  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una aplicación suave e inyectiva cuya derivada no se anula,  $\gamma'(t) \neq 0$  para  $t \in \mathbb{R}$ , la trayectoria  $\gamma(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}^n$  no tiene puntos singulares y la función inversa  $\gamma^{-1} : \gamma(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  es suave a lo largo de esta trayectoria. (Este es un caso particular del teorema de la función inversa.) En tal caso  $\gamma(\mathbb{R})$ , dotado de la sola carta  $(\gamma(\mathbb{R}), \gamma^{-1})$ , es una variedad diferencial unidimensional *encajada* en  $\mathbb{R}^n$ .  $\diamond$

[[ En el ejemplo anterior la palabra *trayectoria* denota la imagen de la función  $\gamma$  como una parte de  $\mathbb{R}^n$  (con la topología relativa). El término **curva** se reserva para la función  $\gamma$  misma: una curva es una función continua (en este caso, suave) cuyo dominio es un intervalo de la recta real. En otros contextos se dice que  $\gamma$  es una *parametrización* que recorre la trayectoria  $\gamma(\mathbb{R})$  con una determinada velocidad. ]]

**Ejemplo 1.11.** Considérese la recta  $\mathbb{R}$  dotado de la carta  $(\mathbb{R}, \kappa)$ , donde  $\kappa(t) := t^3$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Nótese que  $\kappa : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una biyección continua con inverso continuo  $s \mapsto s^{1/3}$ ; luego,  $\kappa$  es un homeomorfismo de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  y el atlas  $\{(\mathbb{R}, \kappa)\}$  hace de  $\mathbb{R}$  una variedad topológica indistinguible de la  $\mathbb{R}$  original.

Sin embargo, aunque  $\kappa$  es suave (cualquier polinomio es diferenciable), su función inversa  $\kappa^{-1}$  no es diferenciable en  $s = 0$ , así que las cartas  $(\mathbb{R}, 1_{\mathbb{R}})$  y  $(\mathbb{R}, \kappa)$  serán *incompatibles* si se quiere formar un atlas de clase  $C^1$  o mayor.  $\diamond$

<sup>5</sup>En la geometría algebraica, la palabra **variedad** significa un conjunto de ceros de un juego finito de polinomios. Como tal, puede poseer puntos singulares, como el vértice del cono  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  en  $\mathbb{R}^3$ . En inglés y alemán se emplean palabras distintos: (differential) *manifold* vs. (algebraic) *variety*, (differenzierbare) *Mannigfaltigkeit* vs. (algebraische) *Varietät*; pero en francés y español los vocablos *variété* y *variedad* se usan en los dos contextos.

A continuación se introducirá varios ejemplos de variedades diferenciales  $M$  con un atlas  $\mathfrak{A}$  declarado. El atlas maximal de  $M$  consiste de la familia de cartas compatibles con las cartas de  $\mathfrak{A}$ . (No habrá otra mención de variedades topológicas: en adelante la palabra *variedad* denotará una variedad diferencial.)

**Ejemplo 1.12. El círculo**

$$\underline{\mathbb{S}^1} := \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \} = \{ e^{i\theta} : -\pi < \theta \leq \pi \}$$

es una variedad unidimensional. Su *atlas usual* se compone de dos cartas:

$$\begin{aligned} (U_+ = \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}, -i \log_>), \quad \log_>(re^{i\theta}) &:= \log r + i\theta \text{ para } re^{i\theta} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]; \\ (U_- = \mathbb{S}^1 \setminus \{+1\}, -i \log_<), \quad \log_<(re^{i\phi}) &:= \log r + i\phi \text{ para } re^{i\phi} \in \mathbb{C} \setminus [0, +\infty). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Fíjese que  $-i \log_>(U_+) = (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$  y  $-i \log_<(U_-) = (0, 2\pi) \subset \mathbb{R}$ . Las funciones de transición son las traslaciones  $\theta \mapsto (\theta + \pi)$  para  $\theta \neq 0$ ;  $\phi \mapsto (\phi - \pi)$  para  $\phi \neq \pi$ . Estas funciones afines son obviamente suaves.  $\diamond$

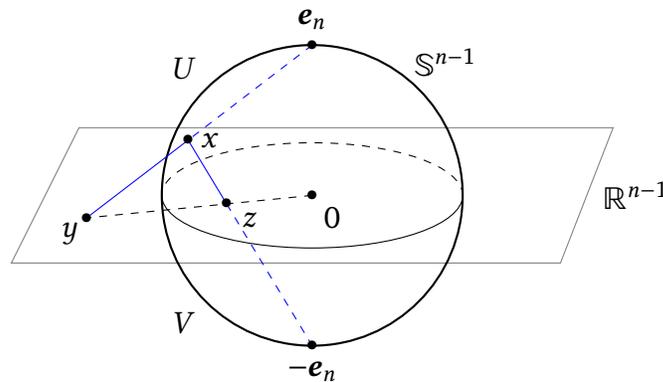


Figura 1.2: Dos proyecciones estereográficas de  $\mathbb{S}^{n-1}$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$

**Ejemplo 1.13.** La **esfera**  $\underline{\mathbb{S}^{n-1}} := \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1 \}$  es una variedad diferencial de dimensión  $(n-1)$ . Al quitar su *polo norte*  $e_n$  o su *polo sur*  $-e_n$  se obtiene un par de abiertos  $U := \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{e_n\}$ ,  $V := \mathbb{S}^{n-1} \setminus \{-e_n\}$  que cubren la esfera, pues  $U \cup V = \mathbb{S}^{n-1}$ . Defínase  $\phi: U \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  y  $\psi: V \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$  por las **proyecciones estereográficas** (Figura 1.2):

$$\phi(x) := \frac{1}{1 - x^n}(x^1, \dots, x^{n-1}), \quad \psi(x) := \frac{1}{1 + x^n}(x^1, \dots, x^{n-1}).$$

Si  $y = \phi(x)$ ,  $z = \psi(x)$  en  $\mathbb{R}^{n-1}$ , entonces  $\|y\|^2 = \frac{1 - (x^n)^2}{(1 - x^n)^2} = \frac{1 + x^n}{1 - x^n}$ , por lo tanto

$$\phi^{-1}(y) = \frac{1}{1 + \|y\|^2} (2y^1, \dots, 2y^{n-1}, \|y\|^2 - 1),$$

y por ende

$$z = \psi \circ \phi^{-1}(y) = \frac{1}{\|y\|^2} (y^1, \dots, y^{n-1}) = \frac{y}{\|y\|^2}$$

para  $y \in \phi(U \cap V) = \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ .

Es evidente que  $\psi \circ \phi^{-1}$  es una biyección suave de  $\mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$  en sí mismo.  $\llbracket$  Esta es la inversión en la esfera ecuatorial  $\mathbb{S}^{n-2}$ .  $\rrbracket$  En este caso  $\psi(U \cap V) = \phi(U \cap V)$  y  $\phi \circ \psi^{-1}: z \mapsto z/\|z\|^2$  también. Luego estas dos cartas forman un atlas que determina una estructura de variedad diferencial sobre la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.14.** El **plano proyectivo real**  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 := \{L \leq \mathbb{R}^3 : \dim L = 1\}$  es el conjunto de todas las rectas que pasan por el origen de  $\mathbb{R}^3$ . Si  $x = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ , la recta  $L_x$  que pasa por 0 y  $x$  se denota por las **coordenadas homogéneas**  $\bar{x} = [x^1 : x^2 : x^3]$  (en vista de que  $[tx^1 : tx^2 : tx^3] = [x^1 : x^2 : x^3]$  para  $t \neq 0$ ). Se debe observar que  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$  donde

$$U_j := \{[x^1 : x^2 : x^3] : x^j \neq 0\} \quad \text{para } j = 1, 2, 3.$$

La topología de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  se define como sigue:<sup>6</sup> una parte  $V \subseteq \mathbb{R}\mathbb{P}^2$  es un abierto de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  si y solo si  $\tilde{V} = \bigcup_{x \in V} (L_x \setminus \{0\})$  es abierto en  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Las aplicaciones biyectivas  $\phi_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}^2$  dadas por

$$\phi_1(\bar{x}) := \left( \frac{x^2}{x^1}, \frac{x^3}{x^1} \right), \quad \phi_2(\bar{x}) := \left( \frac{x^1}{x^2}, \frac{x^3}{x^2} \right), \quad \phi_3(\bar{x}) := \left( \frac{x^1}{x^3}, \frac{x^2}{x^3} \right) \quad (1.3)$$

son bien definidas y continuas. Fíjese que cada  $\phi_j(U_j \cap U_k)$  es igual a  $\mathbb{R}^2$  menos uno de sus ejes coordenados. Es evidente que

$$\phi_1^{-1}(y^1, y^2) = [1 : y^1 : y^2], \quad \phi_2 \circ \phi_1^{-1}(y^1, y^2) = \left( \frac{1}{y^1}, \frac{y^2}{y^1} \right). \quad (1.4)$$

Las otras funciones de transición  $\phi_k \circ \phi_j^{-1}$  son del mismo estilo. Todos sus componentes son cocientes de polinomios (de primer grado, en este caso) que no se anulan en sus

<sup>6</sup>El conjunto  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  puede considerarse como un cociente de  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  bajo la relación de equivalencia:  $x \sim y$  si y solo si  $y = tx$  para algún  $t \neq 0$ ; la clase de equivalencia de  $x$  es  $L_x \setminus \{0\}$ . Esta definición de abiertos en  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  se conoce como la *topología cociente*: es la topología más fuerte tal que la aplicación cociente  $x \mapsto (L_x \setminus \{0\})$  es continua.

dominios, y por ende son funciones suaves de dos variables. Luego  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , con este atlas de tres cartas locales, es una variedad diferencial de dimensión 2.

El plano proyectivo  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ , visto como conjunto sin estructura diferencial, es un *espacio homogéneo* definido por la acción del grupo multiplicativo  $\underline{\mathbb{R}}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  sobre el conjunto  $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  por multiplicación escalar,  $t \cdot x := tx \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ . Las *órbitas* de esta acción de grupo son rectas menos el origen,  $L_x \setminus \{0\}$ .

Otra definición de  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  viene de considerar la acción del grupo  $C_2 = \{1, -1\}$  sobre la esfera  $\mathbb{S}^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = 1\}$ , por  $(-1) \cdot x := -x \in \mathbb{S}^2$ . Ahora las órbitas son *pares de puntos antipodales*  $\{x, -x\}$ . Esta acción de grupo se obtiene del anterior al imponer las ligaduras  $\|x\| = 1$  y  $|t| = 1$ . Nótese que  $\mathbb{S}^2 = V_1 \cup V_2 \cup V_3$  donde cada  $V_k$  es el abierto  $\mathbb{S}^2 \setminus \{e_k, -e_k\}$  cocientado por  $x \sim -x$ . Se definen tres cartas locales  $(V_k, \psi_k)$  por las mismas fórmulas respectivas (1.3) que definen los  $\phi_k$ . Esta estructura diferencial sobre  $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$  coincide con la anterior.  $\diamond$

**Definición 1.15.** Si  $M$  y  $N$  son dos variedades diferenciales de dimensiones respectivas  $n$  y  $m$ , con atlas  $\mathfrak{A} := \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$  y  $\mathfrak{B} := \{(V_\beta, \psi_\beta) : \beta \in B\}$  sobre  $M$  y  $N$  respectivamente, su *producto cartesiano*  $M \times N$  posee el atlas  $\{(U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta)\}$ , donde

$$\phi_\alpha \times \psi_\beta : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \mathbb{R}^{n+m} : (x, y) \mapsto (\phi_\alpha(x), \psi_\beta(y)).$$

El espacio topológico  $\underline{M \times N}$ , con este atlas, es la **variedad producto** de  $M$  y  $N$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.16.** La igualdad  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$  es un isomorfismo  $\mathbb{R}$ -lineal de espacios vectoriales y un homeomorfismo de espacios topológicos. Además, la estructura diferencial de variedad producto del lado izquierdo coincide con la estructura diferencial de  $\mathbb{R}^{n+m}$  al lado derecho, porque  $1_{\mathbb{R}^n} \times 1_{\mathbb{R}^m} = 1_{\mathbb{R}^{n+m}}$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.17.** El **toro** (o *2-toro*)  $\underline{\mathbb{T}^2} := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  es el producto cartesiano de dos círculos. (Se usa la letra  $\mathbb{T}$ , de “toro”, como sinónimo de  $\mathbb{S}^1$ ; así,  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{T} \times \mathbb{T}$ .)

Inductivamente, se define el  **$n$ -toro**  $\underline{\mathbb{T}^n} := \mathbb{T} \times \mathbb{T}^{n-1}$  para cualquier  $n \in \mathbb{N}^*$ . Esta es una variedad diferencial de dimensión  $n$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.18.** Sea  $\underline{\text{SU}(2)}$  el conjunto de matrices complejas  $2 \times 2$ ,  $u \in M_2(\mathbb{C})$ , que son *unitarios*:  $uu^* = u^*u = 1_2$  y además *unimodulares*:  $\det u = 1$ . Sus elementos tienen la forma

$$u = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (1.5)$$

Nótese que para  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$  (isomorfismo de espacios  $\mathbb{R}$ -vectoriales), la condición  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  es equivalente a  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{S}^3$ , así que  $\text{SU}(2)$  es topológicamente una esfera tridimensional. Es una variedad diferencial, por ser un caso particular del Ejemplo 1.13.

Sin embargo, se puede usar otra parametrización de sus elementos. No es difícil comprobar que hay ángulos  $\theta, \phi, \psi$  tales que

$$\alpha = e^{i(\phi+\psi)/2} \cos \theta, \quad \beta = e^{i(\phi-\psi)/2} \sin \theta.$$

Hay una carta local  $(V, \chi)$  donde  $V$ , un abierto denso en  $SU(2)$ , está dada por las condiciones  $-\pi < \theta < \pi, -2\pi < \phi < 2\pi, -2\pi < \psi < 2\pi$ . Fíjese que  $1_2 \in V$ .  $\diamond$

### 1.2. Aplicaciones diferenciables

Si  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $V \subseteq \mathbb{R}^m$  son dos abiertos en espacios euclidianos, conviene recordar la definición de *aplicación diferenciable* de  $U$  en  $V$ . Una función  $f: U \rightarrow V$  es **diferenciable** en  $x \in U$  si hay una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal  $L_x: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que, para cada  $\varepsilon > 0$  vale

$$\|f(x+h) - f(x) - L_x(h)\| < \varepsilon \|h\| \quad \text{toda vez que} \quad \|h\| < \delta,$$

donde  $\delta = \delta(\varepsilon)$  puede depender de  $\varepsilon$  y además  $B(x, \delta) \subseteq U$ . En otras palabras, la aplicación  $h \mapsto f(x+h) - f(x)$  puede ser aproximado hasta primer orden por una función lineal  $L_x \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . En segundo lugar, se dice que  $f$  es **continuamente diferenciable** en  $U$ , o **de clase  $C^1$**  en  $U$ , si además la aplicación  $x \mapsto L_x$  es continua en el dominio  $U$ . Al escribir  $\underline{Df}(x) := L_x$  se obtiene una función  $Df: U \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ , la cual es continua si  $f$  es de clase  $C^1$ ; esta  $Df$  es la **derivada** de la función diferenciable  $f$ .

Este formalismo “libre de coordenadas” es excelente para ciertos propósitos, entre ellos para demostrar la **regla de la cadena**:

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \cdot Df(x), \tag{1.6}$$

cuando  $g: V \rightarrow W \subseteq \mathbb{R}^k$  es otra función continuamente diferenciable en  $V$ ; el punto al lado derecho indica la composición de aplicaciones lineales en  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^k)$  y  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ . Sin embargo, resulta incómodo que la derivada  $Df$  tenga imagen en un espacio euclidiano de mayor dimensión, si  $n > 1$ ; y en casos concretos es preferible emplear coordenadas cartesianas. Para ello, se escribe la aplicación lineal  $Df(x)$  como *una matriz de derivadas parciales*:

$$Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^m}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^m}{\partial x^n} \end{pmatrix} \equiv \left[ \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right]. \tag{1.7}$$

Por lo tanto,  $f$  es de clase  $C^1$  (es decir,  $Df$  es continua) si y solo si todas sus derivadas parciales  $\partial f^i / \partial x^j$  son continuas.

En seguida, dicese que  $f$  es **de clase**  $C^2$  si su derivada  $Df$  es de clase  $C^1$ , o sea, si todas las derivadas parciales de segunda orden  $\partial^2 f^i / \partial x^j \partial x^k$  son continuas. Nótese que, para  $x \in U$ , la aplicación lineal  $D^2 f(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  puede ser considerada como una aplicación *bilineal* de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  en  $\mathbb{R}^m$ . Un teorema conocido (de Euler) asegura que la continuidad de  $D^2 f$  garantiza que esta aplicación bilineal es *simétrica*; esto es, que las derivadas parciales mixtas de segundo orden coinciden:

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} = \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^k \partial x^j} \quad \text{para todo } j, k = 1, \dots, n.$$

Por inducción,  $f$  es de clase  $C^{k+1}$  si  $Df$  es de clase  $C^k$ . Dicese que  $f$  es **suave** o **de clase**  $C^\infty$  si  $f$  es de clase  $C^k$  para todo  $k$ ; en cuyo caso,  $Df$  es también suave y las derivadas parciales de orden superior de  $f$  son invariantes bajo permutaciones de las variables  $x^j$ .

**Lema 1.19** (Hadamard). *Si  $f: B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función de clase  $C^{k+1}$  definida en una bola centrada en  $x \in \mathbb{R}^n$ , entonces hay funciones  $g_1, \dots, g_n: B(x, r) \rightarrow \mathbb{R}$ , todas de clase  $C^k$ , tales que*

$$f(y) = f(x) + \sum_{j=1}^n (y^j - x^j) g_j(y) \quad \text{para } \|y - x\| < r. \quad (1.8)$$

*Demostración.* Para  $y \in B(x, r)$ , defínase  $u_y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  por  $u_y(t) := f((1-t)x + ty)$ . Entonces la función  $u_y$  es  $(k+1)$  veces diferenciable, con  $u_y(0) = f(x)$ ,  $u_y(1) = f(y)$ . El teorema fundamental del cálculo y la regla de la cadena muestran que

$$\begin{aligned} u_y(1) - u_y(0) &= \int_0^1 u'_y(t) dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n (y^j - x^j) \frac{\partial f}{\partial x^j}((1-t)x + ty) dt \\ &= \sum_{j=1}^n (y^j - x^j) \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}((1-t)x + ty) dt. \end{aligned}$$

Basta con definir

$$g_j(y) := \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x^j}((1-t)x + ty) dt \quad \text{para } \|y - x\| < r.$$

Se verifica fácilmente, con la regla de la cadena, que cada  $g_j$  es de clase  $C^k$ . De hecho, para el caso  $k = 0$ , se ve que  $g_j$  es continua porque el integrando es continuo en las variables  $(y, t)$ . Nótese bien que  $g_j(x) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$  para cada  $j$ .  $\square$

► Antes de proseguir, conviene recordar ciertos resultados clásicos sobre funciones diferenciables de varias variables, que se supondrán conocidos.<sup>7</sup>

**Definición 1.20.** Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función diferenciable definida en un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Si  $x \in U$ , la aplicación lineal  $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  posee una matriz cuadrada en  $M_n(\mathbb{R})$ , con respecto de la base usual de  $\mathbb{R}^n$ . El **jacobiano** de  $f$  es la función  $Jf: U \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$Jf(x) := \det Df(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^1}{\partial x^n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^n}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial f^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} \equiv \left| \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right|. \quad (1.9)$$

Nótese que  $Df(x)$  es una aplicación lineal invertible si y solo si  $Jf(x) \neq 0$ . ◊

**Teorema 1.21** (de la aplicación inversa). *Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase  $C^1$  definida en un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Si  $Jf(x) \neq 0$  para algún  $x \in U$ , entonces hay un vecindario abierto  $V$  de  $x$  con  $V \subseteq U$ , con  $f(V)$  abierto en  $\mathbb{R}^n$ , donde la restricción  $f|_V$  es uno-a-uno. La biyección diferenciable  $f|_V: V \rightarrow f(V)$  tiene una función inversa  $g: f(V) \rightarrow V$ , la cual es también de clase  $C^1$  con*

$$Jg(f(y)) = \frac{1}{Jf(y)} \quad \text{para todo } y \in V.$$

Si  $f$  es de clase  $C^k$  en  $U$ , la función inversa local  $g$  también es de clase  $C^k$  en  $f(V)$ . ◻

Nótese que la función original  $f$  no tiene que ser uno-a-uno. Si  $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ , tómese  $f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$ , obviamente dos-a-uno (es la versión real del cuadrado  $z \mapsto z^2$  para  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ). Entonces  $Jf(x, y) = 4x^2 + 4y^2 > 0$  para  $(x, y) \in U$ . El punto  $(1, 0) \in U$  posee un vecindario abierto  $V$ , por ejemplo el semiplano  $x > 0$ , en donde  $f$  sí es uno-a-uno. En tal caso,  $f(V)$  es el “plano cortado”  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ ; la función inversa local es  $re^{i\theta} \mapsto \sqrt{r} e^{i\theta/2}$  definido para  $r > 0$ ,  $-\pi < \theta < \pi$ . En un vecindario del punto  $(-1, 0)$ , se debe usar otra rama de la raíz cuadrada compleja.

► Considérese una función diferenciable  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$  con  $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  abierto. En un punto  $(x_0, y_0) \in U$ , la derivada  $Df(x_0, y_0)$  tiene una matriz de dos bloques  $D_1f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$  y  $D_2f(x_0, y_0) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p)$ . En términos de las inclusiones  $i_1: \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}: x \mapsto (x, y_0)$  e  $i_2: \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}: y \mapsto (x_0, y)$ , estos bloques son las derivadas de las funciones  $f \circ i_1$  y  $f \circ i_2$  en los puntos respectivos  $x_0, y_0$ .

<sup>7</sup>Estos teoremas están enunciadas y demostradas en muchos textos de análisis. Consúltese, por ejemplo, en los libros de Abraham, Marsden y Ratiu; de Conlon; de Munkres; y de Spivak (ambos), entre los libros de la bibliografía. Véase también el capítulo 10 del libro: J. A. Dieudonné, *Fundamentos de análisis moderno*, Reverté, Barcelona, 1976.

**Teorema 1.22** (de la función implícita). *Si  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función de clase  $C^1$  definida en un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  y si  $(x_0, y_0) \in U$  es un punto donde  $f(x_0, y_0) = 0$  y  $D_2f(x_0, y_0)$  es invertible, entonces hay vecindarios abiertos  $V$  de  $x_0$  en  $\mathbb{R}^n$  y  $W$  de  $y_0$  en  $\mathbb{R}^m$  y una aplicación  $g: V \rightarrow W$  de clase  $C^1$  tales que*

$$f(x, y) = 0 \text{ para } (x, y) \in V \times W \iff y = g(x) \text{ para } x \in V.$$

La derivada de  $g$  está dada por

$$Dg(x) = -D_2f(x, g(x))^{-1} \cdot D_1f(x, g(x)) \text{ para todo } x \in V.$$

Si  $f$  es de clase  $C^k$  en  $U$ , entonces  $g$  es de clase  $C^k$  en  $V$ . □

**Definición 1.23.** Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $C^1$  definida en un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . El **rango de  $f$  en un punto  $x \in U$**  es el rango de la aplicación lineal  $Df(x)$ . Este rango es, a su vez, el número de columnas linealmente independientes en la matriz de  $Df(x)$ ; o bien, el mayor  $r \in \mathbb{N}$  tal que esa matriz tenga un menor  $r \times r$  diferente de 0. Por la continuidad de  $Df$ , los mismos menores de  $Df(y)$  no son ceros para  $y$  en algún vecindario de  $x$ ; por lo cual el rango de  $Df(y)$  es *mayor o igual que* el rango de  $Df(x)$ . En otras palabras,<sup>8</sup> el conjunto  $V_x := \{y \in U : \text{rango } Df(y) \geq \text{rango } Df(x)\}$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ . ◇

**Teorema 1.24** (del rango). *Sea  $f: U \rightarrow \mathbb{R}^m$  una función de clase  $C^k$  definida en un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , de rango constante  $r$  en un vecindario de  $x \in U$ . Entonces hay vecindarios abiertos  $V$  de  $x$  y  $W$  de  $f(x)$ , junto con biyecciones  $\phi: V \rightarrow \phi(V) \subseteq \mathbb{R}^n$  y  $\psi: W \rightarrow \psi(W) \subseteq \mathbb{R}^m$  con  $\phi, \phi^{-1}, \psi, \psi^{-1}$  todos de clase  $C^k$ , tales que  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(V) \rightarrow \psi(W)$  tenga la forma*

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: (y^1, \dots, y^n) \mapsto (y^1, \dots, y^r, 0, \dots, 0), \text{ para todo } y \in \phi(V). \quad \square$$

La aplicación lineal  $Df(x)$ , de rango  $r$ , posee una matriz  $m \times n$  con un bloque  $1_r$  y otros bloques de ceros, con respecto a ciertas bases de  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  que transforman esa matriz en una “forma escalonada”, por un algoritmo conocido del álgebra lineal. El teorema del rango afirma que la función  $f$  puede ser “rectificada” por cambios de coordenadas locales apropiadas, representadas por las funciones  $\phi$  y  $\psi$ , de tal manera que este algoritmo es aplicable a cada  $Df(y)$  para  $y$  en un vecindario del punto  $x$ . Evidentemente, esto solo es posible si el rango de  $f$  es constante en ese vecindario.

► **Cómo definir una aplicación diferenciable entre dos variedades que no necesariamente son abiertos de espacios euclidianos?** Las cartas locales permiten llevar la discusión al ámbito de la situación clásica: así se *define* la diferenciabilidad.

<sup>8</sup>Dícese que la función rango  $Df$ :  $U \rightarrow \mathbb{N}$  es **semicontinua superiormente** (si  $f$  es de clase  $C^1$ ).

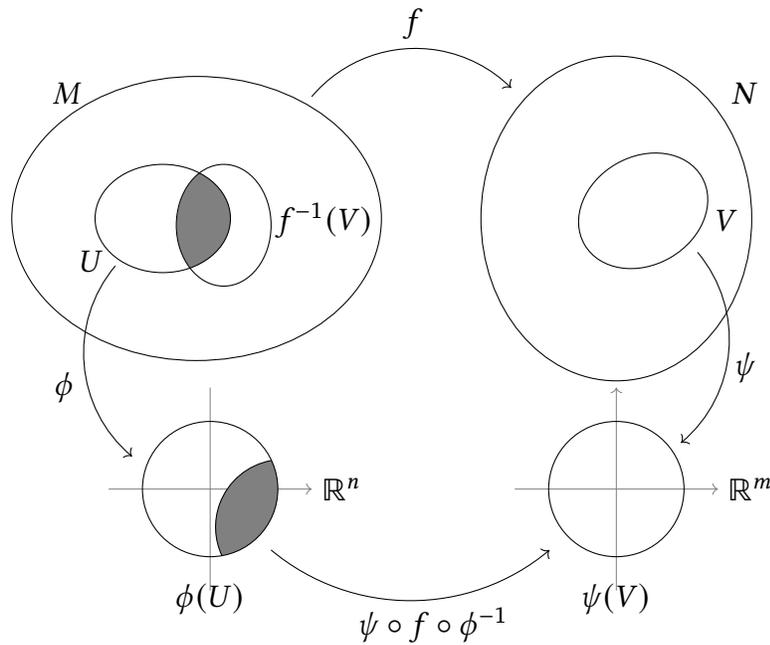


Figura 1.3: Una versión local de una función suave

**Definición 1.25.** Sean  $M, N$  dos variedades diferenciables de dimensiones respectivas  $n$  y  $m$ . Una aplicación continua  $f: M \rightarrow N$  es **suave**, o *indefinidamente diferenciable*, si para cada par de cartas locales  $(U, \phi)$  para  $M$  y  $(V, \psi)$  para  $N$ , la composición

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap f^{-1}(V)) \rightarrow \psi(V) \tag{1.10}$$

es una aplicación suave<sup>9</sup> entre abiertos euclidianos; véase la Figura 1.3. ◇

Dos atlas  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  para  $M$  y  $\mathfrak{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta)\}$  para  $N$  definen cubrimientos abiertos  $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$  de  $M$  y  $\{V_\beta\}_{\beta \in B}$  de  $N$ . Como  $f$  es continua, las preimágenes  $f^{-1}(V_\beta)$  cubren  $M$  con abiertos; las  $U_\alpha \cap f^{-1}(V_\beta)$  forman un cubrimiento abierto más fino de  $M$ . Luego, las aplicaciones (1.10) son suficientes para determinar el comportamiento de la función original  $f: M \rightarrow N$ .

**Definición 1.26.** Un **difeomorfismo** entre dos variedades diferenciables  $M$  y  $N$  es una aplicación biyectiva y suave  $f: M \rightarrow N$  cuya función inversa  $f^{-1}: N \rightarrow M$  también es suave. Dos variedades  $M$  y  $N$  se llaman **difeomorfas** si existe un difeomorfismo de  $M$  en  $N$ . ◇

<sup>9</sup>Una función  $f: M \rightarrow N$  es una **aplicación de clase  $C^k$  entre variedades** si todas las aplicaciones de (1.10) entre abiertos euclidianos son de clase  $C^k$ .

**Ejemplo 1.27.** Sea  $\mathbb{B}^n \equiv B(0, 1) := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| < 1\}$  la bola abierta unitaria de  $\mathbb{R}^n$  (con respecto a la norma euclidiana). La función biyectiva  $f: \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dado por

$$f(x) := \frac{2x}{1 - \|x\|^2}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1 + \sqrt{1 + \|y\|^2}}$$

es suave y  $f^{-1}$  también es suave, como se verifica fácilmente. En este caso no es necesario usar cartas locales porque los dominios y codominios son abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, la bola  $\mathbb{B}^n$  es difeomorfa al espacio total  $\mathbb{R}^n$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.28.** El **soporte**  $\text{sop } f$  de una función *continua*  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$  es un cerrado en el espacio topológico  $X$ , definido como la *clausura* del conjunto  $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ .

Una función suave  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  puede tener *soporte compacto* sin ser idénticamente nula. Si  $a < b$  en  $\mathbb{R}$ , considérese la función  $f$  dada por

$$f(t) := e^{-1/(b-t)(t-a)} \llbracket a < t < b \rrbracket.$$

El empleo de la notación de Iverson y Knuth indica que  $f(t) \equiv 0$  para  $t \leq a$  o  $t \geq b$ . Se verifica fácilmente que  $f$  alcanza su máximo en  $\frac{1}{2}(a + b)$ , que es creciente en el intervalo  $a < t < \frac{1}{2}(a + b)$ , decreciente en  $\frac{1}{2}(a + b) < t < b$ , y suave en el intervalo abierto  $(a, b)$ . Un cálculo explícito comprueba que  $f^{(r)}(a) = f^{(r)}(b) = 0$  para todo  $r \in \mathbb{N}$ . También es evidente que  $\text{sop}(f) = [a, b]$ , un intervalo compacto.

Considérese también su integral indefinida normalizada:

$$g(t) := \frac{\int_{-\infty}^t f(s) ds}{\int_{-\infty}^{\infty} f(s) ds}.$$

Este  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave tal que  $g(t) \equiv 0$  si  $t \leq a$ ;  $g(t)$  es creciente para  $a < t < b$ ; y  $g(t) \equiv 1$  si  $t \geq b$ .  $\diamond$

El ejemplo anterior permite definir una función suave  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  con las siguientes características. Dados  $x \in \mathbb{R}^n$  y dos números reales  $a, b$  con  $0 \leq a < b$ , se requiere que

$$\begin{aligned} h(y) &\equiv 1 && \text{para } \|y - x\| \leq a, \\ 0 < h(y) < 1 && \text{para } a < \|y - x\| < b, \\ h(y) &\equiv 0 && \text{para } \|y - x\| \geq b. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Basta definir  $h(y) := 1 - g(\|y - x\|^2)$  para la función  $g$  del Ejemplo 1.28.

Si  $U$  es un abierto en  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $U = \bigcup_k U_k$  es una unión finita o numerable donde cada  $U_k = B(x_k, r_k)$  es una bola abierta con centro  $x_k \in U \cap \mathbb{Q}^n$  y radio racional

$r_k \in (0, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ . Entonces, por (1.11), hay una función suave  $h_k: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $h_k(y) > 0$  para  $y \in U_k$  pero  $h_k(z) = 0$  para  $z \notin U_k$ .

En la bola cerrada  $\overline{U}_k = \overline{B}(x_k, r_k)$ , la función continua  $|\partial_r h_k| = |\partial^r h_k / \partial x^r|$  alcanza un máximo, para cada multiíndice  $r \in \mathbb{N}^n$ . Defínase

$$M_k := \sup\{ |\partial_r h_k| : x \in \mathbb{R}^n, |r| \leq k \},$$

notando que el lado derecho se anula fuera de  $U_k$ , así que el supremo se alcanza efectivamente en  $\overline{U}_k$ . Entonces la función definido por la siguiente serie:

$$h(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k M_k} h_k(x)$$

converge uniformemente en todo  $\mathbb{R}^n$ . Además, al reemplazar cada  $h_k$  al lado derecho por su derivada parcial  $\partial_r h_k$  la serie correspondiente converge uniformemente a  $\partial_r h$ , lo cual muestra que  $h$  es de clase  $C^\infty$  en  $\mathbb{R}^n$ . Por su construcción,  $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave que se anula fuera de  $U$  y cumple  $h(y) > 0$  para  $y \in U$ .

**Lema 1.29.** Si  $A$  y  $B$  son dos partes cerradas de  $\mathbb{R}^n$  con  $A \cap B = \emptyset$ , entonces hay una función suave  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv 1 && \text{para } x \in A, \\ 0 < f(x) < 1 && \text{para } x \notin (A \cup B), \\ f(x) &\equiv 0 && \text{para } x \in B. \end{aligned}$$

*Demostración.* Los complementos  $U := \mathbb{R}^n \setminus A$  y  $V := \mathbb{R}^n \setminus B$  son dos abiertos que cubren  $\mathbb{R}^n$ . La construcción anterior permite fabricar dos funciones suaves  $g, h: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$  tales que  $h(x) = 0$  si y solo si  $x \in A$ , y  $g(x) = 0$  si y solo si  $x \in B$ . Entonces  $g(x) + h(x) > 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  pues  $U \cup V = \mathbb{R}^n$ . Luego, la función

$$f(x) := \frac{g(x)}{g(x) + h(x)} \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n$$

es suave y no negativa; cumple  $f(x) = 1$  si y solo si  $h(x) = 0$  si y solo si  $x \in A$ ; y cumple  $f(x) = 0$  si y solo si  $g(x) = 0$  si y solo si  $x \in B$ .  $\square$

► Si  $M$  es una variedad diferencial, una aplicación continua  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  es suave si y solo si  $f \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \mathbb{R}$  es suave, para cada carta local  $(U, \phi)$  de  $M$ . La totalidad de aplicaciones suaves de  $M$  en  $\mathbb{R}$  es entonces un *álgebra real*, es decir, un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial con un producto asociativo compatible con su suma y su multiplicación escalar:

$$\underline{f + g}(p) := f(p) + g(p); \quad \underline{fg}(p) := f(p)g(p); \quad \underline{tf}(p) := tf(p) \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.$$

Para comprobar que el producto puntual  $fg$  de dos funciones suaves es otra función suave, basta recordar que eso se verifica para funciones suaves en abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y aplicar la fórmula de composición:

$$(fg) \circ \phi^{-1} = (f \circ \phi^{-1})(g \circ \phi^{-1}).$$

Esta álgebra será denotada por  $C^\infty(M)$ , o bien por  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  si se quiere precisar que los escalares son reales.

Una función con valores complejos  $h: M \rightarrow \mathbb{C}$  es suave (por definición) si sus partes real e imaginaria  $\Re h: M \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Im h: M \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones reales suaves. Ellas forman un *álgebra compleja*  $C^\infty(M, \mathbb{C})$  con las mismas operaciones puntuales.

**Definición 1.30.** Si  $(U, \phi)$  es una carta local para  $M$ , se puede suponer, sin perder generalidad, que  $0 \in \phi(U)$ . Llámese  $p$  al punto de  $U$  tal que  $\phi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$ . Para cualquier  $q \in U$ , sean  $(x^1, \dots, x^n)$  las coordenadas cartesianas del vector  $x := \phi(q)$ . Las funciones suaves  $x^j: U \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ , son las **coordenadas locales** de  $M$  asociadas con la carta local  $(U, \phi)$ .

Dicho de otro modo: sea  $\text{pr}_j: x \mapsto x^j$  la proyección de  $\mathbb{R}^n$  sobre  $\mathbb{R}$  que corresponde al eje coordenado número  $j$ , dado por  $x = x^1 e_1 + x^2 e_2 + \dots + x^n e_n$ , siendo  $\{e_1, \dots, e_n\}$  la base estándar de  $\mathbb{R}^n$ . Las coordenadas locales son las funciones  $x^j := \text{pr}_j \circ \phi: U \rightarrow \mathbb{R}$  para  $j = 1, \dots, n$ , que son suaves sobre  $U$  porque cada  $\text{pr}_j$  es suave sobre  $\mathbb{R}^n$ .  $\diamond$

Si  $(V, \psi)$  es alguna otra carta local para  $M$  con  $p \in V$  tal que  $\psi(p) = 0$  también, las coordenadas cartesianas del vector  $y = \psi(q)$  dan otro sistema de coordenadas locales  $(y^1, \dots, y^n)$  sobre  $V$ . La transformación  $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (y^1, \dots, y^n)$  es una función vectorial de  $n$  variables que representa la aplicación

$$\psi \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V).$$

Por lo tanto, este **cambio de coordenadas locales** es una aplicación suave. Su derivada es la matriz de derivadas parciales, de  $\phi(U \cap V)$  en  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ :

$$D(\psi \circ \phi^{-1}) = \left[ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right], \quad \text{con determinante} \quad J(\psi \circ \phi^{-1}) := \left| \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right| \neq 0.$$

Este determinante, el **Jacobiano** de  $\psi \circ \phi^{-1}$ , *no se anula* en  $\phi(U \cap V)$  porque la matriz  $D(\psi \circ \phi^{-1})$  es invertible, por la regla de la cadena (1.6) aplicada a las funciones inversas  $\psi \circ \phi^{-1}$  y  $\phi \circ \psi^{-1}$ .

**Ejemplo 1.31.** Para el plano proyectivo  $\mathbb{R}P^2$  del Ejemplo 1.14, llámese  $(y^1, y^2)$  a las coordenadas locales de la carta local  $(U_1, \phi_1)$  y  $(z^1, z^2)$  a las coordenadas locales de la

carta local  $(U_2, \phi_2)$ . De la fórmula (1.4) se ve que  $z^1 = 1/y^1$ ,  $z^2 = y^2/y^1$  en el dominio común  $\phi_1(U_1 \cap U_2) = \{(y^1, y^2) \in \mathbb{R}^2 : y^1 \neq 0\}$ . Entonces

$$D(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) = \begin{pmatrix} -1/(y^1)^2 & 0 \\ -y^2/(y^1)^2 & 1/y^1 \end{pmatrix}, \quad J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) = -\frac{1}{(y^1)^3} \neq 0.$$

Nótese que en este caso  $\phi_1(U_1 \cap U_2)$  es desconexo,<sup>10</sup> por ser la unión disjunta de dos semiplanos abiertos  $y^1 > 0$  y  $y^1 < 0$ . En uno de ellos el jacobiano tiene signo negativo y en el otro tiene signo positivo. Esta situación incómoda es un artefacto del cubrimiento abierto  $\mathbb{R}P^2 = U_1 \cup U_2 \cup U_3$  usado para el atlas mínimo de tres cartas.  $\diamond$

### 1.3. Vectores tangentes

Una superficie suave en  $\mathbb{R}^3$  posee en cada uno de sus puntos un *plano tangente*; se pretende ahora generalizar este concepto a variedades de cualquier dimensión, no necesariamente encajadas en un espacio euclidiano ambiente. Un plano tangente a una superficie es un espacio afín: desde el punto de contacto con la superficie a cualquier punto del plano tangente se puede trazar un *vector tangente*. Este vector representa la velocidad de una curva sobre la superficie que pasa por el punto de contacto; pero a la vez puede verse como una derivada direccional (en el punto de contacto) de las funciones diferenciables sobre la superficie.

La derivada en  $x \in \mathbb{R}^n$  de una función suave  $\alpha$  solo dependen de la restricción de  $\alpha$  a un vecindario abierto  $U$  de  $x$ . En efecto, si  $\beta: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  es otra función suave donde  $V$  es otro vecindario abierto de  $x$ , tal que  $\alpha(y) = \beta(y)$  en  $U \cap V$ , entonces  $D\alpha(x) = D\beta(x)$ . Esto se ve al considerar las diferencias  $\alpha(x+h) - \alpha(x)$ ,  $\beta(x+h) - \beta(x)$ , donde  $x+h \in B(x; \delta) \subseteq U \cap V$ , para  $\delta > 0$  pequeño.

Entonces se puede establecer una relación de equivalencia,  $(\alpha, U) \sim (\beta, V)$ , si hay un abierto  $W$  con  $x \in W \subset \overline{W} \subset U \cap V$  tal que  $\alpha(y) = \beta(y)$  para  $y \in W$ ; de modo que  $D\alpha(x)$  solo depende de la clase de equivalencia de  $(\alpha, U)$ , la cual se llama el *germen* de  $\alpha$  en  $x$ .

Esta noción de germen (de una función en un punto) se puede definir en una variedad diferencial cualquiera, no solo en  $\mathbb{R}^n$ . Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1.32.** Sea  $p$  un punto de una variedad diferencial  $M$ . Una función suave<sup>11</sup>  $f: V_f \rightarrow \mathbb{R}$  definida en un vecindario abierto  $V_f$  de  $p$  se declara equivalente a otra,

<sup>10</sup>Un espacio topológico  $X$  es **disconexo** si  $X = U \uplus V$  es la unión disjunta de dos abiertos no vacíos  $U \neq \emptyset$  y  $V \neq \emptyset$ . El plano  $\mathbb{R}^2$  menos una recta es desconexo: los dos semiplanos a cada lado de la recta forman una desconexión. Por el contrario, dicese que  $X$  es **conexo** si no es desconexo. Un teorema de topología asegura que la imagen continua de un espacio conexo es también conexo.

<sup>11</sup>Si  $(U, \phi)$  es una carta de  $M$  con  $p \in U$ ,  $\phi(U \cap V_f)$  es abierto en  $\mathbb{R}^n$  y  $f \circ \phi^{-1}$  es suave en ese dominio.

$g: V_g \rightarrow \mathbb{R}$ , si hay un vecindario abierto  $W$  de  $p$  con  $\overline{W} \subset V_f \cap V_g$  tal que  $f(q) = g(q)$  para todo  $q \in W$ . La clase de equivalencia  $[(f, V_f)]$  se llama **el germen de  $f$  en  $p$** .

Denótese por  $C^\infty(M, p)$  la totalidad de dichos gérmenes. Si  $f, g$  son suaves cerca de  $p$  y  $t \in \mathbb{R}$ , tómesese  $\overline{V_{tf}} := \overline{V_f}$  y  $V_{f+g} = V_{fg} := V_f \cap V_g$ ; con estos vecindarios de  $p$  se definen los gérmenes de  $tf, f + g, fg$ , respectivamente. De este manera,  $C^\infty(M, p)$  resulta ser un  $\mathbb{R}$ -álgebra conmutativa. Con un abuso de notación, se escribe “ $f \in C^\infty(M, p)$ ” como abreviatura de “ $[(f, V_f)] \in C^\infty(M, p)$ ”.

Los gérmenes de las coordenadas locales  $x^1, \dots, x^n$  introducidas en la Definición 1.30 son elementos del álgebra  $C^\infty(M, p)$ . ◇

**Definición 1.33.** Sea  $M$  una variedad diferencial de dimensión  $n$  y sea  $p \in M$ . Un **vector tangente en  $p$**  es una forma  $\mathbb{R}$ -lineal  $v: C^\infty(M, p) \rightarrow \mathbb{R}$ , es decir,

$$\left. \begin{aligned} v(f + g) &= v(f) + v(g) \\ v(tf) &= tv(f) \end{aligned} \right\} \text{ para } f, g \in C^\infty(M, p), t \in \mathbb{R}; \quad (1.12a)$$

que además cumple la siguiente **regla de Leibniz local**:

$$v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) \quad \text{para todo } f, g \in C^\infty(M, p). \quad (1.12b)$$

La totalidad de vectores tangentes en  $p$  es un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial, denotado  $T_pM$ . ◇

Resulta que es posible considerar un vector tangente  $v$  en  $p$  como una forma lineal sobre las funciones suaves  $f: V_f \rightarrow \mathbb{R}$  y no solo sobre sus clases de equivalencia. Si  $g: V_g \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $(f, V_f) \sim (g, V_g)$ ; y si  $(U, \phi)$  es una carta local de  $M$  con  $p \in U$ , entonces hay un abierto  $V$  de  $M$  con  $p \in V \subset \overline{V} \subset U \cap V_f \cap V_g$  tal que  $f(q) = g(q)$  para todo  $q \in V$ . Por el Lema 1.29, hay una función  $F: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$  tal que  $F(\phi(q)) = 1$  para  $q \in \overline{V}$  y  $F(y) = 0$  para  $y \notin \phi(U)$ . Defínase  $[(h, U)] \in C^\infty(M, p)$  por  $h(q) := F(\phi(q))$ , de tal manera que  $h(q) = 1$  para  $q \in \overline{V}$ . Resulta entonces que  $(f - g)h = 0$  en  $C^\infty(M, p)$ . De las propiedades (1.12) y la igualdad  $h(p) = 1$  se obtiene

$$0 = v(0) = v((f - g)h) = (v(f) - v(g))1 + (f(p) - g(p))v(h) = v(f) - v(g).$$

Esto dice que  $f \mapsto v(f)$  está bien definida sobre funciones suaves definidas cerca de  $p$ ; porque si dos funciones suaves  $f, g$  coinciden en un vecindario de  $p$ , entonces  $v(f) = v(g)$ .

**Lema 1.34.** Si  $v \in T_pM$  es un vector tangente en  $p \in M$ , y si  $c: V_c \rightarrow \mathbb{R}$  es constante en un vecindario de  $p$ , entonces  $v(c) = 0$ .

*Demostración.* Se puede suponer, por el párrafo anterior, que  $c$  es una función constante – de valor  $c(p) \in \mathbb{R}$  – definido en todo  $M$ . Si  $f: V_f \rightarrow \mathbb{R}$  es cualquier función suave definida cerca de  $p$ , se verifica

$$c(p)v(f) = v(c(p)f) = v(cf) = v(c) f(p) + c(p) v(f),$$

así que  $v(c) f(p) = 0$ , cualquiera que sea  $f(p)$ . Eso implica que  $v(c) = 0$ .  $\square$

**Proposición 1.35.**  $T_p M$  es un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial, con  $\dim_{\mathbb{R}} T_p M = \dim M$ .

*Demostración.* Sea  $(U, \phi)$  una carta local de  $M$  tal que  $\phi(p) = 0$ . Las coordenadas locales  $x^1, \dots, x^n$  asociadas con esta carta definen elementos de  $C^\infty(M, p)$ . Denótese por  $\partial_1, \dots, \partial_n$  las derivadas parciales ordinarias de funciones sobre  $\mathbb{R}^n$ ; y por  $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$  la forma  $\mathbb{R}$ -lineal sobre  $C^\infty(M, p)$  dada por

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p : f \mapsto \partial_j(f \circ \phi^{-1})(0).} \quad (1.13)$$

La regla del producto (para derivadas parciales en  $\mathbb{R}^n$ ) implica que

$$\partial_j(fg \circ \phi^{-1})(0) = \partial_j(f \circ \phi^{-1})(0) g(p) + f(p) \partial_j(g \circ \phi^{-1})(0),$$

así que  $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \in T_p M$ . En particular, al tomar  $f = x^k$  para  $k = 1, \dots, n$ , se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (x^k) = \llbracket j = k \rrbracket,$$

de donde se ve que  $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$  son linealmente independientes en  $T_p M$ .

Para  $v \in T_p M$  cualquiera, escríbase  $v^k := v(x^k)$ . Si  $f \in C^\infty(M, p)$ , el Lema 1.8 muestra que la función suave  $f \circ \phi^{-1}: \phi(U \cap V_f) \rightarrow \mathbb{R}$  puede expresarse en la forma<sup>12</sup>

$$(f \circ \phi^{-1})(\phi(q)) = (f \circ \phi^{-1})(0) + x^j(q) g_j(\phi(q))$$

donde cada  $g_j: \phi(U \cap V_f) \rightarrow \mathbb{R}$  es suave y  $g_j(0) = \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (f)$ . En consecuencia, se verifica  $f = c + x^j(g_j \circ \phi)$  en  $C^\infty(M, p)$ , donde  $c$  es una constante. Como  $v(c) = 0$ , y cada  $x^j(p) = 0$ , se obtiene la *regla de Leibniz*:

$$v(f) = v(x^j) g_j(0) = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (f).$$

Como  $f$  es arbitrario, se deduce la combinación lineal  $v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ . Por ende, los  $n$  vectores tangentes  $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$  forman una *base* para  $T_p M$ , así que  $\dim T_p M = n$ .  $\square$

<sup>12</sup>Hay una suma implícita sobre  $j = 1, \dots, n$ , por el convenio de Einstein.

**Definición 1.36.** Una **curva** suave en una variedad diferencial  $M$  es una aplicación continua  $\gamma: I \rightarrow M$ , definida en un intervalo cerrado  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , que es suave en el interior  $(a, b)$ .  $\llbracket$  Se permiten los casos  $a = -\infty$  y  $b = +\infty$ , excluyendo los extremos en tales casos.  $\rrbracket$   $\diamond$

Fíjese que la curva es la aplicación  $\gamma$  misma y no el conjunto imagen  $\gamma(I) \subseteq M$ , el cual se llama la **trayectoria** de la curva. Por ejemplo, si  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  se define por  $\gamma(t) := (\cos t, \sin t)$ , la trayectoria es el círculo  $\mathbb{S}^1$ , pero la curva es el recorrido de ese círculo, infinitas veces, en el sentido contrario a reloj.

**Definición 1.37.** Sea  $M$  una variedad diferencial con  $p \in M$ , y sea  $\gamma: I \rightarrow M$  una curva en  $M$  con  $\gamma(t_0) = p$ . La siguiente receta define un vector tangente en  $T_pM$ :

$$f \mapsto (f \circ \gamma)'(t_0) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=t_0} (f \circ \gamma)(t).$$

(Si  $t_0$  es un extrema del intervalo  $I$ , se usa la derivada unilateral en  $t = t_0$ .)

El vector tangente será denotado por  $\dot{\gamma}(t_0)$ , de modo que

$$\boxed{\langle \dot{\gamma}(t_0), f \rangle := (f \circ \gamma)'(t_0).} \tag{1.14}$$

Este  $\dot{\gamma}(t_0)$  se llama la **derivada direccional** en  $p$  a lo largo de la curva  $\gamma$ .  $\diamond$

**Definición 1.38.** Sea  $f: M \rightarrow N$  una aplicación suave entre dos variedades diferenciales. Para cada  $p \in M$ , la **aplicación tangente**  $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es la aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal determinado por:

$$\boxed{T_p f(v): h \mapsto v(h \circ f)} \quad \text{para } v \in T_p M, h \in C^\infty(N, f(p)).$$

Obsérvese que  $T_p f(v) \in T_{f(p)} N$ , puesto que

$$\begin{aligned} T_p f(v)(hk) &= v(hk \circ f) = v((h \circ f)(k \circ f)) \\ &= v(h \circ f) k(f(p)) + h(f(p)) v(k \circ f). \end{aligned} \quad \diamond$$

**Lema 1.39.** Si  $f: M \rightarrow N$  es una aplicación suave, si  $(x^1, \dots, x^n)$  y  $(y^1, \dots, y^m)$  son coordenadas locales para cartas  $(U, \phi)$  de  $M$  y  $(V, \psi)$  de  $N$  con  $\phi(p) = \psi(f(p)) = 0$ , la matriz de la aplicación tangente  $T_p f$  con respecto a la base (1.13) de  $T_p M$  y la base análoga de  $T_{f(p)} N$  es la matriz de derivadas parciales de la expresión local de  $f$  en el origen:

$$\left[ \frac{\partial f^i}{\partial x^j} \right]_p \equiv \left[ \frac{\partial}{\partial x^j} \right]_p (y^i \circ f) = D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(0). \tag{1.15}$$

*Demostración.* Por su definición,  $T_p f$  obedece

$$T_p f \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p \right) : y^i \mapsto \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p (y^i \circ f) = \partial_j (y^i \circ f \circ \phi^{-1})(0).$$

Esta es la entrada  $(i, j)$  de la matriz de derivadas parciales en 0 de  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$ .  $\square$

**Lema 1.40** (Regla de la cadena). Si  $f: M \rightarrow N$ ,  $g: N \rightarrow R$  son aplicaciones suaves entre variedades, y si  $p \in M$ , entonces la aplicación tangente  $T_p(g \circ f)$  está dada por:

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f. \quad (1.16)$$

*Demostración.* Elíjanse cartas locales  $(U, \phi)$  para  $M$ ,  $(V, \psi)$  para  $N$  y  $(W, \chi)$  para  $R$ , con  $p \in U$ ,  $f(p) \in V$  y  $g(f(p)) \in W$ . Sin perder generalidad, se puede suponer que  $\phi(p) = 0$  y que  $\psi(f(p)) = 0$ . Sean  $F := \psi \circ f \circ \phi^{-1}$  y  $G := \chi \circ g \circ \psi^{-1}$  las expresiones locales de  $f$  y  $g$  entre los dominios apropiados. La regla de cadena ordinaria (1.6) aplicada a  $F$  y  $G$  en el punto  $0 = \phi(p)$ , produce la multiplicación de matrices (1.15) que corresponde con la composición de aplicaciones lineales (1.16).  $\square$

## 1.4. Subvariedades

**Definición 1.41.** Una aplicación suave entre dos variedades  $f: M \rightarrow N$  se llama una **inmersión** si para todo  $p \in M$ , la aplicación tangente  $T_p f: T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  es *inyectiva*.

Si  $f: M \rightarrow N$  es una inmersión y si además  $f: M \rightarrow f(M) \subseteq N$  es un homeomorfismo,  $f$  se llama un **encaje** (*embedding*, en inglés; *plongement*, en francés).

Una aplicación suave  $g: M \rightarrow N$  es una **sumersión** si para todo  $p \in M$ , la aplicación tangente  $T_p g$  es *sobreyectiva*.<sup>13</sup>  $\diamond$

Si  $f: M \rightarrow N$  es una inmersión y una sumersión a la vez, es decir, si cada aplicación tangente  $T_p f$  es biyectiva, entonces  $\dim M = \dim N$  y la matriz (1.15) es invertible para cada  $p \in M$ . Por el Teorema 1.21 (de la aplicación inversa), hay un vecindario abierto  $W$  de  $\phi(p)$  en  $\mathbb{R}^n$  en el cual la aplicación suave  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  es uno-a-uno y posee un inverso suave. Luego  $f$  es inyectiva y posee un inverso suave, en el sentido de la Definición 1.25, en el vecindario abierto  $V_f := \phi^{-1}(W)$  de  $p$  en  $M$ . En resumen, una función suave  $f$  de este tipo es un **difeomorfismo local**.

**Ejemplo 1.42.** La función  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1 : e^{i\theta} \mapsto e^{2i\theta}$  es *dos-a-uno* y por lo tanto no es un difeomorfismo. La aplicación tangente  $T_1 f$  se calcula como sigue. Defínase dos cartas

<sup>13</sup>Algunos textos en español emplean la palabra *sumersión* para denotar un encaje; esto a veces causa confusión. Este error lingüístico se debe posiblemente al libro de Santaló.

$(U, \phi)$  y  $(V, \psi)$  por  $U := \{e^{i\theta} : -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\}$ ,  $\phi(e^{i\theta}) := \theta$ ; y  $V := \{e^{i\theta} : -\pi < \theta < \pi\}$ ,  $\psi(e^{i\theta}) := \theta$ . La expresión local de  $f: U \rightarrow V$  es  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}: \theta \mapsto 2\theta$ , así que  $T_1 f$  es la aplicación lineal biyectiva  $v \mapsto 2v$ .

Si  $p = e^{i\alpha} \neq 1$ , se puede adaptar este cálculo con rotaciones apropiadas de  $U$  y  $V$  para comprobar que  $T_p f: T_p \mathbb{S}^1 \rightarrow T_p \mathbb{S}^1$  tiene el mismo formato  $w \mapsto 2w$ ; por ende, cada  $T_p f$  es biyectiva. En conclusión, esta *doble envoltura* del círculo es un difeomorfismo local, pero no es un difeomorfismo “global”.  $\diamond$

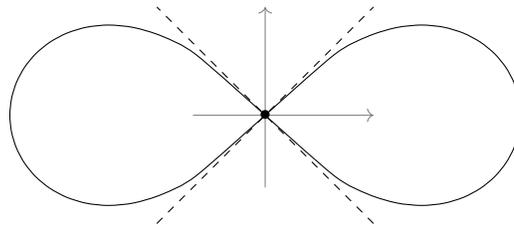


Figura 1.4: La lemniscata de Bernoulli

**Ejemplo 1.43.** La **lemniscata de Bernoulli** es la curva en  $\mathbb{R}^2$  cuya trayectoria obedece la ecuación polinomial de cuarto grado:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2),$$

donde  $a > 0$  es un parámetro. Esta curva se puede *parametrizar* por las funciones

$$x(t) := \frac{a\sqrt{2} \cos t}{1 + \sin^2 t}, \quad y(t) := \frac{a\sqrt{2} \cos t \sin t}{1 + \sin^2 t}.$$

En otras palabras, la curva  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $\gamma(t) := (x(t), y(t))$  recorre la trayectoria dada (infinitas veces); para obtener un solo recorrido hay que restringir  $\gamma$  a un intervalo de longitud  $2\pi$ , por ejemplo  $[0, 2\pi)$ . Esta parametrización es *regular* porque  $\gamma'(t) \neq (0, 0)$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Entonces la aplicación tangente  $T_t \gamma: \frac{d}{dt}|_t \mapsto \gamma'(t)$  no se anula en  $t \in \mathbb{R}$ . Luego cada  $T_t \gamma$  es uno-a-uno, así que  $\gamma$  es una inmersión de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^2$ .

Sin embargo, la curva  $\gamma$  no es un encaje. Aun cuando se considera la restricción de  $\gamma$  a una función suave del intervalo abierto  $(0, 2\pi)$  al abierto  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a\sqrt{2}, 0)\}$  en el plano, esta tampoco es un encaje porque no es uno-a-uno, como evidencia el *punto doble*  $(0, 0) = \gamma(\pi/2) = \gamma(3\pi/2)$ : véase la Figura 1.4.  $\diamond$

**Definición 1.44.** Sea  $M$  una variedad diferencial,  $\dim M = n$ . Una **subvariedad** de  $M$  es una parte  $R \subseteq M$  que es también una variedad diferencial con  $\dim R = r \leq n$ ; donde en cada punto  $p \in R$  hay una carta local  $(U, \phi)$  de  $M$ , con  $p \in U$  y  $\phi(p) = 0$ , tal que

$$R \cap U = \{ \phi^{-1}(x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0) : x \in \mathbb{R}^r \text{ con } (x, 0) \in \phi(U) \}. \quad (1.17)$$

Aquí  $\underline{(x, 0)} \equiv (x^1, \dots, x^r, 0, \dots, 0)$ . En tal caso, la expresión local  $\phi \circ i|_{R \cap U} \circ \phi^{-1}$  de la inclusión  $i: R \hookrightarrow M$  coincide con la inclusión  $x \mapsto (x, 0) : \mathbb{R}^r \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ , y por ende la aplicación  $i$  es una inmersión.  $\diamond$

**Proposición 1.45.** Sea  $f: M \rightarrow N$  una sumersión y sea  $S$  una subvariedad de  $N$ . Entonces  $R = f^{-1}(S)$  es una subvariedad de  $M$ , de dimensión  $\dim R = \dim M - \dim N + \dim S$ .

*Demostración.* Escribáse  $n = \dim M$ ,  $m = \dim N$ ,  $s = \dim S$ ; entonces  $n \geq m \geq s$ . Tómese  $p \in R$  y sea  $q := f(p) \in S$ . Hay una carta local  $(V, \psi)$  para  $N$  con  $q \in V$ ,  $\psi(q) = 0$ , tal que  $S \cap V = \psi^{-1}(\mathbb{R}^s \cap \psi(V))$ , por ser  $S$  una subvariedad de  $N$ .<sup>14</sup>

Si  $(U, \phi)$  es una carta local en  $M$  con  $p \in f^{-1}(V) \subseteq U$  y  $\phi(p) = 0$ , la aplicación suave  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  tiene derivada sobreyectiva – con rango constante  $m$  – en cada punto de  $\phi(f^{-1}(V))$ . Por el Teorema 1.24 (del rango), se puede modificar las cartas de tal manera que la aplicación modificada  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  tenga la forma  $(x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^1, \dots, x^m)$ . Entonces

$$\begin{aligned} \phi(R \cap f^{-1}(V)) &= (\phi \circ f^{-1})(S \cap V) = (\phi \circ f^{-1} \circ \psi^{-1})(\mathbb{R}^s \cap \psi(V)) \\ &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1})^{-1}(\mathbb{R}^s \cap \psi(V)) \\ &= (\psi \circ f \circ \phi^{-1})^{-1}(\mathbb{R}^s) \cap (f \circ \phi^{-1})^{-1}(V) \\ &= \mathbb{R}^{n-m+s} \cap \phi(f^{-1}(V)). \end{aligned}$$

Al aplicar  $\phi^{-1}$  a las dos lados de esta ecuación, se deduce que  $(f^{-1}(V), \phi|_{f^{-1}(V)})$  es una carta local para  $M$  con  $p \in f^{-1}(V)$  y que se cumple la condición (1.17) en esta carta. Se concluye que  $R$  es una subvariedad de  $M$ , de dimensión  $n - m + s$ .  $\square$

**Corolario 1.46.** Si  $f: M \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una función suave, dícese que un elemento  $a \in f(M)$  es un **valor regular** de  $f$  si  $T_p f$  es sobreyectiva toda vez que  $f(p) = a$ . Dado un tal valor regular, su preimagen

$$f^{-1}(a) = \{ p \in M : f(p) = a \}$$

es una subvariedad de  $M$ , de dimensión  $n - m$ .

<sup>14</sup>Aquí se ha identificado  $\mathbb{R}^s$  con su imagen en  $\mathbb{R}^m$  bajo la inclusión  $y \mapsto (y, 0)$ .

*Demostración.* El punto  $\{a\}$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^m$  de dimensión 0. La hipótesis dice que la aplicación lineal  $T_p f$  tiene rango máximo  $m$  para cada  $p \in f^{-1}(a)$ .

Cada expresión local  $\psi \circ f \circ \phi^{-1}$  con  $\phi(p) = 0$  tiene derivada  $D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$  de rango  $m$  en  $x = 0$ . Al menos un *menor*<sup>15</sup> de tamaño  $m$  de la matriz  $D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})(x)$  no se anula en  $x = 0$ ; por la continuidad de  $D(\psi \circ f \circ \phi^{-1})$ , esta condición también es válida para  $\phi^{-1}(x)$  en un vecindario  $W_p$  de  $p$ . Luego  $T_q f$  tiene rango máximo  $m$  para  $q \in W_p$ .

La unión  $V := \bigcup_{\{p:f(p)=a\}} f^{-1}(W_p)$  es un abierto de  $M$  que incluye  $f^{-1}(a)$ , y se ha comprobado que  $f|_V: V \rightarrow \mathbb{R}^m$  es una sumersión. El resultado ahora sigue de la Proposición 1.45; la dimensión de la subvariedad  $f^{-1}(a)$  de  $M$  es  $n - m + 0$ .  $\square$

**Ejemplo 1.47.** Si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es el polinomio cuadrático  $f(x) := (x^1)^2 + \cdots + (x^n)^2$ , su derivada es la matriz  $n \times 1$  de valor  $[2x^j]$  en  $x$  (esto es, el vector de columna  $2x$ ). Esta matriz tiene rango 1 salvo en el origen  $x = 0$ . Luego 0 es un valor singular de  $f$ , los otros valores en  $(0, \infty)$  son regulares. El Corolario 1.46 muestra que la esfera  $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(1)$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$ , de dimensión  $n - 1$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.48.** Sea  $M_n(\mathbb{R})$  el álgebra de matrices  $n \times n$  reales. Las entradas individuales  $a_{ij}$  de la matriz  $A = [a_{ij}]$  forman un sistema de coordenadas cartesianas para  $M_n(\mathbb{R})$ : su dimensión como espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial es  $n^2$ .

El **grupo general lineal**  $\underline{\text{GL}}(n, \mathbb{R})$  es el grupo de matrices invertibles  $n \times n$ ; esto es,

$$\underline{\text{GL}}(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

La función determinante  $\underline{\det}: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  es un polinomio en las entradas matriciales y como tal es una función suave. En particular,  $\underline{\det}$  es continua: la preimagen de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  es un abierto en  $M_n(\mathbb{R})$ . Como tal,  $\underline{\text{GL}}(n, \mathbb{R})$  es una variedad diferencial de dimensión  $n^2$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.49.** El **grupo especial lineal**  $\underline{\text{SL}}(n, \mathbb{R})$  es el subgrupo de las matrices en  $\underline{\text{GL}}(n, \mathbb{R})$  de determinante 1,

$$\underline{\text{SL}}(n, \mathbb{R}) := \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : \det A = 1 \}.$$

Resulta que 1 es un valor regular de la función  $\underline{\det}$ , así que  $\underline{\text{SL}}(n, \mathbb{R})$  es una subvariedad de  $M_n(\mathbb{R})$ , de dimensión  $(n^2 - 1)$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.50.** Otro subgrupo de  $\underline{\text{GL}}(n, \mathbb{R})$  es el **grupo ortogonal**

$$\underline{\text{O}}(n) := \{ A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t A = A A^t = 1_n \}, \tag{1.18}$$

<sup>15</sup>Un **menor** de tamaño  $r$  de una matriz  $A$  es el determinante de alguna submatriz  $r \times r$  de  $A$ .

donde  $A^t$  denota la matriz transpuesta de  $A$ ;  $1_n$  es la matriz identidad  $n \times n$ . Cada matriz ortogonal es invertible, con  $A^{-1} = A^t$ . Además, como  $\det A^t = \det A$ , se ve que  $(\det A)^2 = 1$  y por ende  $\det A = \pm 1$  para  $A \in O(n)$ .

Considérese también el conjunto de las *matrices reales simétricas*:

$$\text{Sim}(n) := \{ X \in M_n(\mathbb{R}) : X^t = X \},$$

el cual es un espacio vectorial real de dimensión  $n(n+1)/2$ . Sus coordenadas son las entradas supradiagonales  $\{ x_{rs} : r \leq s \}$ . Defínase  $f: GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Sim}(n)$  por  $f(B) := B^t B$ , de modo que  $O(n) = f^{-1}(1_n)$ . La función vectorial  $f$  es suave porque sus componentes son polinomios en las entradas de  $B$ .

Como  $GL(n, \mathbb{R})$  es un abierto en un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial, se obtiene la aplicación tangente  $T_B f$  en el punto  $B = 1_n$  por un cálculo directo. Su matriz tiene entrada  $(rs, ij)$ , con  $r \leq s$ , igual a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial b_{ij}} \Big|_{B=1_n} \left( \sum_{k=1}^n b_{kr} b_{ks} \right) &= \sum_{k=1}^n \llbracket i = k \rrbracket \llbracket j = r \rrbracket \llbracket k = s \rrbracket + \llbracket k = r \rrbracket \llbracket i = k \rrbracket \llbracket j = s \rrbracket \\ &= \llbracket i = s \rrbracket \llbracket j = r \rrbracket + \llbracket i = r \rrbracket \llbracket j = s \rrbracket, \end{aligned}$$

al notar que la entrada  $(k, s)$  de la matriz  $1_n$  es  $\llbracket k = s \rrbracket$ . Esta expresión vale 1 si  $r < s$  y si  $(i, j) = (r, s)$  o  $(j, i) = (r, s)$ ; vale 2 si  $r = s$  con  $i = j = r$ ; y vale 0 en otros casos.

Entonces la matriz de  $T_{1_n} f$  tiene dos bloques  $[P | Q]$ , donde  $P$  reúne las columnas con  $i \leq j$  y  $Q$  se compone de columnas con  $i > j$ ; el bloque  $P$  es una *matriz cuadrada diagonal* con entradas diagonales 1 y 2. Esta *forma escalonada* de  $T_{1_n} f$  evidencia que  $\text{rango}[P | Q] = \text{rango}(P) = n(n+1)/2$ , así que la matriz rectangular de  $T_{1_n} f$  tiene rango maximal y por ende  $T_{1_n} f$  es sobreyectivo.

Un cálculo directo del rango de  $T_B f$ , para  $B \neq 1_n$  en  $GL(n, \mathbb{R})$ , es factible pero engorroso. En su lugar, se puede aprovechar la operación de grupo (la multiplicación matricial) en  $GL(n, \mathbb{R})$ . Es cuestión de notar que

$$f(A) = A^t A = B^t B^{-t} A^t A B^{-1} B = B^t f(AB^{-1}) B = R_B L_{B^t} f(AB^{-1}), \quad (1.19)$$

donde las operaciones matriciales de *premultiplicación*  $L_{B^t}: C \mapsto B^t C$  y *postmultiplicación*  $R_B: C \mapsto C B$  son operadores lineales sobre  $M_n(\mathbb{R})$ .

La relación (1.19) puede ser reescrito en la forma

$$f = R_B \circ L_{B^t} \circ f \circ R_{B^{-1}}.$$

Como derivada de una función *lineal*  $L$  es la función *constante de valor*  $L$ , la regla de la cadena (1.16) aplicada a la composición anterior muestra que

$$T_B f = T_{B^t}(R_B) \circ T_{1_n}(L_{B^t}) \circ T_{1_n} f \circ T_B(R_{B^{-1}}) = R_B \circ L_{B^t} \circ T_{1_n} f \circ R_{B^{-1}}.$$

Las operaciones lineales que aparecen al lado derecho son invertibles:  $(R_B)^{-1} = R_{B^{-1}}$ , etcétera; y  $T_{1_n}f$  es sobreyectivo, así que  $T_Bf$  es también sobreyectivo para todo  $B \in GL(n, \mathbb{R})$ . Se ha comprobado que  $f$  es una *sumersión* de  $GL(n, \mathbb{R})$  en  $\text{Sim}(n)$ .

Luego  $1_n$  es un valor regular de  $f$  y su preimagen  $O(n) := f^{-1}(1_n)$  es una subvariedad de  $GL(n, \mathbb{R})$ , en vista del Corolario 1.46. Ese corolario también proporciona su dimensión:

$$\dim O(n) = \dim GL(n, \mathbb{R}) - \dim \text{Sim}(n) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}. \quad (1.20)$$

El grupo  $O(n)$  es una *variedad desconexa*, pues el determinante  $\det: O(n) \rightarrow \{1, -1\}$  es una función continua con exactamente dos valores reales. La preimagen  $\det^{-1}(1)$  es a su vez una subvariedad de  $O(n)$  de la misma dimensión, por el Corolario 1.46 de nuevo; es también un subgrupo, porque det es un homomorfismo. Este subgrupo es el **grupo especial ortogonal**,

$$\underline{SO}(n) := \{A \in O(n) : \det A = +1\} = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R}).$$

Resulta que  $SO(n)$  sí es conexo; este es el *componente neutro* del grupo  $O(n)$ . ◇

## 1.5. Campos vectoriales

Un *campo vectorial* sobre una variedad diferencial posee una naturaleza doble: por un lado, es un operador diferencial sobre funciones suaves, pero al mismo tiempo es una asignación (suave) de un vector tangente en cada punto.

**Definición 1.51.** Sea  $M$  una variedad diferencial. Un **campo vectorial** sobre  $M$  es un operador lineal  $X: C^\infty(M) \rightarrow C^\infty(M)$ , es decir,<sup>16</sup>

$$X(f+g) = Xf + Xg, \quad X(tf) = tXf \quad \text{para } f, g \in C^\infty(M), t \in \mathbb{R};$$

que además cumple la siguiente **regla de Leibniz**:

$$X(fg) = (Xf)g + f(Xg) \quad \text{para todo } f, g \in C^\infty(M). \quad (1.21)$$

Tales operadores lineales conforman un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial, denotado por  $\mathfrak{X}(M)$ .

Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  define en cada punto  $p \in M$  un vector tangente  $X_p \in T_pM$  mediante la *evaluación en  $p$* :

$$X_p(f) := Xf(p). \quad (1.22)$$

Cada  $X_p: C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  es lineal y cumple (1.12b), al evaluar la igualdad (1.21) en  $p$ :

$$X_p(fg) = X_p(f)g(p) + f(p)X_p(g). \quad \diamond$$

---

<sup>16</sup>Nótese la omisión de paréntesis alrededor del argumento de una aplicación lineal: se escribe  $Xf$  en vez de  $X(f)$ . Esto permite ahorrar muchas paréntesis innecesarias.

► Si  $(U, \phi)$  es una carta local para  $M$  con  $\phi(p) = 0$ , un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  define un **campo vectorial local**  $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$  por restricción. Esto es menos obvio de lo que parece, porque en general  $C^\infty(U)$  no es una subálgebra de  $C^\infty(M)$ . Por ejemplo, si  $M = \mathbb{R}$  y  $U = (0, \infty)$ , la función  $t \mapsto 1/t$  en  $C^\infty(0, \infty)$  no tiene una extensión suave (ni continua) a una función en  $C^\infty(\mathbb{R})$ .<sup>17</sup> Entonces es necesario definir con mayor precisión esta noción de “restricción” de un campo vectorial.

Si  $U$  es un abierto en una variedad diferencial  $M$  y si  $f \in C^\infty(U)$ , se puede afirmar lo siguiente, con la ayuda del Lema 1.29. Para cada  $x \in U$ , hay un abierto  $V$  de  $M$  con  $x \in V \subset \bar{V} \subseteq U$  y una función suave  $h \in C^\infty(M)$  tal que  $h|_V = f|_V$ .

**Definición 1.52.** Una función suave  $g \in C^\infty(U)$  tiene **soporte compacto** si hay una parte compacta  $K \subset U$  tal que  $g(y) = 0$  para  $y \in U \setminus K$ . (En tal caso, el soporte  $\text{sop } g$  es un cerrado incluido en  $K$  y por tanto es también compacto.) Por un teorema de topología,<sup>18</sup> hay abiertos  $V, W$  de  $M$  tales que  $\bar{V}$  y  $\bar{W}$  son compactos, que satisfacen

$$K \subset V \subset \bar{V} \subset W \subset \bar{W} \subset U.$$

Una variante del Lema 1.29, adaptado a la variedad  $M$  en vez de  $\mathbb{R}^n$ , muestra que hay una función suave  $k \in C^\infty(M)$  tal que:

$$\begin{aligned} k(q) &= 1 & \text{para } q \in \bar{V}, \\ 0 < k(q) < 1 & \text{para } q \in W \setminus \bar{V}, \\ k(q) &= 0 & \text{para } q \in M \setminus W. \end{aligned}$$

Defínase  $h \in C^\infty(M)$  por

$$h(q) := \begin{cases} g(q)k(q) & \text{si } q \in U, \\ 0 & \text{si } q \in M \setminus U. \end{cases}$$

Entonces  $h|_V = g|_V$ . Nótese que  $\text{sop } h \subseteq \text{sop } k = \bar{W}$ , así que  $h \in C^\infty(M)$  también tiene soporte compacto.

La totalidad de funciones suaves sobre  $U$  con soporte compacto se denota por  $\mathcal{D}(U)$ , o alternativamente por  $C_c^\infty(U)$ . Esta es una  $\mathbb{R}$ -subálgebra de  $C^\infty(U)$ . ◊

**Lema 1.53.** Sean  $U \subset M$  es un abierto,  $f \in C^\infty(U)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Entonces la función  $p \mapsto X_p(f)$ , para  $p \in U$ , define bien una función suave  $Xf \in C^\infty(U)$ .

<sup>17</sup>No obstante, una función en  $C^\infty(U)$  que se anula en un vecindario de la frontera de  $U$  sí puede ser extendido a  $C^\infty(M)$ , al declararla igual a cero fuera de  $U$ .

<sup>18</sup>Como  $M$  es metrizable y  $K$  compacto, hay  $V = \bigcup_{i=1}^k B(p_i, r_i)$  tal que  $K \subset V \subset \bar{V} \subseteq \bigcup_{i=1}^k \bar{B}(p_i, r_i) \subset U$ . Así,  $\bar{V}$  es también compacto, y se forma  $W$  al cubrir  $\bar{V}$  del mismo modo.

*Demostración.* Para cada  $p \in U$  hay un vecindario abierto  $V$  de  $p$  con  $p \in V \subseteq U$ , y existe  $h \in C^\infty(M)$  tal que  $f(q) = h(q)$  para  $q \in V$ . Entonces los gérmenes de  $f$  y  $h$  en  $p$  coinciden, así que  $X_p(f) = X_p h = Xh(p)$ .

Si  $W$  es otro vecindario abierto de  $p$  y si  $k \in C^\infty(M)$  coincide con  $f$  en  $W$ , entonces  $k(q) = f(q) = h(q)$  para  $q \in V \cap W$ , así que  $X_p k = X_p h$  porque los gérmenes de  $k$  y  $h$  en  $p$  coinciden. De este modo,  $Xf(p) := X_p f$  está bien definido como una función de  $U$  en  $\mathbb{R}$ . Además, como  $Xf = Xh$  en el vecindario  $V$  de  $p$ , esta función es suave en un vecindario de  $p$ . Por ser  $p \in U$  arbitrario, se concluye que  $Xf \in C^\infty(U)$ .  $\square$

Ahora bien, esta correspondencia  $X|_U: f \mapsto Xf$  es un operador lineal sobre  $C^\infty(U)$  que además cumple una regla de Leibniz análoga a (1.21), porque los valores en cada  $p \in M$  cumplen (1.12b). En resumen,  $X|_U \in \mathfrak{X}(U)$ . Este campo vectorial “local” es, por definición, la **restricción** de  $X$  al abierto  $U$ .

No es difícil comprobar que si  $g \in \mathcal{D}(U)$ , entonces  $Xg \in \mathcal{D}(U)$  también, y tanto  $g$  como  $Xg$  pueden ser considerados como elementos de  $C^\infty(M)$ , extendidos como funciones suaves que se anulan fuera de  $U$ .

► Para simplificar la discusión, tómesese una sola carta local  $(U, \phi)$  de  $M$  y considérese el dominio  $U$  como subvariedad de  $M$ . Si  $(x^1, \dots, x^n)$  es el sistema de coordenadas locales asociadas con la carta  $(U, \phi)$ , las derivadas parciales de funciones en  $\mathbb{R}^n$  proporcionan campos vectoriales en  $\mathfrak{X}(U)$  por la receta:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^j} : f \mapsto \partial_j(f \circ \phi^{-1}) \circ \phi} \quad \text{para } f \in C^\infty(U), \quad (1.23a)$$

con  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ . Su linealidad sobre  $C^\infty(U)$  y su regla de Leibniz son evidentes. En el punto  $p = \phi(0) \in U$ , los vectores tangentes correspondientes son los  $\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$  de (1.13), al reemplazar en esa fórmula 0 por  $\phi(p)$ .

Si  $q \in U$  con  $q \neq p$ , entonces  $\phi(q) \neq 0$ . Después de componer  $\phi$  con la traslación  $\alpha: x \mapsto x - \phi(q)$  de  $\mathbb{R}^n$ , se obtiene otra carta local  $(U, \alpha \circ \phi)$  tal que  $\alpha \circ \phi(q) = 0$ . El vector tangente de (1.23a) en  $q$  resulta ser

$$\frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_q (f) = \partial_j(f \circ \phi^{-1} \circ \alpha^{-1})(0) = \partial_j(f \circ \phi^{-1})(\phi(q)), \quad (1.23b)$$

al aplicar la regla de la cadena a  $(f \circ \phi^{-1}) \circ \alpha^{-1}$ , porque  $\alpha^{-1}(0) = \phi(q)$  y la derivada de la función afín  $\alpha^{-1}$  es el operador lineal  $1_n: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

**Lema 1.54.** Sea  $M$  una variedad diferencial y sea  $(U, \phi)$  una de sus cartas locales. Entonces la restricción al dominio  $U$  de un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es una suma finita:

$$\boxed{X|_U = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}} \quad (1.24)$$

con coeficientes suaves  $a^1, \dots, a^n \in C^\infty(U)$ .

*Demostración.* Si  $f \in C^\infty(U)$  y  $q \in U$ , entonces  $Xf(q) = X_q(f)$  con  $X_q \in T_qM$ . Por la Proposición 1.35, en cada punto  $q \in U$ , el vector tangente  $X_q$  tiene la forma:

$$X_q = a^j(q) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_q \quad \text{para algunos } a^1(q), \dots, a^n(q) \in \mathbb{R}.$$

La fórmula (1.23b) muestra que

$$Xf(q) = X_q(f) = a^j(q) \partial_j(f \circ \phi^{-1})(\phi(q)) = a^j(q) \frac{\partial}{\partial x^j}(f)(q).$$

En breve: hay funciones  $a^1, \dots, a^n : U \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $Xf = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}(f)$  para  $f \in C^\infty(U)$ . Ahora bien, las coordenadas locales  $x^k := \text{pr}_k \circ \phi$  son elementos del álgebra  $C^\infty(U)$  que cumplen las relaciones<sup>19</sup>

$$\frac{\partial}{\partial x^j}(x^k) = \llbracket j = k \rrbracket \quad \text{para } j, k \in \{1, \dots, n\}.$$

Entonces, para cada  $k = 1, \dots, n$ ,

$$a^k = \sum_{j=1}^n a^j \llbracket j = k \rrbracket = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}(x^k) = X(x^k) \in C^\infty(U),$$

verificando así la suavidad de la función coeficiente  $q \mapsto a^k(q)$ . □

Si  $(V, \psi)$  es otra carta local de  $M$  con  $U \cap V \neq \emptyset$  y si  $(y^1, \dots, y^n)$  son las coordenadas locales para la carta  $(U, \phi)$ , entonces el campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tiene el aspecto local

$$X|_V = b^i \frac{\partial}{\partial y^i} \quad \text{con } b^1, \dots, b^n \in C^\infty(V).$$

Cuál es la relación entre los coeficientes  $a^j$  y  $b^i$  en la intersección  $U \cap V$ ? Si se escribe  $F(x) := f \circ \phi^{-1}(x)$  para  $x \in \phi(U \cap V)$ , entonces la regla de la cadena (ordinaria) en varias variables muestra que

$$\frac{\partial F}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial F}{\partial x^j}.$$

<sup>19</sup>Cada expresión  $\llbracket j = k \rrbracket$  al lado derecho es una función constante sobre  $U$ , de valor 0 o 1.

Este es el resultado de aplicar los siguientes campos vectoriales locales a una función suave  $f \in C^\infty(U \cap V)$ :

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{en la intersección } U \cap V.$$

Por lo tanto,

$$X|_{U \cap V} = b^i \frac{\partial}{\partial y^i} = b^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

lo cual justifica la relación:

$$\boxed{a^j = b^i \frac{\partial x^j}{\partial y^i}} \quad \text{en } C^\infty(U \cap V).$$

Fíjese que  $[\partial x^j / \partial y^i]$  es la matriz (1.7) de la derivada  $D(\phi \circ \psi^{-1})$  en  $\psi(U \cap V) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Su matriz inversa es  $[\partial y^i / \partial x^j]$ , la cual representa  $D(\psi \circ \phi^{-1})$  en  $\phi(U \cap V)$ . Las últimas fórmulas exhiben diversas maneras de concretar la regla de la cadena.

► Luego de examinar estas expresiones locales para campos vectoriales, es oportuno considerar *la estructura algebraica global* de  $\mathfrak{X}(M)$ , a partir de la Definición 1.51.

**Definición 1.55.** Si  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $g \in C^\infty(M)$ , se puede definir un elemento  $gX \in \mathfrak{X}(M)$  por la correspondencia  $f \mapsto g(Xf)$  – producto puntual de las funciones  $g$  y  $\overline{Xf}$  – la cual es evidentemente lineal en  $f$  y cumple la regla de Leibniz. Es inmediato que la aplicación  $(g, X) \mapsto gX$  es  $\mathbb{R}$ -bilineal y cumple

$$g(hX) = (gh)X \quad \text{si } X \in \mathfrak{X}(M) \text{ y } g, h \in C^\infty(M), \quad 1X = X.$$

(Este 1 denota la función constante de valor 1 sobre  $M$ .) Así, el espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial  $\mathfrak{X}(M)$  es un *módulo* (a izquierda) sobre el álgebra conmutativa  $C^\infty(M)$ .  $\diamond$

**Proposición 1.56.** Si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , el **corchete**

$$\boxed{[X, Y]: f \mapsto X(Yf) - Y(Xf)} \tag{1.25a}$$

define un nuevo campo vectorial  $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ . Este corchete cumple dos propiedades:

- (a) La correspondencia  $(X, Y) \mapsto [X, Y]$  es bilineal y **antisimétrico**,  $[Y, X] = -[X, Y]$ .
- (b) El corchete satisface la **identidad de Jacobi**:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M). \tag{1.25b}$$

*Demostración.* Ad (a): Escribese  $Wf := X(Yf) - Y(Xf)$ . Está claro que  $f \mapsto Wf$  es  $\mathbb{R}$ -lineal y  $W$  lleva  $C^\infty(M)$  en  $C^\infty(M)$ . Además, se verifica

$$\begin{aligned} W(fg) &= X((Yf)g + f(Yg)) - Y((Xf)g + f(Xg)) \\ &= X(Yf)g + (Yf)(Xg) + (Xf)(Yg) + f(X(Yg)) \\ &\quad - Y(Xf)g - (Xf)(Yg) - (Yf)(Xg) - f(Y(Xg)) \\ &= (Wf)g + f(Wg), \end{aligned} \tag{1.26}$$

así que  $W \in \mathfrak{X}(M)$ . Es evidente que  $[Y, X] = -[X, Y]$ .

Ad (b): Obsérvese que

$$\begin{aligned} [X, [Y, Z]](f) &= X([Y, Z]f) - [Y, Z](Xf) \\ &= X(Y(Zf)) - X(Z(Yf)) - Y(Z(Xf)) + Z(Y(Xf)). \end{aligned}$$

Al sumar los cuatro términos al lado derecho con otros ocho obtenidos de las permutaciones cíclicas de las tres letras  $X, Y, Z$ , se obtienen 12 términos que se cancelan en pares, así que esta suma es cero.  $\square$

La Proposición 1.56 anterior dice que  $\mathfrak{X}(M)$  es un ejemplo de un **álgebra de Lie**. Un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial  $E$  es un *álgebra de Lie* si posee un corchete bilineal y antisimétrica  $[\cdot, \cdot]: E \times E \rightarrow E$  que cumple la identidad de Jacobi (1.25b). Se debe notar que esta operación binaria en  $E$  *no es asociativa*, porque en general  $[X, [Y, Z]] \neq [[X, Y], Z]$ ; de hecho, la identidad de Jacobi declara la falta de asociatividad en forma concreta, porque la antisimetría hace posible reacomodar (1.25b) así:

$$[X, [Y, Z]] = [[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]]. \tag{1.27a}$$

Considérese la aplicación  $\text{ad}_X: E \rightarrow E$  definida por  $\text{ad}_X(Y) := [X, Y]$ . Con esta notación, la relación (1.27a) se traduce así:

$$\text{ad}_X([Y, Z]) = [\text{ad}_X(Y), Z] + [Y, \text{ad}_X(Z)] \tag{1.27b}$$

de modo que cada  $\text{ad}_X$  cumple una *regla de Leibniz* con respecto al corchete de  $E$ .

► Es deseable comparar los campos vectoriales sobre dos variedades diferenciales  $M$  y  $N$ . Esto es factible si  $M$  y  $N$  son difeomorfas: cada difeomorfismo  $\tau: M \rightarrow N$  da lugar a una correspondencia entre  $\mathfrak{X}(M)$  y  $\mathfrak{X}(N)$ , detallada a continuación.

**Definición 1.57.** Sea  $\tau: M \rightarrow N$  un *difeomorfismo* entre dos variedades diferenciales. A cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$  se le puede asociar un nuevo campo vectorial  $\tau_*X \in \mathfrak{X}(N)$  por

$$\boxed{\tau_*X(h) := X(h \circ \tau) \circ \tau^{-1}} \quad \text{para } h \in C^\infty(N). \tag{1.28}$$

El campo vectorial  $\tau_*X$  es la **imagen directa**<sup>20</sup> de  $X$  bajo  $\tau$ . Al evaluar los dos lados de (1.28) en un punto  $\tau(p) \in N$ , se obtiene

$$\tau_*X(h)(\tau(p)) = X(h \circ \tau)(p) = X_p(h \circ \tau) = T_p\tau(X_p)(h)$$

al invocar la aplicación tangente  $T_p\tau$  de la Definición 1.38. Al eliminar la función  $h$  de estas fórmulas, resulta

$$\boxed{(\tau_*X)_{\tau(p)} = T_p\tau(X_p)}. \quad (1.29)$$

De esta manera, se obtiene un *isomorfismo lineal* entre los espacios tangentes en los puntos  $p \in M$  y  $\tau(p) \in N$ , dado por

$$T_p\tau: T_pM \rightarrow T_{\tau(p)}N : X_p \mapsto (\tau_*X)_{\tau(p)},$$

cuya aplicación lineal inversa es  $T_{\tau(p)}\tau^{-1}$ .

En el caso de que  $M = N$  y  $\tau$  es un difeomorfismo de  $M$  en sí mismo, se dice que  $X$  es **invariante bajo  $\tau$**  si se cumple  $\tau_*X = X$ .  $\diamond$

**Lema 1.58.** Si  $\tau: M \rightarrow N$  y  $\sigma: N \rightarrow R$  son dos difeomorfismos y si  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces  $\sigma_*(\tau_*X) = (\sigma \circ \tau)_*X$  en  $\mathfrak{X}(R)$ .

*Demostración.* Si  $k \in C^\infty(R)$ , se calcula

$$\begin{aligned} \sigma_*(\tau_*X)(k) &= \tau_*X(k \circ \sigma) \circ \sigma^{-1} = X((k \circ \sigma) \circ \tau) \circ \tau^{-1} \circ \sigma^{-1} \\ &= X(k \circ (\sigma \circ \tau)) \circ (\sigma \circ \tau)^{-1}. \end{aligned}$$

Alternativamente, nótese que la fórmula (1.29) y la regla de la cadena (1.16) implican

$$(\sigma_*(\tau_*X))_{\sigma \circ \tau(p)} = T_{\tau(p)}\sigma((\tau_*X)_{\tau(p)}) = T_{\tau(p)}\sigma(T_p\tau(X_p)) = T_p(\sigma \circ \tau)(X_p)$$

para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $p \in M$ .  $\square$

**Lema 1.59.** Sea  $\tau: M \rightarrow N$  un difeomorfismo. Entonces  $\tau_*: \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$  es un homomorfismo de álgebras de Lie; es decir, se cumple  $\tau_*[X, Y] = [\tau_*X, \tau_*Y]$  para  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .

*Demostración.* Basta calcular el efecto de  $[\tau_*X, \tau_*Y]$  sobre una función  $h \in C^\infty(N)$ :

$$\begin{aligned} [\tau_*X, \tau_*Y](h) &= \tau_*X(\tau_*Y(h)) - \tau_*Y(\tau_*X(h)) \\ &= \tau_*X(Y(h \circ \tau) \circ \tau^{-1}) - \tau_*Y(X(h \circ \tau) \circ \tau^{-1}) \\ &= X(Y(h \circ \tau)) \circ \tau^{-1} - Y(X(h \circ \tau)) \circ \tau^{-1} \\ &= [X, Y](h \circ \tau) \circ \tau^{-1} = \tau_*[X, Y](h). \end{aligned} \quad \square$$

<sup>20</sup>En inglés: **pushout** o (a veces) *push-forward*.

### 1.6. Curvas integrales y flujos

**Definición 1.60.** Una **curva integral** de un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es una curva suave  $\gamma: I \rightarrow M$  tal que

$$\boxed{\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}} \in T_{\gamma(t)}M \quad \text{para todo } t \in I. \quad (1.30)$$

La función  $t \mapsto \dot{\gamma}(t)$  es la **velocidad** de la curva  $\gamma$ . ◇

Sea  $(U, \phi)$  una carta local de  $M$  tal que  $\gamma(s) \in U$  para *algún*  $s \in I$ . Entonces hay un subintervalo abierto  $J \subseteq I$  con  $s \in J$ , tal que  $\gamma(t) \in U$  para *todo*  $t \in J$ . La expresión local (1.24) del campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  permite calcular el efecto del vector de velocidad  $\dot{\gamma}(s)$  sobre una función  $f \in C^\infty(U)$ :

$$\dot{\gamma}(s)f \equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=s} f(\gamma(t)) = X_{\gamma(s)}(f) = a^j(\gamma(s)) \frac{\partial f}{\partial x^j}(\gamma(s)).$$

Si  $f$  una de las funciones coordenadas  $x^k$ , esto se reduce a

$$(x^k \circ \gamma)'(s) = \dot{\gamma}(s)(x^k) = a^k(\gamma(s)).$$

Las funciones  $y^k \equiv x^k \circ \gamma: J \rightarrow \mathbb{R}$ , para  $k = 1, \dots, n$ , satisfacen las ecuaciones:

$$\boxed{(y^k)'(t) = (a^k \circ \phi^{-1})(y^1(t), \dots, y^n(t))} \quad \text{para todo } t \in J. \quad (1.31)$$

Este es un *sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden*. La búsqueda de las curvas integrales de  $X$  (dentro del dominio  $U$  de una carta local) se reduce a la resolución de tales ecuaciones diferenciales.

Las  $a^k \circ \phi^{-1}$  son funciones suaves sobre el abierto  $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ . El teorema de existencia y unicidad para soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden, *dadas unas condiciones iniciales*  $y^k(t_0) = x_0^k$  referidos a algún  $t_0 \in J$ , garantiza que este sistema posee una solución única en un subintervalo  $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$  de  $J$ . Sin perder generalidad, se puede redefinir  $J$  como este intervalo.

Las condiciones iniciales pueden ser reexpresadas como  $\phi(\gamma(t_0)) = x_0 \in \phi(U)$ , o bien como  $\gamma(t_0) = p$ , donde  $p \in U$  es tal que  $\phi(p) = x_0$ . En breve, se ha comprobado que *la ecuación vectorial con condición inicial*:

$$\boxed{\dot{\gamma}(t) = X_{\gamma(t)}, \quad \gamma(t_0) = p,} \quad (1.32)$$

*posee una solución única*  $t \mapsto \gamma(t)$ , definida en un intervalo abierto  $t \in J \subseteq I$ .

Como las funciones  $a^k \circ \phi^{-1}$  al lado derecho de (1.31) son suaves, la teoría de las ecuaciones diferenciales ordinarias asegura que *las soluciones  $y(t)$  dependen suavemente de las condiciones iniciales*. En detalle, existen: un número  $\varepsilon > 0$ ; un abierto  $V \subseteq U$ ; y una aplicación suave  $\beta: (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times \phi(V) \rightarrow \phi(U)$  tal que, para cada  $x \in \phi(V)$ ,  $y_x(t) \equiv \beta(t, x)$  es una solución de (1.31) con la condición inicial  $y_x(t_0) = x$ .

Defínase  $\alpha(t, q) := \phi^{-1}(\beta(t, \phi(q)))$  para  $t_0 - \varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$ ,  $q \in V$ . El párrafo anterior se traduce como sigue.

**Lema 1.61.** *Existe una función suave  $\alpha: (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \times V \rightarrow U$  tal que la función  $\gamma_q: t \mapsto \alpha(t, q)$  es una curva integral de  $X$  que pasa por  $\gamma_q(t_0) = q$ .*  $\square$

Sin perder generalidad, se puede tomar  $t_0 = 0$ ; es cuestión de reparametrizar la curva  $\gamma$  de (1.32) con  $t \mapsto t - t_0$ . La aplicación suave  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times V \rightarrow U$  se llama un **flujo local** del campo vectorial  $X$ .

**Definición 1.62.** Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial sobre una variedad  $M$ . Para cada punto  $p \in M$ , sea  $I_p$  el *intervalo máximo*<sup>21</sup> con  $0 \in I_p \subseteq \mathbb{R}$  tal que la ecuación diferencial (1.30) tenga una solución  $\gamma_p: I_p \rightarrow M$  con condición inicial  $\gamma_p(0) = p$ . En el dominio  $D_X := \{ (t, p) \in \mathbb{R} \times M : t \in I_p \}$ , defínase la función

$$\alpha: D_X \rightarrow M : (t, p) \rightarrow \gamma_p(t).$$

Este dominio  $D_X$  es un abierto de la variedad producto  $\mathbb{R} \times M$  y la función  $\alpha$  es suave, en vista de la discusión anterior. Esta función  $\alpha$  es el **flujo** (global) del campo vectorial  $X$ . Se debe notar que  $\alpha(0, p) = p$  para todo  $p \in M$ , y además:

$$\alpha(t, \alpha(s, p)) = \alpha(t + s, p) \tag{1.33}$$

si los dos lados están definidos. En efecto, la curva  $t \mapsto \alpha(t + s, p) = \gamma_p(t + s)$  pasa por el punto  $\gamma_p(s) = \alpha(s, p)$  cuando  $t = 0$ , y su vector de velocidad en  $t = 0$  es

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \gamma_p(t + s) : f \mapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma_p)(t + s) = (f \circ \gamma_p)'(s) = \dot{\gamma}_p(s)f,$$

y este es el vector  $\dot{\gamma}_p(s) \in T_{\gamma_p(s)}M$ . La unicidad de las soluciones de (1.32) entonces implica que  $\gamma_p(t + s) = \gamma_{\gamma_p(s)}(t)$ , que es un sinónimo de la fórmula (1.33).  $\diamond$

<sup>21</sup>El teorema de existencia y unicidad para soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias garantiza que haya una solución única en un intervalo corto  $(-\delta, \delta)$  alrededor de 0. En cada instante  $t_0$  de ese intervalo se puede replantear la ecuación diferencial con una condición inicial obtenida de la primera solución, lo cual extiende la solución única a un intervalo mayor  $(-\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ; y se repite el proceso. La unión de una sucesión de tales extensiones es el *intervalo máximo* de la solución.

**Proposición 1.63.** Si la variedad diferencial  $M$  es compacta, entonces  $D_X = \mathbb{R} \times M$  para cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$ .

*Demostración.* Si  $p \in M$ , hay un número  $\varepsilon_p > 0$  y un vecindario abierto  $V_p$  de  $p$  tales que  $(-\varepsilon_p, \varepsilon_p) \times V_p \subseteq D_X$ . Los abiertos  $V_p$  recubren  $M$ ; como  $M$  es compacto, hay un número finito de puntos  $p_1, \dots, p_r$  tales que  $M = V_{p_1} \cup \dots \cup V_{p_r}$ . Sea  $\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_r\}$ ; entonces  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times M \subseteq D_X$ .

Si  $-\varepsilon < s < \varepsilon$ , la curva  $t \mapsto \gamma_{\gamma_p(s)}(t)$  está definida para  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  y su vector tangente en  $t = 0$  es  $\dot{\gamma}_p(s) = X_{\gamma_p(s)}$ . Luego  $\gamma_p(t+s)$  está definido, con  $\gamma_p(t+s) := \gamma_{\gamma_p(s)}(t)$ . Como los  $t+s$  recorren el intervalo  $(-2\varepsilon, 2\varepsilon)$  y  $p$  es arbitrario, se deduce que  $(-2\varepsilon, 2\varepsilon) \times M \subseteq D_X$ . Por inducción, se obtiene  $(-2^k\varepsilon, 2^k\varepsilon) \times M \subseteq D_X$  para todo  $k$ , así que  $\mathbb{R} \times M = D_X$ .  $\square$

**Definición 1.64.** Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  se llama **completo** si  $D_X = \mathbb{R} \times M$ ; esto es, si el flujo de  $X$  está definido en todo  $\mathbb{R} \times M$ . La Proposición 1.63 asegura que cada campo vectorial sobre una variedad compacta es completa.  $\diamond$

**Ejemplo 1.65.** En la variedad unidimensional  $\mathbb{R}$ , con coordenada  $x$ , considérese el campo vectorial  $X := (1+x^2) \frac{d}{dx}$ . Sus curvas integrales satisfacen la ecuación diferencial  $y'(t) = 1+y(t)^2$ . Dada la condición inicial  $y(0) = 0$ , la solución única es  $y(t) \equiv \operatorname{tg} t$ , con derivada  $y'(t) = \sec^2 t = 1 + \operatorname{tg}^2 t$ . El intervalo maximal de esta solución es  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Por lo tanto, este campo  $X$  no es completo.  $\diamond$

**Ejemplo 1.66.** En la variedad no compacta  $\mathbb{R}^2$ , con coordenadas  $(x, y)$ , considérese el campo vectorial

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sus curvas integrales  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$  están dadas por (1.31):

$$x'(t) = -y(t), \quad y'(t) = x(t),$$

cuya solución general tiene la forma

$$x(t) = r \cos(t - t_0), \quad y(t) = r \operatorname{sen}(t - t_0),$$

dependiente de la condición inicial  $\gamma(0) = (x_0, y_0) = (r \cos t_0, -r \operatorname{sen} t_0)$ .

Si  $r = 0$ , la curva integral es constante,  $\gamma(t) \equiv (0, 0)$ ; su trayectoria es un *punto* en donde el campo vectorial  $X$  se anula. Si  $r \neq 0$ , la trayectoria es un círculo de radio  $|r|$  recorrido infinitas veces (el signo de  $r$  determina el sentido del recorrido). Este campo vectorial es completo, porque en cada caso el recorrido está parametrizado por todo  $\mathbb{R}$ :

$$\alpha(t, (x, y)) = (x \cos t - y \operatorname{sen} t, x \operatorname{sen} t + y \cos t). \quad \diamond$$

**Definición 1.67.** Sea  $X$  un campo vectorial *completo* sobre una variedad  $M$ , con flujo  $\alpha: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ . Escríbase  $\alpha_t(p) \equiv \alpha(t, p)$ . Entonces cada  $\alpha_t: M \rightarrow M$  es un difeomorfismo, con inverso  $\alpha_{-t}$  y con  $\alpha_0 = 1_M$ . En efecto, la fórmula (1.33) se transcribe en este caso como

$$\alpha_{t+s} = \alpha_t \circ \alpha_s \quad \text{para todo } t, s \in \mathbb{R}. \quad (1.34)$$

Por lo tanto,  $t \mapsto \alpha_t$  es un *homomorfismo* del grupo aditivo  $\mathbb{R}$  en el *grupo de difeomorfismos*  $\text{Diff}(M)$  de la variedad diferencial  $M$ . Los difeomorfismos  $\{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\}$  forman un subgrupo de  $\text{Diff}(M)$ ; este es el **grupo uniparamétrico**<sup>22</sup> generado por el campo vectorial completo  $X$ .  $\diamond$

**Proposición 1.68.** Sean  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f \in C^\infty(M)$ . Si  $\alpha$  es el flujo de  $X$ , entonces

$$Xf(p) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\alpha_t(p)) - f(p)}{t} \quad \text{para todo } p \in M. \quad (1.35)$$

*Demostración.* El lado derecho es la derivada, en  $t = 0$ , de la función

$$t \mapsto f(\alpha(t, p)) = f(\gamma_p(t)),$$

donde  $\gamma_p$  es la curva integral de  $X$  tal que  $\gamma_p(0) = p$ . Esta derivada en  $t = 0$  coincide con  $\dot{\gamma}_p(0)f = X_p f = Xf(p)$ .  $\square$

Al eliminar el punto  $p$  de la fórmula (1.35), queda una relación entre funciones suaves:

$$Xf = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f \circ \alpha_t - f}{t}. \quad (1.36)$$

Dícese que el campo vectorial  $X$  es el **generador** del flujo  $\alpha$ . En particular, el generador de un grupo uniparamétrico de difeomorfismos es un campo vectorial completo.

## 1.7. Grupos de Lie

**Definición 1.69.** Un **grupo de Lie** es una variedad diferencial  $G$ , que es a su vez un grupo, en donde las operaciones de grupo son aplicaciones suaves:

$$\underline{m}: G \times G \rightarrow G : (g, h) \mapsto gh, \quad \underline{i}: G \rightarrow G : g \mapsto g^{-1}.$$

En un grupo de Lie  $G$ , la *inversión*  $\iota: g \mapsto g^{-1}$  es un *difeomorfismo* de  $G$  en  $G$ , porque es biyectiva y suave, y coincide con su propio inverso.

<sup>22</sup>El flujo de un campo vectorial *incompleto* no da lugar a un grupo de difeomorfismos. En todo caso, si  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times V \subseteq D_X$ , las aplicaciones  $\alpha_t: p \mapsto \alpha(t, p)$  cumplen (1.34) toda vez que  $t, s, t + s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . En particular, vale  $\alpha_{-t} \circ \alpha_t = \alpha_t \circ \alpha_{-t} = 1_V$  sobre  $V$  para  $-\varepsilon < t < \varepsilon$ ; se dice que los  $\alpha_t$  forman un **seudogrupo** de difeomorfismos *locales*.

Las **traslaciones a izquierda**  $\lambda_g: h \mapsto gh$  son también difeomorfismos: el inverso de  $\lambda_g$  es la traslación contraria  $\lambda_{g^{-1}}$ . Las **traslaciones a derecha**  $\rho_g: h \mapsto hg$  constituyen otro juego de difeomorfismos de  $G$ .  $\diamond$

[[ Algunos autores, entre ellos el pseudoautor N. Bourbaki, definen un grupo de Lie como una variedad analítica cuyas operaciones de grupo  $m, \iota$  son *analíticas*, esto es, expresable en coordenadas locales por funciones con series de Taylor localmente convergentes. Sin embargo, resulta que la analiticidad es automática con solo suponer que  $m, \iota$  son de clase  $C^2$ . Esta es una consecuencia no trivial del teorema de la función implícita. ]]

**Ejemplo 1.70.** Un *espacio vectorial real*  $V$  de dimensión finita es un grupo de Lie abeliano bajo la operación de suma. En particular,  $(\mathbb{R}^n, +)$  es un grupo de Lie de dimensión  $n$ .

El grupo multiplicativo  $\mathbb{R}^\times := \mathbb{R} \setminus \{0\}$  es un grupo de Lie unidimensional no compacto. Como  $\mathbb{R}^\times = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$  es una unión disjunta de dos abiertos no vacíos, esta variedad diferencial es disconexa. Su **componente neutro** (el componente conexo que incluye el elemento neutro 1) es el *subgrupo y subvariedad*  $\mathbb{R}_+^\times := (0, +\infty)$ .

La función exponencial  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^\times$  es simultáneamente un isomorfismo de grupos (su inverso es la función  $\log: \mathbb{R}_+^\times \rightarrow \mathbb{R}$ ) y un difeomorfismo, pues tanto  $\exp$  como  $\log$  son biyecciones suaves. En breve:  $\exp$  es un **isomorfismo de grupos de Lie**.  $\diamond$

**Ejemplo 1.71.** El **círculo**<sup>23</sup>  $\mathbb{T} \equiv \text{U}(1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$  es un grupo de Lie *compacto*, con  $\dim \mathbb{T} = 1$ .

El **toro**  $\mathbb{T}^n := \mathbb{T} \times \cdots \times \mathbb{T}$ , el producto cartesiano de  $n$  círculos – este es también un producto directo de grupos – es un grupo de Lie abeliano, con  $\dim \mathbb{T}^n = n$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.72.** El grupo general lineal  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  del Ejemplo 1.48 es un grupo de Lie de dimensión  $n^2$ . Para verificar la suavidad de su producto, basta recordar que las entradas de la matriz  $C = AB$  son polinomios en las entradas de  $A$  y de  $B$ , mediante la fórmula  $c_{ij} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$ . La suavidad de la inversión  $\iota$  es una consecuencia de la regla de Cramer: la entrada  $(i, j)$  de  $A^{-1}$  es  $(-1)^{i+j}m_{ji}/\det A$ , donde la menor  $m_{ji}$  es un polinomio en las entradas de  $A$ .

El subgrupo  $\text{SL}(n, \mathbb{R})$  definido en el Ejemplo 1.49 es a la vez una subvariedad cerrada de  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ . Este es un grupo de Lie de dimensión  $(n^2 - 1)$ .  $\diamond$

► El próximo ejemplo es un grupo de Lie *complejo*. Una **variedad diferencial compleja** se define de igual manera que una variedad diferencial real: es un espacio topológico

<sup>23</sup>Las notaciones  $\mathbb{T}$ ,  $\text{U}(1)$  y  $\mathbb{S}^1$  son sinónimas; generalmente se usa  $\mathbb{T}$  cuando se considera el círculo como grupo de Lie. Los físicos prefieren  $\text{U}(1)$ , porque cada  $z \in \mathbb{T}$  es una matriz unitaria  $1 \times 1$ .

metrizable y separable dotado de un atlas de cartas locales  $(U, \phi)$ , donde ahora cada  $\phi(U)$  es un abierto de  $\mathbb{C}^m$  y las funciones de transición  $\psi \circ \phi^{-1}$  entre abiertos de  $\mathbb{C}^m$  son *holomorfas* (es decir, diferenciables como funciones de varias variables complejas: tales funciones son automáticamente suaves y además analíticas). Ahora bien, no existen funciones *analíticas* parcialmente nulas como las de la fórmula (1.11): lo cual implica que todas las construcciones que dependen de esa fórmula no son aplicables. Sin embargo, al recordar que  $\mathbb{C}^m \simeq \mathbb{R}^{2m}$  como espacio vectorial real, siempre es posible “olvidar” la holomorficidad y considerar una variedad diferencial compleja de dimensión  $m$  como una variedad diferencial real de dimensión  $2m$ .

**Ejemplo 1.73.** El grupo de matrices invertibles complejas

$$\underline{\text{GL}}(n, \mathbb{C}) := \{ A \in M_n(\mathbb{C}) : \det A \neq 0 \}$$

y su subgrupo  $\underline{\text{SL}}(n, \mathbb{C}) := \{ A \in M_n(\mathbb{C}) : \det A = 1 \}$  son grupos de Lie reales, de dimensiones  $2n^2$  y  $(2n^2 - 2)$ , respectivamente. De hecho,  $\underline{\text{GL}}(n, \mathbb{C})$  es un abierto en  $M_n(\mathbb{C})$ , un espacio vectorial *real* con  $\dim_{\mathbb{R}} M_n(\mathbb{C}) = 2n^2$ . Las coordenadas cartesianas de  $A \in \underline{\text{GL}}(n, \mathbb{C})$  son  $\Re a_{ij}$  y  $\Im a_{ij}$ , las partes real e imaginaria de sus  $n^2$  entradas complejas.

Resulta que la aplicación polinomial  $\underline{\det}: \underline{\text{GL}}(n, \mathbb{C}) \rightarrow \underline{\mathbb{C}}^\times \equiv \mathbb{C} \setminus \{0\}$  es una sumersión y 1 es un valor regular de  $\underline{\det}$ , así que  $\underline{\text{SL}}(n, \mathbb{C})$  es una subvariedad (y también un subgrupo) de  $\underline{\text{GL}}(n, \mathbb{C})$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.74.** El grupo ortogonal  $\underline{\text{O}}(n)$  del Ejemplo 1.50 es un grupo de Lie de dimensión  $n(n - 1)/2$ .

El grupo ortogonal especial  $\underline{\text{SO}}(n) := \underline{\text{O}}(n) \cap \underline{\text{SL}}(n, \mathbb{R})$  es el componente neutro de  $\underline{\text{O}}(n)$ . Como tal, es otro grupo de Lie de dimensión  $n(n - 1)/2$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.75.** Un grupo finito  $G$ , con su topología discreta, es un grupo de Lie de dimensión 0. (Las condiciones de suavidad son triviales en dimensión cero.)

El grupo ortogonal es un *producto semidirecto*  $\underline{\text{O}}(n) \simeq \underline{\text{SO}}(n) \rtimes C_2$  de su subgrupo normal  $\underline{\text{SO}}(n)$ , de índice 2, y el grupo finito  $C_2 := \{\pm 1\}$ . Fíjese que  $C_2 \simeq \{1_n, R\} \leq \underline{\text{O}}(n)$ , donde  $R := \text{diag}[1, \dots, 1, -1]$  es la *reflexión* de  $\mathbb{R}^n$  en el hiperplano  $x^n = 0$ .  $\diamond$

► La geometría de un grupo de Lie  $G$  admite una importante simplificación, porque solo es necesario considerar cartas locales que contienen la identidad  $1 \in G$ . Las traslaciones a izquierda  $\lambda_{g^{-1}}$  y  $\lambda_g$  (que son difeomorfismos) llevan un vecindario de cualquier punto  $g \in G$  en un vecindario de 1 y viceversa. Por ejemplo, una curva integral de un campo vectorial que pasa por  $g$  es un traslado de una curva correspondiente que pasa por 1. De

entre todos los campos vectoriales sobre  $G$ , se destacan aquellas que son invariantes por estas traslaciones a izquierda.<sup>24</sup>

**Definición 1.76.** Sea  $G$  un grupo de Lie cualquiera. Un campo vectorial  $\tilde{X} \in \mathfrak{X}(G)$  es **invariante a la izquierda** si todas las traslaciones a izquierda lo conservan:

$$(\lambda_g)_* \tilde{X} = \tilde{X} \quad \text{para todo } g \in G.$$

Escríbase  $X := \tilde{X}_1 \in T_1G$ . El campo vectorial  $\tilde{X}$  queda determinado por el vector tangente  $X$  mediante el isomorfismo lineal  $T_1\lambda_g : T_1G \rightarrow T_gG$  de (1.29):

$$\tilde{X}_g = T_1\lambda_g(\tilde{X}_1) = T_1\lambda_g(X). \quad (1.37)$$

Inversamente, dado  $Y \in T_1G$ , las recetas  $\tilde{Y}_g := T_1\lambda_g(Y)$ ,  $\tilde{Y}f(g) := \tilde{Y}_g f$  determinan un campo vectorial  $\tilde{Y}$  invariante a izquierda. La totalidad  $\mathfrak{g}$  de estos campos vectoriales invariantes es un subespacio vectorial de  $\mathfrak{X}(G)$ .

Resulta, entonces, que  $\tilde{X} \leftrightarrow X$  es una biyección  $\mathbb{R}$ -lineal  $\mathfrak{g} \leftrightarrow T_1G$ ; por lo tanto,  $\mathfrak{g}$  es *finitodimensional* y su dimensión es  $n = \dim_{\mathbb{R}} T_1G = \dim G$ , la dimensión de la variedad diferencial  $G$ .  $\diamond$

**Lema 1.77.** Si  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{g}$ , entonces  $[\tilde{X}, \tilde{Y}] \in \mathfrak{g}$  también.

*Demostración.* Del Lema 1.59 se obtiene inmediatamente:

$$(\lambda_g)_* [\tilde{X}, \tilde{Y}] = [(\lambda_g)_* \tilde{X}, (\lambda_g)_* \tilde{Y}] = [\tilde{X}, \tilde{Y}] \quad \text{para todo } g \in G. \quad \square$$

**Definición 1.78.** Defínase un **corchete** en el espacio vectorial  $T_1G$  por

$$[X, Y] := [\tilde{X}, \tilde{Y}]_1. \quad (1.38)$$

En vista de la correspondencia (1.37) y del Lema 1.77, este corchete es una operación bilineal antisimétrica sobre  $T_1G$  que cumple la identidad de Jacobi. Con ello,  $T_1G$  es un *álgebra de Lie finitodimensional*, isomorfa a la subálgebra de Lie  $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(G)$ . Entonces  $T_1G$  se bautiza **el álgebra de Lie del grupo  $G$** .

A partir de ahora, se *identificará*  $\mathfrak{g}$  con  $T_1G$  y se escribirá  $X$  en vez de  $\tilde{X}$  para aquellos campos vectoriales invariantes que pertenecen a  $\mathfrak{g}$ .  $\diamond$

Sea  $G$  un grupo de Lie, con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Si  $X \in \mathfrak{g}$ , sea  $\gamma_X : I \rightarrow G$  la curva integral del campo vectorial invariante  $X$  tal que  $\gamma_X(0) = 1$ . Entonces  $\dot{\gamma}_X(0) = X \in T_1G$ . Si el

<sup>24</sup>Algunos autores denotan la identidad de  $G$  por la letra  $e$  en vez de 1. No se gana nada con eso.

dominio inicial  $I$  de la curva  $\gamma_X$  fuera un intervalo acotado  $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$  – obtenido de la existencia de solución única para (1.32) – se podría prolongar que este intervalo en  $\mathbb{R}$ . En efecto, para cualquier  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , la curva  $\eta$  determinada por la ecuación diferencial

$$\dot{\eta}(t) = X_{\eta(t)} = T_{g^{-1}\eta(t)}\lambda_g(X_{g^{-1}\eta(t)}), \quad \eta(0) = g := \gamma_X(s),$$

tiene como solución única  $\eta(t) \equiv g\gamma_X(t) = \gamma_X(s)\gamma_X(t)$ , definida para  $-\varepsilon < t < \varepsilon$ . Esta curva constituye una prolongación de  $\gamma_X$  al intervalo  $(s-\varepsilon, s+\varepsilon)$ . De este modo, se obtiene una curva  $\gamma_X : (-2\varepsilon, 2\varepsilon) \rightarrow G$  cuya restricción al subintervalo  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  coincide con la curva original. Al iterar este proceso  $k$  veces, se prolonga  $\gamma_X$  al intervalo  $(-2^k\varepsilon, 2^k\varepsilon)$ ; luego, por inducción, se produce una curva  $\gamma_X : \mathbb{R} \rightarrow G$ , que cumple

$$\boxed{\gamma_X(s+t) = \gamma_X(s)\gamma_X(t) \quad \text{para todo } s, t \in \mathbb{R}.} \tag{1.39}$$

► Conviene resumir estas consideraciones sobre la curva integral del campo vectorial invariante  $X$  mediante la introducción de una notación especial, a continuación.

**Definición 1.79.** Sea  $G$  un grupo de Lie con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Si  $X \in \mathfrak{g}$  es un campo vectorial invariante a izquierda, su curva integral tal que  $\gamma_X(0) = 1$  cumple  $\dot{\gamma}_X(0) = X$ ; su intervalo de definición es todo  $\mathbb{R}$ ; y  $\gamma_X$  cumple la propiedad homomórfica (1.39). Por lo tanto, esta curva  $t \mapsto \gamma_X(t)$  es un *subgrupo uniparamétrico* de  $G$ , determinado unívocamente por la condición  $\dot{\gamma}_X(0) = X \in \mathfrak{g}$ . Escríbase

$$\underline{\exp X} := \gamma_X(1).$$

La construcción de  $\gamma_X$  evidencia que  $\gamma_{tX}(1) = \gamma_X(t)$ , es decir,

$$\boxed{\gamma_X(t) = \exp tX \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R}.} \tag{1.40}$$

Esta función  $\underline{\exp} : \mathfrak{g} \rightarrow G$  es la **aplicación exponencial** asociada al grupo de Lie  $G$ . ◊

**Ejemplo 1.80.** En el círculo  $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , considérese la carta local  $(U, \ell)$ , donde  $U = \mathbb{T} \setminus \{-1\}$  y  $\ell : U \rightarrow (-\pi, \pi)$  está dada por  $\ell(e^{i\theta}) = \theta$ . Fíjese que la coordenada local  $\theta$  vale  $\theta = 0$  en el punto  $z = 1$  del círculo. El campo vectorial  $X = d/d\theta$ , definido inicialmente en  $U$ , se extiende a todo  $\mathbb{S}^1$  como campo vectorial invariante por las “traslaciones” que en este caso son las *rotaciones rígidas* del círculo,  $\lambda_w : z \mapsto wz$ . [ Se deja la verificación de esta afirmación para el Ejercicio (1.21). ]

La curva integral de  $X$  tal que  $\gamma_X(0) = 1$  está dada por  $\gamma_X(t) := e^{it} \equiv \cos t + i \sin t$ . En efecto, esta curva satisface, por (1.14):

$$\langle \dot{\gamma}_X(0), f \rangle = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\gamma_X(t)) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(e^{it}) = i f'(1) = \left. \frac{d}{d\theta} \right|_1 (f),$$

y  $\dot{\gamma}_X(0) = (d/d\theta)|_1 = X_1 = X$ , identificando el campo invariante  $X$  con su valor en 1.

En este caso, la curva integral está definido inicialmente en  $I = (-\pi, \pi)$  por la fórmula  $\gamma_X(\theta) := e^{i\theta}$ . Su prolongación a todo  $t \in \mathbb{R}$  señala que la curva integral gira alrededor del círculo infinitas veces. En este caso, la función exponencial es  $\exp tX \equiv e^{it}$  y el grupo uniparamétrico define un homomorfismo sobreyectivo (pero no inyectivo)  $\exp: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ .

*Nota:* la “rama principal” de la función logarítmica  $\log: U \rightarrow \mathbb{C}$  está dada por  $\log(e^{i\theta}) = i\theta$ . Al cambiar  $\ell$  por  $\underline{\log}$  en el cálculo anterior, la fórmula  $\exp t := e^{it}$  se modifica en  $\exp(it) = e^{it}$ . De este modo, se identifica el espacio tangente  $T_1\mathbb{T}$  con  $i\mathbb{R}$ , un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial unidimensional del cual  $\{i\}$  es una base.  $\diamond$

Un **grupo de Lie lineal** es un grupo de Lie  $G$  tal que  $G \subseteq GL(n, \mathbb{F})$  para algún  $n$ , donde  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . El espacio tangente  $T_1G$  puede identificarse con un subespacio  $\mathbb{R}$ -vectorial de  $M_n(\mathbb{F})$ . En tales casos, la **exponencial matricial**

$$\exp X := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} X^k \tag{1.41}$$

coincide con la aplicación exponencial de  $G$ . La búsqueda del álgebra de Lie se reduce a la tarea de identificar un subespacio (real) de matrices:

$$\mathfrak{g} = \{ X \in M_n(\mathbb{F}) : \exp tX \in G \text{ para todo } t \in \mathbb{R} \}, \tag{1.42}$$

en vista del siguiente resultado sobre exponenciales matriciales.

**Lema 1.81.** Si  $X, Y \in M_n(\mathbb{F})$  con  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ , entonces

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} (\exp tX \exp tY \exp(-tX) \exp(-tY)) = XY - YX. \tag{1.43}$$

*Demostración.* Se aprovecha la **fórmula de Campbell, Baker y Hausdorff**:<sup>25</sup>

$$\exp tX \exp tY = \exp\left(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)\right). \tag{1.44}$$

Esta fórmula viene del desarrollo de Taylor en  $t = 0$ :

$$\begin{aligned} \exp tX \exp tY &= \left(1 + tX + \frac{1}{2}t^2X^2 + O(t^3)\right)\left(1 + tY + \frac{1}{2}t^2Y^2 + O(t^3)\right) \\ &= 1 + t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(X^2 + 2XY + Y^2) + O(t^3) \\ &= 1 + t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(X + Y)^2 + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3) \\ &= \exp\left(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)\right). \end{aligned}$$

<sup>25</sup>La **notación de Landau**  $O(t^3)$  indica alguna función  $F(t)$  tal que  $F(t)/t^3$  permanece acotada al dejar  $t \rightarrow 0$ , y por ende puede despreciarse en comparación con  $t^2$  cuando  $t$  es pequeño.

En el último paso, se ha empleado la expansión logarítmica:

$$1 + A = \exp\left(A - \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3}A^3 - \dots\right)$$

porque la serie al lado derecho converge en el caso de interés  $A = t(X + Y)$  si  $t$  es suficientemente pequeño. Ahora se puede aplicar (1.44) tres veces, para obtener

$$\begin{aligned} & \exp tX \exp tY \exp(-tX) \exp(-tY) \\ &= \exp\left(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)\right) \exp\left(-t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2(XY - YX) + O(t^3)\right) \\ &= \exp\left(t^2(XY - YX) + O(t^3)\right). \end{aligned}$$

Ahora, al derivar el lado derecho dos veces en  $t = 0$ , se obtiene la fórmula deseada.  $\square$

*Observación.* En vista del Lema 1.81, sea  $G$  un grupo de Lie cualquiera, con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Si  $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{g}$  con  $X = \tilde{X}_1, Y = \tilde{Y}_1$  en  $T_1G$ , la fórmula

$$f \mapsto \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} f(\exp \sqrt{s}X \exp \sqrt{s}Y \exp(-\sqrt{s}X) \exp(-\sqrt{s}Y))$$

define un vector tangente en  $T_1G$ . Al notar que

$$Xf = \tilde{X}_1 f = \dot{\gamma}_X(0)f = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\exp tX)$$

puesto que  $\gamma_X(t) := \exp tX$  es una curva integral de  $\tilde{X}$ , el Lema 1.81 permite calcular este vector tangente en el caso matricial. Basta notar que el cambio de parámetro  $t = \sqrt{s}$ ,  $s = t^2$  conduce a

$$\frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d}{ds} + 2s \frac{d^2}{ds^2} \implies \left. \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \right|_{t=0} = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0}$$

y la fórmula (1.43) da como resultado el *conmutador matricial*  $XY - YX$  en el caso de que  $\mathfrak{g} \leq M_n(\mathbb{F})$ . Por otro lado, los cálculos de la demostración del Lema 1.81, usando la relación  $\tilde{X}f = \frac{d}{dt} f(\exp tX)$  y el desarrollo de Taylor de  $f$  hasta segundo orden, muestran que

$$f(\exp tX \exp tY) = f\left(\exp(t(X + Y) + \frac{1}{2}t^2Z)\right) + O(t^3)$$

donde  $Z = \tilde{Z}_1$  y  $\tilde{Z} = \tilde{X}\tilde{Y} - \tilde{Y}\tilde{X}$  en  $\mathfrak{X}(G)$ , lo cual implica que  $Z = [X, Y]$  en  $T_1G$ . La conclusión de los dos cálculos – como era de esperar – es que

$$[X, Y] \equiv [\tilde{X}, \tilde{Y}]_1 = XY - YX \quad \text{cuando} \quad \mathfrak{g} \leq M_n(\mathbb{F}).$$

**Definición 1.82.** Sea  $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ . Un **álgebra de Lie matricial** (real o complejo, según el caso) es un subespacio  $\mathbb{F}$ -vectorial  $\mathfrak{g}$  de  $M_n(\mathbb{F})$ , para algún  $n \in \mathbb{N}$ , que es cerrado bajo la formación de conmutadores: si  $X, Y \in \mathfrak{g}$ , entonces  $XY - YX \in \mathfrak{g}$ . Su corchete de Lie es el conmutador,  $[X, Y] := XY - YX$ .

Escríbase  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) := M_n(\mathbb{R})$  y  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) := M_n(\mathbb{C})$ , considerados como álgebras de Lie matriciales. Ellas son las álgebras de Lie asociados a los grupos generales lineales  $GL(n, \mathbb{R})$  y  $GL(n, \mathbb{C})$ , respectivamente.  $\diamond$

**Ejemplo 1.83.** Cualquier matriz  $X \in M_n(\mathbb{F})$  verifica la identidad:

$$\det(\exp X) = e^{\text{tr} X} \tag{1.45}$$

donde  $\text{tr} X$  denota la **traza** de la matriz  $X$ .

Para comprobar (1.45), basta tomar  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ . Fíjese que  $\exp(PXP^{-1}) = P(\exp X)P^{-1}$  al usar la serie de Taylor (1.41), así que la semejanza  $X \mapsto PXP^{-1}$  deja sin cambio los dos lados de (1.45); sin perder generalidad, entonces, se puede suponer que la matriz  $X$  es triangular<sup>26</sup> con entradas diagonales  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Entonces  $\exp X$  es una matriz triangular, con entradas diagonales  $(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$ , de donde (1.45) es obvio.

En particular, la condición  $\det(\exp tX) \equiv 1$  para todo  $t \in \mathbb{R}$  es equivalente a la condición  $\text{tr} X = 0$ . Por lo tanto, el álgebra de Lie de  $G = SL(n, \mathbb{F})$  es

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F}) := \{ X \in M_n(\mathbb{F}) : \text{tr} X = 0 \}.$$

Este resultado proporciona otra manera de calcular la dimensión de  $SL(n, \mathbb{R})$ , al observar que  $\dim SL(n, \mathbb{R}) = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = n^2 - 1$ .  $\diamond$

**Definición 1.84.** Sea  $d$  una *forma bilineal simétrica no degenerada* sobre  $\mathbb{R}^n$ , es decir,  $d(x, y) = d(y, x)$  para  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ; con  $d(x, y) = 0$  para todo  $x$  solo si  $y = 0$ . Por el teorema de Sylvester, después de un cambio de base en  $\mathbb{R}^n$ ,  $d$  obtiene el formato:

$$d(x, y) = x_1y_1 + \dots + x_p y_p - x_{p+1}y_{p+1} - \dots - x_{p+q}y_{p+q}, \tag{1.46}$$

con **rango**  $p + q = n$  (pues  $d$  es no degenerada) y **signatura**  $p - q$ . Defínase el **grupo de simetría de  $d$**  por

$$\underline{O}(p, q) := \{ A \in GL(p + q, \mathbb{R}) : d(Ax, Ay) = d(x, y) \text{ para } x, y \in \mathbb{R}^{p+q} \}. \tag{1.47}$$

<sup>26</sup>Un teorema de Schur dice que cualquier matriz compleja  $X \in M_n(\mathbb{C})$  es semejante a una matriz triangular mediante un cambio de base ortonormal de  $\mathbb{C}^n$ . Alternativamente,  $X$  posee una forma normal de Jordan, la cual es triangular. Estas técnicas no están disponibles en el caso de matrices reales; por ejemplo, la matriz real  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  no es trigonalizable sin usar escalares complejos.

Si  $q = 0$ , la forma bilineal  $d$  es *definida positiva* y se escribe  $O(n)$  en vez de  $O(n, 0)$ ; este coincide con el *grupo ortogonal* del Ejemplo 1.50, porque  $d$  es el producto escalar usual sobre  $\mathbb{R}^n$ . Si en (1.47) se toma  $g \in SL(p + q, \mathbb{R})$ , es decir, si se añade la condición  $\det g = 1$ , se definen los subgrupos

$$\underline{SO}(p, q) := O(p, q) \cap SL(p + q, \mathbb{R}). \quad \diamond$$

**Definición 1.85.** Sea  $s$  una *forma bilineal alternante no degenerada* sobre  $\mathbb{R}^{2n}$ , es decir,  $s(x, y) = -s(y, x)$  para  $x, y \in \mathbb{R}^{2n}$ ; con  $s(x, y) = 0$  para todo  $x$  solo si  $y = 0$ . Tales formas alternantes no degeneradas existen solo si la dimensión es par,  $n = 2m$ . Después de un cambio de base en  $\mathbb{R}^{2m}$ ,  $\underline{s}$  obtiene el formato:

$$s(x, y) = x_{m+1}y_1 + \cdots + x_{2m}y_m - x_1y_{m+1} - \cdots - x_my_{2m}.$$

Escríbase

$$J \equiv J_{2m} := \begin{pmatrix} 0 & 1_m \\ -1_m & 0 \end{pmatrix} \in M_{2m}(\mathbb{R}). \quad (1.48)$$

entonces la forma bilineal  $d_J(x, y) := s(x, Jy)$  es simétrica y definida positiva. El **grupo simpléctico** de  $\mathbb{R}^{2m}$  es el grupo de simetría de  $s$ , dado por<sup>27</sup>

$$\underline{Sp}(2m, \mathbb{R}) := \{ B \in GL(2m, \mathbb{R}) : s(Bx, By) = s(x, y) \text{ para } x, y \in \mathbb{R}^{2m} \}. \quad (1.49)$$

Si  $B \mapsto B^t$  denota la transpuesta de  $B$  con respecto a la forma simétrica  $d_J$ , entonces  $B \in \underline{Sp}(m, \mathbb{R})$  si y solo si  $d_J(JBx, By) \equiv d_J(Jx, y)$  si y solo si  $\underline{B^tJB} = J$ .

Nótese que  $J \in \underline{Sp}(2m, \mathbb{R})$  y que  $J^2 = -1_{2m}$  en  $M_{2m}(\mathbb{R})$ . \(\diamond\)

**Definición 1.86.** Denótese por  $A^* = [\bar{a}_{ji}]$  el *conjugado hermítico* de  $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{C})$ . El **grupo unitario**

$$\underline{U}(n) := \{ U \in M_n(\mathbb{C}) : U^*U = 1_n \}$$

es un grupo de Lie. Este es el grupo de simetría del producto escalar usual de  $\mathbb{C}^n$ , el cual es una forma sesquilineal hermítica. Obsérvese que  $U(1) = \mathbb{T}$  es el círculo unitario.

El **grupo especial unitario** es el subgrupo de Lie:

$$\underline{SU}(n) := U(n) \cap SL(n, \mathbb{C}) = \{ U \in U(n) : \det U = 1 \}. \quad \diamond$$

**Definición 1.87.** Si  $V$  es un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial con una base  $\{v_1, \dots, v_n\}$ . Denótese por  $V_{\mathbb{C}} := V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \equiv V \oplus iV$  su **complexificación**, la cual es un espacio  $\mathbb{C}$ -vectorial. Ahora  $\{v_1, \dots, v_n\}$  es también una base de  $V_{\mathbb{C}}$  sobre  $\mathbb{C}$ , mientras  $\{v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n\}$  es una base de  $V_{\mathbb{C}}$  como espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial. Por lo tanto,  $\dim_{\mathbb{C}} V_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{R}} V = \frac{1}{2} \dim_{\mathbb{R}} V_{\mathbb{C}}$ ; y en particular,  $(\mathbb{R}^n)_{\mathbb{C}} \simeq \mathbb{C}^n$ .

<sup>27</sup>Algunos libros denotan el grupo (1.49) por  $\underline{Sp}(m, \mathbb{R})$  en vez de  $\underline{Sp}(2m, \mathbb{R})$ .

Se puede *ampliar* una forma  $\mathbb{R}$ -bilineal sobre  $V$  a una forma  $\mathbb{C}$ -bilineal sobre  $V_{\mathbb{C}}$  así:

$$d(u + iv, x + iy) := d(u, x) - d(v, y) + i d(u, y) + i d(v, x) \in \mathbb{C}.$$

En la clasificación de formas bilineales simétricas sobre  $\mathbb{C}^n$ , la signatura no cuenta porque  $-1 = i^2$  es un cuadrado. Si  $d$  es no degenerada sobre  $\mathbb{R}^n$ , la forma ampliada  $d$  es no degenerada sobre  $\mathbb{C}^n$  y su grupo de simetría es

$$\underline{O(n, \mathbb{C})} := \{ C \in \text{GL}(n, \mathbb{C}) : d(Cx, Cy) = d(x, y) \text{ para } x, y \in \mathbb{C}^n \}.$$

De modo similar, una forma  $\mathbb{R}$ -bilineal alternante  $s$  sobre  $\mathbb{R}^{2m}$ , ampliada a una forma  $\mathbb{C}$ -bilineal alternante sobre  $\mathbb{C}^{2m}$ , posee el grupo de simetría:

$$\underline{\text{Sp}(2m, \mathbb{C})} := \{ D \in \text{GL}(2m, \mathbb{C}) : s(Dx, Dy) = s(x, y) \text{ para } x, y \in \mathbb{C}^{2m} \}.$$

Ahora,  $\text{Sp}(2m, \mathbb{C})$  y  $\text{U}(2m)$  son subgrupos de  $\text{GL}(2m, \mathbb{C})$ . Su intersección es:

$$\underline{\text{Sp}(2m)} := \text{Sp}(2m, \mathbb{C}) \cap \text{U}(2m). \quad \diamond$$

**Proposición 1.88.** *Los grupos de Lie  $O(n)$ ,  $SO(n)$ ,  $U(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $\text{Sp}(2m)$  son compactos.*

*Demostración.* Los grupos  $SO(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $\text{Sp}(2m)$  son subgrupos cerrados de  $O(n)$ ,  $U(n)$  y  $\text{U}(2m)$ , respectivamente. Basta mostrar, entonces, que  $O(n)$  y  $U(n)$  son compactos.

Sea  $d$  el producto escalar usual sobre  $\mathbb{R}^n$ . Una matriz  $A \in M_n(\mathbb{R})$ , con *columnas*  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}^n$ , es ortogonal si y solo si  $A^t A = 1_n$ ; si y solo si  $d(a_i, a_j) = \delta_{ij}$ ; si y solo si las columnas forman una *base ortonormal* de  $\mathbb{R}^n$ . Esto implica que  $\|a_j\| = 1$  para cada  $j$  y  $\|a_1\|^2 + \dots + \|a_n\|^2 = n$  (por el teorema de Pitágoras). Por lo tanto, el vector en  $\mathbb{R}^{n^2}$  cuyas coordenadas son las entradas  $a_{ij}$  de  $A$  tiene norma euclidiana  $\sqrt{n}$ . De esta manera, se identifica  $O(n)$  con una parte cerrada de la esfera de radio  $\sqrt{n}$  en  $\mathbb{R}^{n^2}$ . Por el teorema de Heine y Borel, este conjunto cerrado y acotado  $O(n)$  es compacto.

El mismo argumento se aplica a  $U(n)$ , cambiando el producto escalar real  $d$  por el producto escalar *sesquilineal*  $\langle w | z \rangle := \bar{w}_1 z_1 + \dots + \bar{w}_n z_n$  para  $w, z \in \mathbb{C}^n$ . Ahora,  $U \in M_n(\mathbb{C})$  es unitaria si y solo si sus columnas forman una base ortonormal de  $\mathbb{C}^n$ . Luego,  $U(n)$  es una parte cerrada de la esfera de radio  $\sqrt{n}$  en  $\mathbb{C}^{n^2} \simeq \mathbb{R}^{2n^2}$ .  $\square$

Hay un extenso catálogo de grupos de Lie, más allá de los ejemplos mencionados arriba (los cuales, colectivamente, se designan los *grupos clásicos*). Hay varios grupos de matrices triangulares, que no caben en el catálogo anterior; algunos “grupos excepcionales” aparecen como grupos de automorfismos de ciertas estructuras algebraicas. Para el importante grupo de Heisenberg, véase el Ejercicio 1.29.

### 1.8. Espacios homogéneos

**Definición 1.89.** Sea  $G$  un grupo de Lie. Un subgrupo  $H \leq G$  que es también una variedad diferencial se llama un **subgrupo de Lie** de  $G$  si la inclusión  $i : H \hookrightarrow G$  es una inmersión inyectiva. (Un subgrupo de Lie no necesariamente es cerrado en  $G$ .)

Sin embargo, si  $H$  es un subgrupo de Lie *cerrado*, resulta que  $H$  es también una subvariedad<sup>28</sup> de  $G$  y cada **coclase a izquierda**  $gH := \{gh : h \in H\} = \lambda_g(H)$  es una subvariedad cerrada de  $G$ . El conjunto de coclases

$$G/H := \{gH : g \in G\}$$

puede ser dotado de una estructura diferencial de tal manera que la *aplicación cociente*

$$\eta : G \rightarrow G/H : g \mapsto gH$$

es una sumersión sobreyectiva. En tal caso, se dice que  $G/H$  es la **variedad cociente** de  $G$  por el subgrupo cerrado  $H$ .

Si el subgrupo  $H$  no es normal en  $G$ , entonces  $G/H$  generalmente no es un grupo. En cambio, si  $H \trianglelefteq G$  es un subgrupo *normal* cerrado, entonces  $G/H$  es un grupo de Lie y la aplicación cociente  $\eta$  es un homomorfismo.<sup>29</sup>  $\diamond$

**Ejemplo 1.90.** El toro  $\mathbb{T}^2$  es un grupo de Lie compacto y abeliano. Sea  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  un número irracional; se define un homomorfismo  $\rho_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$  por

$$\rho_a(t) := (e^{2\pi it}, e^{2\pi iat}).$$

Entonces  $\rho_a$  es una inmersión inyectiva, pero no un encaje: véase el Ejercicio 1.9. Esto implica que el subgrupo de Lie  $H = \rho_a(\mathbb{R})$  no es cerrado en  $\mathbb{T}^2$ , y por ende  $\rho_a$  no es sobreyectiva, aunque  $H$  resulta ser denso en  $\mathbb{T}^2$ . (La trayectoria  $\rho_a(\mathbb{R})$  es un hilo que enrolla el toro, pasando infinitas veces por cada vecindario de cualquier punto del toro.)

En cambio, si  $p/q$  es racional, ( $p, q \in \mathbb{N}$ ), entonces  $\rho_{p/q}(kq) = (e^{2\pi ikq}, e^{2\pi ikp}) = (1, 1)$  para todo  $k \in \mathbb{Z}$ . En este caso, el homomorfismo  $\rho_{p/q}$  no es inyectivo, pero  $H = \rho_{p/q}(\mathbb{R})$  es un subgrupo cerrado de  $\mathbb{T}^2$  que es difeomorfo al círculo  $\mathbb{T}$ .  $\diamond$

► La formación de una variedad cociente  $G/H$  es un caso particular de un procedimiento más general, que es el de una *acción* de un grupo de Lie  $G$ . En el contexto actual, interesa solamente las acciones dadas por funciones suaves.

<sup>28</sup>Aquí se omite la prueba de esta afirmación. De hecho, hay un teorema que asegura que un subgrupo de Lie de  $G$  es cerrado si y solo si es una subvariedad de  $G$ . Para una demostración, véase la sección 5.3 del libro de Conlon.

<sup>29</sup>Estas afirmaciones están demostradas en las secciones 16.9 y 16.10 del libro de Dieudonné.

**Definición 1.91.** Sea  $G$  un grupo de Lie y sea  $M$  una variedad diferencial. Una **acción** (suave, a izquierda) de  $G$  sobre  $M$  es una aplicación suave  $\Phi: G \times M \rightarrow M$  tal que:

- (a)  $\Phi(g, \Phi(h, p)) = \Phi(gh, p)$  para todo  $g, h \in G, p \in M$ ;
- (b)  $\Phi(1, p) = p$  para todo  $p \in M$ .

Escríbase  $\underline{g \cdot p} := \Phi(g, p)$ ; con esta notación, las dos propiedades de una acción son:

$$\boxed{g \cdot (h \cdot p) = (gh) \cdot p, \quad 1 \cdot p = p.} \tag{1.50}$$

Luego, cada  $\underline{\Phi_g}: p \mapsto g \cdot p$  es un difeomorfismo de  $M$ , y  $g \mapsto \underline{\Phi_g}$  es un homomorfismo de  $G$  en el grupo  $\underline{\text{Diff}(M)}$  de difeomorfismos de  $M$  en sí mismo.<sup>30</sup>  $\diamond$

**Ejemplo 1.92.** Un grupo de Lie  $G$  actúa sobre sí mismo por las *traslaciones a izquierda*, porque el producto  $\Phi(g, h) \equiv m(g, h) := gh$  es suave, por definición. La regla (1.50) sigue de la asociatividad del producto; y  $\Phi_g$  coincide con la traslación  $\lambda_g$  en este caso.

El grupo  $G$  también actúa sobre sí mismo por las *traslaciones a derecha*; en cuyo caso, la acción está dada por  $g \cdot h := hg^{-1}$ , para cumplir con (1.50). Ahora  $\Phi_g = \rho_{g^{-1}}$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.93.** Otra acción de un grupo de Lie  $G$  sobre sí mismo viene de la *conjugación* en  $G$ , al definir  $g \cdot h := ghg^{-1}$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.94.** El círculo  $\mathbb{T}$  actúa sobre la esfera  $\mathbb{S}^2$  por rotaciones alrededor de un eje fijo. Si este eje es el diámetro entre los polos norte y sur, la acción está dada en coordenadas esféricas<sup>31</sup> por  $e^{i\alpha} \cdot (\theta, \phi) := (\theta, \phi + \alpha)$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.95.** El grupo  $\text{SO}(n)$  actúa sobre  $\mathbb{R}^n$  por rotaciones, al tomar  $A \cdot x := Ax$ , el producto usual de una matriz cuadrada por un vector columna.

La matriz diagonal  $R = \text{diag}[1, \dots, 1, -1] \in \text{O}(n)$  es la *reflexión* de  $\mathbb{R}^n$  en el hiperplano  $x^n = 0$ . Es obvio que  $\text{O}(n) \setminus \text{SO}(n) = \{AR : A \in \text{SO}(n)\}$ ; se dice que  $\text{O}(n)$  actúa sobre  $\mathbb{R}^n$  por rotaciones y reflexiones.  $\diamond$

<sup>30</sup>El grupo  $\text{Diff}(M)$  generalmente no es un grupo de Lie, porque tiene dimensión infinita; pero posee algunos subgrupos que sí son grupos de Lie.

<sup>31</sup>Las coordenadas esféricas son coordenadas locales de una carta con dominio  $U = \mathbb{S}^2 \setminus L$ , donde  $L$  es un meridiano semicircular entre los polos norte y sur. La imagen de  $U$  en  $\mathbb{R}^2$  es el rectángulo abierto  $0 < \theta < \pi, -\pi < \phi < \pi$ ; este  $\theta$  es el **ángulo polar** y  $\phi$  es el **ángulo acimutal** de la cartografía. (Nótese que el convenio opuesto, con  $\theta \leftrightarrow \phi$ , es común en los libros de cálculo diferencial e integral.)

**Definición 1.96.** Si  $G$  un grupo de Lie que actúa sobre una variedad  $M$ , sea  $p \in M$ . El **subgrupo de isotropía**  $G_p \leq G$  y la **órbita**  $G \cdot p \subseteq M$  se definen por:

$$G_p := \{ h \in G : h \cdot p = p \}, \quad G \cdot p := \{ g \cdot p \in M : g \in G \}. \quad (1.51)$$

Una acción es **transitiva** si posee una sola órbita:  $G \cdot p = M$  para todo  $p \in M$ .

Una variedad diferencial que posee una acción transitiva de un grupo de Lie  $G$  se llama un **espacio homogéneo** de  $G$ .  $\diamond$

El subgrupo de isotropía  $G_p$  de una acción suave es un *subgrupo de Lie cerrado*. Si la órbita  $G \cdot p$  es una *subvariedad* de  $M$ , esa órbita es un espacio homogéneo para  $G$ , difeomorfo a la variedad cociente  $G/G_p$  mediante  $g \cdot p \leftrightarrow g G_p$ . Esta correspondencia está bien definida, porque  $g \cdot p = h \cdot p$  si y solo si  $g^{-1}h \cdot p = g^{-1} \cdot (h \cdot p) = g^{-1} \cdot (g \cdot p) = p$ ; si y solo si  $g^{-1}h \in G_p$ ; si y solo si  $g G_p = h G_p$ .

**Ejemplo 1.97.** El grupo  $G = \text{SO}(n)$  actúa sobre  $M = \mathbb{R}^n$  por rotaciones. El subgrupo de isotropía del vector  $e_n = (0, \dots, 0, 1)$  es isomorfo a  $\text{SO}(n - 1)$ . Por otro lado, la órbita de  $e_n$  es la esfera unitaria  $\mathbb{S}^{n-1}$ , la cual es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n$ . Luego  $\mathbb{S}^{n-1}$  es un espacio homogéneo, difeomorfo al cociente  $\text{SO}(n)/\text{SO}(n - 1)$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.98.** Una forma bilineal simétrica cualquiera sobre  $\mathbb{R}^n$  (degenerada o no) está dada por  $d(x, y) = x^t R y$ , donde  $R \in \text{Sim}(n) \subset M_n(\mathbb{R})$  es una matriz simétrica real. Si  $\mathcal{F}$  es el conjunto de las formas bilineales simétricas sobre, entonces el grupo de Lie  $\text{GL}(n, \mathbb{R})$  actúa sobre  $\mathcal{F}$ , o equivalentemente sobre  $\text{Sim}(n)$ , por

$$A \cdot d(x, y) := d(A^{-1}x, A^{-1}y), \quad \text{o bien} \quad A \cdot R := A^{-t} R A^{-1}.$$

Referente a estas acciones, el grupo de Lie  $\text{O}(p, q)$  es el subgrupo de isotropía de la forma  $d$  dada por la fórmula (1.46), o bien de la matriz diagonal  $\text{diag}[1, \dots, 1, -1, \dots, -1]$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.99.** Si  $k \in \{1, \dots, n\}$ , un  **$k$ -marco** en  $\mathbb{R}^n$  es un juego ordenado  $(u_1, \dots, u_k)$  de  $k$  vectores de norma 1 en  $\mathbb{R}^n$  ortogonales entre sí. Si  $A \in \text{O}(n)$ ,  $(Au_1, \dots, Au_k)$  es otro  $k$ -marco. Denótese por  $\text{St}(k, \mathbb{R}^n)$  la totalidad de estos  $k$ -marcos. La receta  $A \cdot (u_1, \dots, u_k) := (Au_1, \dots, Au_k)$  define una acción, por (1.50). Si  $\{e_1, \dots, e_n\}$  denota la base ortonormal estándar de  $\mathbb{R}^n$ , es obvio que  $A \cdot (e_1, \dots, e_k) = (e_1, \dots, e_k)$  si y solo si

$$A = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

donde  $C$  es una matriz ortogonal en  $\text{O}(n - k)$ . Luego hay una correspondencia biyectiva entre  $\text{St}(k, \mathbb{R}^n)$  y la variedad cociente  $\text{O}(n)/\text{O}(n - k)$ . Con un atlas que hace de esta biyección un difeomorfismo,  $\text{St}(k, \mathbb{R}^n)$  es la **variedad de Stiefel** de  $k$ -marcos en  $\mathbb{R}^n$ .  $\diamond$

**Ejemplo 1.100.** El conjunto  $\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n)$  de los subespacios de  $\mathbb{R}^n$  con dimensión  $k$ , dotado de una atlas apropiado, se llama una **variedad de Grassmann**.

Se identifica  $\mathbb{R}^k$  con el subespacio  $\text{lin}\langle e_1, \dots, e_k \rangle \leq \mathbb{R}^n$ . Si  $V \leq \mathbb{R}^n$  con  $\dim V = k$  y si  $A \in O(n)$ , entonces  $A(V) = \{Ax : x \in V\}$  es otro subespacio  $k$ -dimensional. Obsérvese que  $A(\mathbb{R}^k) = \mathbb{R}^k$  si y solo si

$$A = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

con  $B \in O(k)$  y  $C \in O(n - k)$ . En efecto, la relación  $A(V) = V$  implica  $A^t(V^\perp) = V^\perp$ , donde  $V^\perp$  es el complemento ortogonal de  $V$  en  $\mathbb{R}^n$ . Por lo tanto, hay una biyección (que resulta ser un difeomorfismo):

$$\text{Gr}(k, \mathbb{R}^n) \longleftrightarrow \frac{O(n)}{O(k) \times O(n - k)}.$$

En particular,  $\text{Gr}(1, \mathbb{R}^n)$  es una variedad diferencial cuyos elementos son *rectas* que pasan por el origen de  $\mathbb{R}^n$ ; Luego,  $\text{Gr}(1, \mathbb{R}^n) = \mathbb{R}P^{n-1}$ , el **espacio proyectivo real**.  $\diamond$

## 1.9. Fibrados

**Definición 1.101.** Un **fibrado** o *haz fibrado*,<sup>32</sup> cuya **fibra típica** es una variedad diferencial  $F$ , es un juego  $(E, M, \pi; F)$ , generalmente denotado por  $\underline{E} \xrightarrow{\pi} \underline{M}$ , compuesto de otras dos variedades diferenciales  $E$  y  $M$  junto con una sumersión sobreyectiva  $\pi: E \rightarrow M$ , que satisfacen estas dos condiciones:

- (a) Para cada  $p \in M$ , la **fibra**  $\underline{E}_p := \pi^{-1}(\{p\})$  es difeomorfa a  $F$ .
- (b) Existe un cubrimiento abierto  $\{U_j : j \in J\}$  de  $M$  y un juego de difeomorfismos

$$\boxed{\psi_j: \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F,} \quad \text{para cada } j \in J, \quad (1.52)$$

tales que  $\pi(\psi_j^{-1}(p, v)) = p$  para  $p \in U_j, v \in F$ .

La variedad  $E$  es el **espacio total** y  $M$  es la **base** del fibrado; la sumersión  $\pi$  se llama la **proyección** del fibrado. Los  $\psi_j$  son **trivializaciones locales**; debido a su existencia, se dice que el fibrado es **localmente trivial**.  $\diamond$

<sup>32</sup>Los libros mexicanos lo llaman simplemente un *haz*. Sin embargo, el nombre *haz* (*faisceau*, en francés; *sheaf*, en inglés) se refiere correctamente a otro concepto fundamental de la en la geometría algebraica; en general, un haz no es localmente trivial.

El espacio total  $E$  es la unión disjunta de las fibras  $E_p$ . Cada fibra es la preimagen bajo una sumersión de un punto de  $M$  y por tanto la Proposición 1.45 garantiza que  $E_p$  es una *subvariedad* de  $M$ , con dimensión  $\dim E_p = \dim E - \dim M$ . En general, entonces, se cumple:  $\dim E = \dim M + \dim F$ .

**Ejemplo 1.102.** La *variedad producto*  $E = M \times F$  define un fibrado  $(M \times F) \xrightarrow{\text{pr}_1} M$  con fibra típica  $F$  y proyección  $\text{pr}_1: M \times F \rightarrow M: (p, v) \mapsto p$ . Si  $U$  es un abierto de  $M$ , entonces  $\pi^{-1}(U) = U \times F$  y la trivialización correspondiente es  $\psi := 1_{U \times F}$ .

Si  $E$  es una variedad diferencial difeomorfa a  $M \times F$  mediante un *difeomorfismo*  $\beta: E \rightarrow M \times F$ , tómesese  $\pi := \text{pr}_1 \circ \beta: E \rightarrow M$ . En este caso,  $E \xrightarrow{\pi} M$  se llama un **fibrado trivial**. Al tomar  $U = M$ ,  $\pi^{-1}(U) = E$ , se ve que  $\beta$  mismo es una *trivialización global*.  $\diamond$

**Ejemplo 1.103.** Si  $G$  es un grupo de Lie y  $H$  es un subgrupo de Lie cerrado, la Definición 1.89 asegura que  $G/H$  es una variedad diferencial y la aplicación cociente  $\eta: G \rightarrow G/H$  es una sumersión sobreyectiva. La preimagen de cualquier elemento  $\eta(g) \in G/H$  es la subvariedad  $gH \equiv \lambda_g(H)$  de  $G$ , la cual es difeomorfo al subgrupo cerrado  $H$  mediante la traslación  $\lambda_g$ . Resulta que esta proyección  $\eta$  es localmente trivial, así que  $G \xrightarrow{\eta} G/H$  es un fibrado con fibra típica  $H$ .  $\diamond$

El espacio cociente  $G/H$  proporciona un ejemplo de un **fibrado principal**. Este es un fibrado  $(P, M, \sigma; H)$  en el cual la fibra típica  $H$  es un grupo de Lie que actúa a la derecha transitivamente sobre las fibras. De hecho, en el caso de  $(G, G/H, \eta; H)$  la fibra que contiene el punto  $g \in G$  es la coclase  $gH = \{gh : h \in H\}$ ; la traslación a derecha  $\rho_k: gh \mapsto ghk$  permuta los elementos de esta coclase si y solo si  $k \in H$ .

**Definición 1.104.** El **fibrado tangente**  $TM \xrightarrow{\tau} M$  de una variedad diferencial  $M$  con  $\dim M = n$  tiene fibra típica  $\mathbb{R}^n$  y se define así:

$$TM := \{ (p, v) : p \in M, v \in T_pM \}, \quad \tau(p, v) := p. \tag{1.53}$$

El espacio total  $TM$  es (por su mera definición) la *unión disjunta* de los espacios tangentes individuales  $T_pM$  (cada uno isomorfo a  $\mathbb{R}^n$  como espacio vectorial).

Dado un atlas  $\mathfrak{A} = \{ (U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A \}$  de  $M$ , sean  $(x^1, \dots, x^n)$  las coordenadas locales de una carta  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  y defínase la trivialización local  $\underline{\psi}_\alpha: \tau^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  por

$$\underline{\psi}_\alpha(p, v) := (p; v^1, \dots, v^n) \quad \text{donde} \quad v = v^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p. \tag{1.54}$$

Con el atlas  $\{ (\tau^{-1}(U_\alpha), (\phi_\alpha \times 1_n) \circ \underline{\psi}_\alpha) : \alpha \in A \}$ ,  $TM$  es una variedad diferencial con  $\dim TM = 2n$ ; y  $\tau: TM \rightarrow M$  es una sumersión sobreyectiva. Fíjese que la *fibra*  $\tau^{-1}(\{p\})$  es precisamente el *espacio tangente*  $T_pM$ .  $\diamond$

El fibrado tangente es un ejemplo de un *fibrado vectorial*, definido a continuación.

**Definición 1.105.** Un **fibrado vectorial** es un fibrado  $E \xrightarrow{\pi} M$  cuya fibra típica  $F$  y cada fibra individual  $E_p$  son espacios  $\mathbb{R}$ -vectoriales de la misma dimensión, tales que las aplicaciones  $F \rightarrow E_p : v \mapsto \psi_j^{-1}(p, v)$  sean *isomorfismos lineales*.

La dimensión  $k := \dim F$  de cada fibra se llama el **ranko** del fibrado vectorial.  $\diamond$

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que el cubrimiento  $\{U_j\}$  de la Definición 1.101 consiste de los dominios de cartas de un atlas  $\{(U_j, \phi_j)\}$  para la base  $M$ . Si  $\dim F = k$  y si  $\theta : F \rightarrow \mathbb{R}^k$  es un isomorfismo lineal fijo, se obtiene un atlas para el espacio total  $E$  cuyas cartas son las  $(\pi^{-1}(U_j), (\phi_j \times \theta) \circ \psi_j)$ .

Si  $(x^1, \dots, x^n)$  son las coordenadas locales para la carta  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$  de  $M$ , la carta correspondiente de  $TM$  tiene coordenadas locales  $(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n)$ , en vista de la relación (1.54).

► Ciertas operaciones del álgebra lineal sobre espacios vectoriales pueden elevarse “punto por punto” a un fibrado vectorial. Dadas dos espacios  $\mathbb{R}$ -vectoriales  $V$  y  $W$ , se puede formar el *espacio dual*  $V^*$  de formas  $\mathbb{R}$ -lineales  $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 1.106.** Si  $M$  es una variedad diferencial y si  $p \in M$ , denótese por  $T_p^*M$  el espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial dual de  $T_pM$ . Sus elementos se llaman **covectores en  $p$**  y  $T_p^*M$  es el **espacio cotangente** en el punto  $p$ .

En una carta local  $(U, \phi)$  de  $M$  tal que  $p \in U$ , cada vector tangente  $v \in T_pM$  es una combinación lineal de vectores tangentes básicos,  $v = a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ . Para cada  $k = 1, \dots, n$ , la *forma lineal*  $dx^k \Big|_p : v \mapsto a^k$  es un **covector** en  $p$ . Por su definición, estos covectores son linealmente independientes. Además, a la base  $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p \right\}$  de  $T_pM$  le corresponde la *base dual*  $\{dx^1 \Big|_p, \dots, dx^n \Big|_p\}$  de  $T_p^*M$ .

El **fibrado cotangente** de  $M$  es el fibrado vectorial  $T^*M \xrightarrow{\pi} M$  con fibra típica  $\mathbb{R}^n$  definido por:

$$T^*M := \{ (p, \xi) : p \in M, \xi \in T_p^*M \}, \quad \pi(p, \xi) := p. \quad (1.55)$$

Dado un atlas  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  de  $M$ , defínase una familia de trivializaciones locales  $\chi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n$  por

$$\chi_\alpha(p, \xi) := (p; \xi_1, \dots, \xi_n) \quad \text{donde} \quad \xi = \xi_k dx^k \Big|_p. \quad (1.56)$$

Con el atlas  $\{(\pi^{-1}(U_\alpha), (\phi_\alpha \times 1_n) \circ \chi_\alpha)\}$ ,  $T^*M$  es una variedad diferencial de dimensión  $2n$ ; y  $\pi : T^*M \rightarrow M$  es una sumersión sobreyectiva. La *fibra*  $\pi^{-1}(\{p\})$  es  $T_p^*M$ .

De (1.56), se ve que  $(x^1, \dots, x^n; \xi_1, \dots, \xi_n)$  son coordenadas locales para  $T^*M$ .  $\diamond$

**Definición 1.107.** Una **sección** (suave) de un fibrado  $E \xrightarrow{\pi} M$  es una aplicación suave  $s: M \rightarrow E$  tal que  $\pi \circ s = 1_M$ , es decir,  $s(p) \in E_p$  para todo  $p \in M$ .

Denótese por  $\Gamma(M, E)$  la totalidad de secciones suaves del fibrado  $E \xrightarrow{\pi} M$ . Si  $E$  es un fibrado vectorial, este conjunto es también un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial, al definir

$$\underline{s+t}(p) := s(p) + t(p) \in E_p, \quad \underline{\lambda s}(p) := \lambda s(p) \in E_p,$$

para  $s, t \in \Gamma(M, E)$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $p \in M$ . ◇

**Ejemplo 1.108.** Una sección suave de un fibrado *trivial*  $M \times F \xrightarrow{\text{pr}_1} M$  está dada por una fórmula  $s(p) := (p, f(p))$  donde  $f: M \rightarrow F$  es una función suave. En particular, las *funciones suaves* en  $C^\infty(M)$  están en correspondencia biunívoca con las *secciones suaves* del fibrado *trivial*  $M \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{pr}_1} M$ . ◇

En ciertos casos, las secciones suaves de  $E \xrightarrow{\pi} M$  con dominio  $M$  son escasas; pero si  $U \subset M$  es un abierto, también se define el conjunto  $\Gamma(U, E) := \{s: U \rightarrow E: \pi \circ s = 1_U\}$  de **secciones locales** con dominio  $U$ . En particular, para cada  $v \in F$ , la trivialización local  $\psi_j: \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F$  determina una sección local en  $\Gamma(U_j, E)$  por  $p \mapsto \psi_j^{-1}(p, v)$ .

**Ejemplo 1.109.** Una sección del fibrado tangente  $TM \xrightarrow{\tau} M$  es una función  $p \mapsto X_p$  que lleva cada punto  $p \in M$  a un vector tangente en  $T_pM$ , de tal manera que su expresión en coordenadas locales depende suavemente de  $p$ . En otras palabras, en una carta local  $(U, \phi)$ , esta función define combinaciones lineales  $X_p = a^j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$  y se requiere que las funciones coeficientes  $a^j: U \rightarrow \mathbb{R}$  sean suaves. Al recordar la relación (1.24), esto es,  $X|_U = \sum_{j=1}^n a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ , se concluye que una *sección suave del fibrado tangente*  $TM \xrightarrow{\tau} M$  no es otra cosa que un *campo vectorial*  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . ◇

Este último ejemplo muestra que los campos vectoriales pueden visualizarse de dos maneras distintas. Por un lado, cada campo vectorial  $X$  es un operador lineal sobre  $C^\infty(M)$  que cumple una regla de Leibniz, miembro del álgebra de Lie  $\mathfrak{X}(M)$ . Por otro lado, cada  $X$  es una sección suave  $p \mapsto X_p$  del fibrado tangente. Por esta razón, es oportuno identificar estos dos espacios vectoriales:

$$\mathfrak{X}(M) = \Gamma(M, TM).$$

Hay un diálogo entre la estructura algebraica de  $\mathfrak{X}(M)$  y la del espacio vectorial de secciones  $\Gamma(M, TM)$  que ilumina diversos aspectos computacionales de la teoría de las variedades diferenciales. Se aprovechará a fondo esa relación en el próximo capítulo.

### 1.10. Ejercicios sobre variedades diferenciales

En los ejercicios que siguen,  $M$  y  $N$  denotan dos variedades diferenciales.

**Ejercicio 1.1.** Sean  $\mathfrak{A} := \{ (U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A \}$  y  $\mathfrak{B} := \{ (V_\beta, \psi_\beta) : \beta \in B \}$  dos atlas para  $M$  y  $N$ , respectivamente. Si  $\dim M = m$  y  $\dim N = n$ , defínase la aplicación  $\underline{\phi_\alpha \times \psi_\beta} : U_\alpha \times V_\beta \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{m+n}$  por

$$\phi_\alpha \times \psi_\beta(x, y) := (\phi_\alpha(x), \psi_\beta(y)).$$

Verificar que  $\{ (U_\alpha \times V_\beta, \phi_\alpha \times \psi_\beta) : \alpha \in A, \beta \in B \}$  es un atlas sobre  $M \times N$ . (Con este atlas, se define la **variedad producto**  $M \times N$ .) Demostrar que las *proyecciones*  $\underline{\text{pr}}_1 : M \times N \rightarrow M : (x, y) \mapsto x$ ,  $\underline{\text{pr}}_2 : M \times N \rightarrow N : (x, y) \mapsto y$ , son suaves.

**Ejercicio 1.2.** Defínase un juego de  $2n$  cartas locales  $\{ (V_k^\pm, \psi_k^\pm) : k = 1, \dots, n \}$  sobre la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ , donde los  $V_k^\pm$  son los hemisferios abiertos:

$$V_k^+ := \{ x \in \mathbb{S}^{n-1} : x^k > 0 \}, \quad V_k^- := \{ x \in \mathbb{S}^{n-1} : x^k < 0 \},$$

y las  $\psi_k^\pm$  son proyecciones de los  $V_k^\pm$  a los respectivos planos ecuatoriales:

$$\psi_k^\pm(x) := (x^1, \dots, x^{k-1}, x^{k+1}, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Demostrar que estas cartas forman un atlas para  $\mathbb{S}^{n-1}$ . Determinar si este atlas es compatible o no con el atlas de dos cartas del Ejemplo 1.13.

**Ejercicio 1.3.** Comprobar que las funciones biyectivas  $f : \mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $f^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{B}^n$  del Ejemplo 1.27 son suaves y calcular sus derivadas. Ellas son:

$$f(x) := \frac{2x}{1 - \|x\|^2}, \quad f^{-1}(y) = \frac{y}{1 + \sqrt{1 + \|y\|^2}}.$$

**Ejercicio 1.4.** Si  $a < b$  en  $\mathbb{R}$ , la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$f(t) := e^{-1/(b-t)(t-a)} \llbracket a < t < b \rrbracket$$

es obviamente suave en los intervalos abiertos  $(-\infty, a)$ ,  $(a, b)$  y  $(b, +\infty)$ . Verificar que las derivadas  $f^{(r)}(a)$  y  $f^{(r)}(b)$ , para  $r \in \mathbb{N}$ , también existen y son todas iguales a 0.

**Ejercicio 1.5.** Una función suave y sobreyectiva  $f : M \rightarrow N$  es una **aplicación recubridora** si para cada  $q \in N$ , hay un vecindario abierto  $V$  de  $q$  cuyo preimagen  $f^{-1}(V)$  es una unión disjunta  $\bigsqcup_k U_k$  de abiertos de  $M$ , donde cada  $f|_{U_k} : U_k \rightarrow V$  es un difeomorfismo. Demostrar que estas dos funciones son aplicaciones recubridoras:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T} : t \mapsto e^{2\pi it}, \quad g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} : z \mapsto z^2.$$

**Ejercicio 1.6.** Sean  $(U, \phi)$  y  $(V, \psi)$  dos cartas locales de  $M$  tales que  $\phi(p) = \psi(p) = 0$  para un determinado punto  $p \in U \cap V$ . Sean  $(x^1, \dots, x^n)$ ,  $(y^1, \dots, y^n)$  sus sistemas respectivas de coordenadas locales. Un vector tangente  $v \in T_p M$  se expresa mediante dos combinaciones lineales,  $v = a^j \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p = b^k \frac{\partial}{\partial y^k} \Big|_p$  con coeficientes  $a^j, b^k \in \mathbb{R}$ . Comprobar que estos coeficientes están ligados por la fórmula:<sup>33</sup>

$$b^k = \frac{\partial y^k}{\partial x^j}(0) a^j \quad \text{para cada } k = 1, \dots, n.$$

**Ejercicio 1.7.** Sea  $f: M \rightarrow N$  una función suave. Si  $p \in M$  y  $v \in T_p M$ , sea  $\gamma: I \rightarrow M$  una curva suave tal que  $\gamma(0) = p$ ,  $\dot{\gamma}(0) = v$ . Si  $\zeta := f \circ \gamma: I \rightarrow N$  es la curva imagen en  $N$ , demostrar que  $T_p f(v) = \dot{\zeta}(0)$ .

**Ejercicio 1.8.** (a) Comprobar que una función suave  $f: M \rightarrow N$  es una inmersión si y solo si  $\dim M \leq \dim N$  y el rango de  $T_p f$  es igual a  $\dim M$ , para todo  $p \in M$ .

(b) Demostrar que la aplicación  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por  $h(t) := (t^2, t^3)$  es suave e inyectiva pero que no es una inmersión de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}^2$ .

**Ejercicio 1.9.** Sea  $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$  el **toro** de dimensión 2 (encajada en el espacio vectorial  $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ ). Considérese la curva suave  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2$  dado por la fórmula

$$\gamma(t) := (e^{2\pi i t}, e^{2\pi i \alpha t}),$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es irracional.

(a) Comprobar que  $\gamma$  es una inmersión inyectiva.

(b) Demostrar que la sucesión  $\{\gamma(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  tiene un punto de acumulación en  $\mathbb{T}^2$  y concluir que  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \gamma(\mathbb{R})$  no es un homeomorfismo, de modo que  $\gamma$  no es un encaje.<sup>34</sup>

[[ Indicación:  $\mathbb{T}^2$  es cerrado y acotado en  $\mathbb{R}^4$ . ]]

**Ejercicio 1.10.** Si  $a$  es un valor regular de  $f: M \rightarrow N$  y  $S = f^{-1}(a)$ , verificar que  $T_p S \simeq \ker T_p f$  para todo  $p \in S$ .

<sup>33</sup>El convenio de Einstein (sumas sobre índices repetidas) está en vigor.

<sup>34</sup>De hecho, es posible mostrar que la trayectoria  $\gamma(\mathbb{R})$  es *denso* en el toro  $\mathbb{T}^2$ .

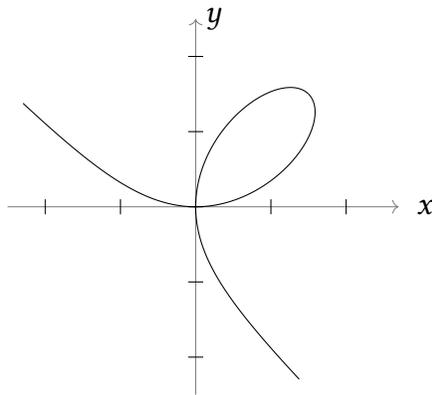


Figura 1.5: La hoja de Descartes

**Ejercicio 1.11.** La **hoja de Descartes** es la curva  $x^3 + y^3 = 3xy$  en el plano  $\mathbb{R}^2$ .

(a) Verificar que la parametrización  $t \mapsto (x(t), y(t))$ , dada por

$$x(t) := \frac{3t}{1+t^3}, \quad y(t) := \frac{3t^2}{1+t^3},$$

define una inmersión  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}^2$  cuya imagen es la hoja de Descartes (Figura 1.11).

(b) Explicar por qué la inmersión  $f$  es inyectiva pero *no* es un encaje.

**Ejercicio 1.12.** Si  $f: M \rightarrow N$  es suave, se dice que  $p \in M$  es un **punto regular** de  $f$  si  $\text{rango } T_p f = m = \dim N$ ; pero si  $\text{rango } T_p f < m$ ,  $p$  es un **punto crítico** de  $f$ . Nótese que  $a \in N$  es un *valor regular* de  $f$  si y solo si cada  $q$  con  $f(q) = a$  es un punto regular de  $f$ ; en cambio,  $f(p)$  es **valor crítico** si  $p$  es un punto crítico de  $f$ .

(a) Si  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es un abierto y  $f: U \rightarrow \mathbb{R}$  es suave, comprobar que  $p \in U$  es un punto crítico de  $f$  si y solo si  $\partial_j f(p) = 0$  para  $j = 1, \dots, n$ .

(b) Si  $c \neq 0$ , concluir que el hiperboloide  $x^2 + y^2 - z^2 = c$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^3$ .  
 Qué puede decirse del cono  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ ?

**Ejercicio 1.13.** Sea  $\det: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  la función que lleva cada matriz real  $n \times n$  a su determinante. Demostrar que 0 es el único valor crítico de esta función.

[[ Indicación: para la unicidad, usar la expansión del determinante en una fila. ]]

Deducir la afirmación del Ejemplo 1.49, de que  $SL(n, \mathbb{R})$  es una subvariedad de  $M_n(\mathbb{R})$ , cuya dimensión es  $n^2 - 1$ .

**Ejercicio 1.14.** Considérese la **helicoides**  $M := \{(s \cos t, s \sin t, t) \in \mathbb{R}^3 : s, t \in \mathbb{R}\}$ . Demostrar que  $M$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^3$ . Si se definen  $f, g: M \rightarrow \mathbb{R}^2$  por

$$f(x, y, z) := (x, y), \quad g(x, y, z) := (y, z),$$

determinar si  $f$  y  $g$  son sumersiones o no.

**Ejercicio 1.15.** (a) Demostrar que esta superficie cúbica es una subvariedad de  $\mathbb{R}^3$ :

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 1\}.$$

(b) Comprobar que la intersección de  $S$  con el plano  $x + y + z = t$  es un *círculo* si  $t > 0$ , pero es vacío si  $t \leq 0$ . Concluir que  $S$  es una superficie de revolución.

**Ejercicio 1.16.** Si  $R$  es una subvariedad de una variedad diferencial  $M$  y si  $S$  es una subvariedad de  $R$ , comprobar que  $S$  es una subvariedad de  $M$ .

**Ejercicio 1.17.** (a) Si  $X = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ ,  $Y = b^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  son las expresiones en coordenadas locales de dos campos vectoriales  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , y si  $[X, Y] = c^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  con respecto a la misma carta local, comprobar que las funciones  $c^j$  están dadas por:

$$c^j = a^k \frac{\partial b^j}{\partial x^k} - b^k \frac{\partial a^j}{\partial x^k}.$$

(b) Demostrar que los dos campos vectoriales

$$X = x^2 \frac{\partial}{\partial x^3} - x^3 \frac{\partial}{\partial x^2}, \quad Y = x^3 \frac{\partial}{\partial x^1} - x^1 \frac{\partial}{\partial x^3}$$

generan una subálgebra de Lie *tridimensional* de  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$ .

**Ejercicio 1.18.** Si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y  $f \in C^\infty(M)$ , verificar la fórmula:

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X.$$

**Ejercicio 1.19.** Si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  tienen flujos respectivos  $\alpha, \beta$  definidos en todo  $\mathbb{R} \times M$ , demostrar que  $[X, Y] = 0$  si y solo si  $\alpha(t, \beta(t, p)) = \beta(t, \alpha(t, p))$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ ,  $p \in M$ .

**Ejercicio 1.20.** Considérese los dos campos vectoriales sobre  $\mathbb{R}^2$  definidos por<sup>35</sup>

$$X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}, \quad Y := x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}.$$

<sup>35</sup>En el Ejemplo 1.66, se demostró que las curvas integrales de  $X$  son los círculos  $t \mapsto (r \cos t, r \sin t)$ , con radios  $r > 0$ ; y el origen  $(0, 0)$ , que es un punto fijo (una curva constante).

- (a) Determinar las curvas integrales del campo vectorial  $Y$ .
- (b) Verificar que  $[X, Y] = 0$  e interpretar esta conmutación en términos de los flujos, a la luz del Ejercicio 1.19.

**Ejercicio 1.21.** Si  $z_0 = e^{i\alpha} \in \mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ , se puede definir un carta local  $(V_\alpha, \psi_\alpha)$  de  $\mathbb{S}^1$  al tomar  $V_\alpha := \mathbb{S}^1 \setminus \{-z_0\}$  y al definir  $\psi_\alpha: V_\alpha \rightarrow (\alpha - \pi, \alpha + \pi)$  por  $\psi_\alpha(e^{i\theta}) := \theta$ . Aquí  $\theta$  es la coordenada local para esta carta y determina un campo vectorial local  $d/d\theta$ , restringido a  $V_\alpha$ . Si  $z_1 = e^{i\beta}$  es otro punto de  $\mathbb{S}^1$ , las fórmulas análogas definen un campo vectorial local  $d/d\theta$  en  $V_\beta$ . Mostrar que estos dos campos vectoriales locales coinciden (es decir, tienen la misma restricción) sobre  $V_\alpha \cap V_\beta$ .

Así, se ha definido un campo vectorial  $X = d/d\theta$  sobre todo  $\mathbb{S}^1$ . Comprobar que  $X$  es invariante bajo las rotaciones rígidas del círculo  $\lambda_w: z \mapsto wz$ , para  $w \in \mathbb{S}^1$ .

**Ejercicio 1.22.** Verificar la afirmación de la fórmula (1.40): si  $\tilde{X}$  es el campo vectorial invariante sobre  $G$  que corresponde al vector tangente  $X \in T_1G$ , su curva integral con  $\gamma_X(0) = 1$  está dada por la expresión  $\gamma_X(t) = \exp tX$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

[[Indicación: defínase una curva  $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow G$  por  $\alpha(s) := \gamma_X(ts)$ ; comprobar que  $\dot{\alpha}(s) = t X_{\alpha(s)}$  para  $s \in \mathbb{R}$  y que  $\alpha(0) = 1$ ; luego mostrar que  $\alpha(1) = \exp tX$ .]]

En los cuatro ejercicios que siguen,  $\exp$  denota la *exponencial matricial* de una matriz cuadrada  $X \in M_n(\mathbb{F})$  definida por  $\exp X := \sum_{k=0}^{\infty} (1/k!) X^k$ , con  $X^0 := 1_n$ .

**Ejercicio 1.23.** (a) Verificar que la curva  $\gamma_X: \mathbb{R} \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{F})$  dada por  $\gamma_X(t) := \exp(tX)$  es suave y que su derivada en  $t = 0$  es  $X \in M_n(\mathbb{F})$ .<sup>36</sup>

(b) Comprobar que  $\exp(X + Y) = \exp X \exp Y$  si  $[X, Y] = 0$ . Concluir que la función  $t \mapsto \exp tX$  es un *homomorfismo* de  $\mathbb{R}$  en  $\text{GL}(n, \mathbb{F})$ .

**Ejercicio 1.24.** Calcular  $\exp tX \in \text{GL}(2, \mathbb{R})$  para los tres casos siguientes:

$$(i) \quad X = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}; \quad (ii) \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (iii) \quad X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Ejercicio 1.25.** (a) Mostrar que  $\mathfrak{su}(2)$ , el álgebra de Lie del grupo de Lie  $\text{SU}(2)$ , tiene la siguiente base  $\mathbb{R}$ -vectorial:

$$X_1 := \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 := \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 := \frac{i}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

<sup>36</sup>Así se demuestra que la aplicación exponencial de la Definición 1.79 coincide con la exponencial matricial si  $\mathfrak{g} \leq M_n(\mathbb{F})$ .

(b) Verificar las *relaciones de conmutación*:

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad [X_2, X_3] = X_1, \quad [X_3, X_1] = X_2.$$

(c) Calcular los subgrupos uniparamétricos  $\{ \exp tX_j : t \in \mathbb{R} \}$  para  $j = 1, 2, 3$ .

(d) Demostrar que cualquier elemento  $U \in \text{SU}(2)$  puede escribirse en la forma<sup>37</sup>

$$U = (\exp \phi X_3)(\exp \theta X_2)(\exp \psi X_3)$$

$$\text{con } 0 \leq \theta \leq \pi, \quad -\pi < \phi \leq \pi, \quad -2\pi < \psi \leq 2\pi.$$

**Ejercicio 1.26.** Mostrar que  $\mathfrak{so}(3)$ , el álgebra de Lie del grupo de Lie  $\text{SO}(3)$ , tiene la siguiente base  $\mathbb{R}$ -vectorial:

$$Y_1 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3 := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Con la notación del Ejercicio 1.25, defínase un homomorfismo  $\rho: \text{SU}(2) \rightarrow \text{SO}(3)$  por

$$\rho(\exp tX_j) := \exp tY_j \quad \text{para } j = 1, 2, 3; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Calcular  $\rho(\exp \phi X_3 \exp \theta X_2 \exp \psi X_3)$  y comprobar que el núcleo de  $\rho$  es el subgrupo de dos elementos  $\{1_2, -1_2\} \leq \text{SU}(2)$ .

**Ejercicio 1.27.** Sea  $\text{UT}(n, \mathbb{R})$  el conjunto de **matrices unitriangulares** en  $M_n(\mathbb{F})$ , con entradas diagonales  $a_{jj} = 1$  y además  $a_{ij} = 0$  si  $i > j$ . Demostrar que este es un grupo de Lie, y hallar su álgebra de Lie.

**Ejercicio 1.28.** Sea  $\mathbb{H}$  un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial con la base  $\{1, i, j, k\}$  (se identifica  $r \in \mathbb{R}$  con  $r \cdot 1 \in \mathbb{H}$ ), dotado con el *producto*  $\mathbb{R}$ -bilineal definido sobre elementos de la base por:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad ij = k = -ji, \quad jk = i = -kj, \quad ki = j = -ik.$$

Este  $\mathbb{H}$  es una  $\mathbb{R}$ -álgebra con elemento identidad 1; sus elementos son las **cuaterniones**.

(a) Si  $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k \in \mathbb{H}$ , se escribe  $\bar{q} := q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$ ; y se define  $N(q) := q \bar{q} \in \mathbb{R}$ . Comprobar que  $N(pq) = N(p)N(q)$  para  $p, q \in \mathbb{H}$ .

<sup>37</sup>Estos *ángulos de Euler*  $\theta, \phi, \psi$  parametrizan el grupo de Lie  $\text{SU}(2)$ .

- (b) Las **cuaterniones unitarios**  $\underline{UH} := \{q \in \mathbb{H} : N(q) = 1\}$  forman un grupo de Lie. Encontrar un isomorfismo de grupos entre UH y SU(2).

**Ejercicio 1.29.** El **grupo de Heisenberg**  $\underline{H_n}$  se define como sigue. El conjunto  $H_n$  es el espacio vectorial  $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R} \simeq \mathbb{R}^{2n+1}$ , cuyo elemento típico es  $(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$  con  $\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . Se define el *producto* en  $H_n$  por la fórmula:

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t_1) * (\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, t_2) := (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, t_1 + t_2 + \frac{1}{2}(\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{p}_1))$$

donde  $\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{p}_2$  denota el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^n$ . Comprobar que  $H_n$  es un grupo de Lie no abeliano. Determinar el *centro* del grupo  $H_n$ .

Sea  $\widetilde{H}_n$  el mismo conjunto con un producto diferente:

$$(\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1, t_1) \diamond (\mathbf{q}_2, \mathbf{p}_2, t_2) := (\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, t_1 + t_2 + \mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{p}_2).$$

Hallar un isomorfismo de grupos  $\theta: H_n \rightarrow \widetilde{H}_n$  que es a la vez un difeomorfismo.

**Ejercicio 1.30.** Sea  $G$  un grupo de Lie. Verificar que  $\underline{g \cdot h} := ghg^{-1}$  define una acción a izquierda de  $G$  sobre sí mismo. Cuáles son las órbitas de esta acción? Cuál es el subgrupo de isotropía de un elemento  $h \in G$  bajo esta acción?

**Ejercicio 1.31.** Sea  $G$  un grupo de Lie que actúa sobre una variedad diferencial  $M$ . Si dos órbitas coinciden:  $G \cdot u = G \cdot v$ , demostrar que los subgrupos de isotropía  $G_u, G_v$  son *conjugados*; esto es, que existe  $h \in G$  tal que  $G_v = \{hgh^{-1} : g \in G_u\}$ .

**Ejercicio 1.32.** Demostrar que la siguiente fórmula define una acción a izquierda de  $SL(2, \mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{C}$ :

$$\text{para } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R}); z \in \mathbb{C}, \quad \text{sea } A \cdot z := \frac{az + b}{cz + d}.$$

Cuál es la órbita del punto  $i = \sqrt{-1}$ ? y cuál es el subgrupo de isotropía de  $i$ ?

**Ejercicio 1.33.** El grupo de Lie  $\underline{SU(1, 1)}$  consta de matrices en  $M_2(\mathbb{C})$  de la forma

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}, \quad \text{con } |\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1.$$

Verificar que tales matrices forman un grupo, el cual actúa transitivamente sobre el disco unitario  $\underline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$  por

$$A \cdot z := \frac{\alpha z + \beta}{\bar{\beta} z + \bar{\alpha}} \quad \text{para } z \in \mathbb{D}.$$

Dibujar las órbitas de cada uno de los subgrupos uniparamétricos con elementos:

$$k(\theta) := \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}, \quad a(t) := \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix}, \quad n(s) := \begin{pmatrix} 1 + is & -is \\ is & 1 - is \end{pmatrix}.$$

Estos tres subgrupos generan  $SU(1, 1)$ . Mostrar que el grupo de isotropía de  $0 \in \mathbb{D}$  es  $\mathbb{T} := \{k(\theta) : -\pi < \theta \leq \pi\}$ ; concluir que  $SU(1, 1)/\mathbb{T}$  es difeomorfo a  $\mathbb{D}$ .

**Ejercicio 1.34.** El algoritmo de Gram y Schmidt toma una base cualquiera  $\{a_1, \dots, a_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  y produce una base ortonormal  $\{q_1, \dots, q_n\}$ , de tal manera que la base parcial  $\{q_1, \dots, q_k\}$  depende solamente de  $\{a_1, \dots, a_k\}$ . Si  $A$  y  $Q$  son las matrices cuyas columnas son estas dos bases, comprobar que  $A = QR$ , donde  $r_{ij} = 0$  si  $i > j$ ; y cada  $r_{jj} > 0$ . (Así,  $R \in T_+(n, \mathbb{R})$  es una matriz triangular superior con entradas diagonales positivas.) Usar las fórmulas explícitas del algoritmo para demostrar que la correspondencia  $QR \mapsto (Q, R)$  es biyectiva y define un difeomorfismo:  $GL(n, \mathbb{R}) \approx O(n) \times T_+(n, \mathbb{R})$ .

**Ejercicio 1.35.** Sea  $G$  un grupo de Lie con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ . Para  $g \in G$ ,  $Y \in \mathfrak{g}$ , defínase

$$\underline{\text{Ad}}(g) Y := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g(\exp tY)g^{-1}.$$

- (a) Demostrar que  $(g, Y) \mapsto \underline{\text{Ad}}(g) Y$  es una acción suave de  $G$  sobre  $\mathfrak{g}$ .
- (b) Si  $G$  es un grupo de Lie lineal, es decir,  $G \leq GL(m, \mathbb{R})$  o  $G \leq GL(m, \mathbb{C})$  para algún  $m \in \mathbb{N}$ , demostrar que esta acción adjunta está dada por la conjugación de matrices:  $\underline{\text{Ad}}(g) Y = gYg^{-1}$ .

**Ejercicio 1.36.** Un morfismo de fibrados vectoriales entre  $E \xrightarrow{\pi} M$  y  $F \xrightarrow{\sigma} N$  es un par  $(\Phi, \phi)$ , donde  $\Phi: E \rightarrow F$ ,  $\phi: M \rightarrow N$  son aplicaciones suaves tales que  $\sigma \circ \Phi = \phi \circ \pi$ :

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\Phi} & F \\ \pi \downarrow & & \downarrow \sigma \\ M & \xrightarrow{\phi} & N \end{array}$$

y todas las aplicaciones entre fibras  $\Phi_x: v \mapsto \Phi(v) : E_x \rightarrow F_{\phi(x)}$  deben ser lineales.

Si  $f: M \rightarrow N$  es suave, mostrar que la aplicación tangente  $Tf: TM \rightarrow TN$  dada por  $\underline{Tf}(p, v) := (f(p), T_p f(v))$  es suave y que el par  $(Tf, f)$  es un morfismo de fibrados.

**Ejercicio 1.37.** Si  $x \cdot y := x^1 y^1 + x^2 y^2 + x^3 y^3$  denota el producto escalar usual en  $\mathbb{R}^3$ , considérese el conjunto

$$E := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|x\| = 1, x \cdot y = 0 \} \subset \mathbb{R}^6$$

con su topología relativa; la proyección  $\pi: E \rightarrow \mathbb{S}^2 : (x, y) \mapsto x$  es continua. La esfera  $\mathbb{S}^2$  tiene un cubrimiento abierto  $\{U_1, U_2, U_3\}$ , donde  $U_k := \{x \in \mathbb{S}^2 : |x^k| < 1\}$  para  $k = 1, 2, 3$ . Defínase tres funciones  $\underline{\psi}_k: \pi^{-1}(U_k) \rightarrow U_k \times \mathbb{R}^2$  por

$$\begin{aligned}\psi_1(x, y) &:= (x; x^2y^3 - x^3y^2, y^1), \\ \psi_2(x, y) &:= (x; x^3y^1 - x^1y^3, y^2), \\ \psi_3(x, y) &:= (x; x^1y^2 - x^2y^1, y^3).\end{aligned}$$

Demostrar que  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  son trivializaciones locales para un *fibrado vectorial*  $E \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^2$ .

**Ejercicio 1.38.** Un **isomorfismo de fibrados vectoriales** es un morfismo de fibrados  $(\Phi, \phi)$  invertible, es decir, las dos aplicaciones  $\Phi$  y  $\phi$  son difeomorfismos.

Demostrar que el fibrado vectorial  $E \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^2$  del Ejercicio 1.37 es isomorfo al fibrado tangente  $T\mathbb{S}^2 \xrightarrow{\tau} \mathbb{S}^2$ .

**Ejercicio 1.39.** Comprobar que el fibrado tangente  $T\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\tau} \mathbb{S}^1$  es trivial,<sup>38</sup> al encontrar un isomorfismo explícito entre  $T\mathbb{S}^1 \xrightarrow{\tau} \mathbb{S}^1$  y  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \xrightarrow{\text{pr}_1} \mathbb{S}^1$ .

**Ejercicio 1.40.** Sea  $E \xrightarrow{\pi} M$  un fibrado vectorial con fibra típica  $F$  y dos trivializaciones locales  $\psi_j: \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times F, \psi_k: \pi^{-1}(U_k) \rightarrow U_k \times F$  tales que  $U_j \cap U_k \neq \emptyset$ . Mostrar que

$$\psi_j \circ \psi_k^{-1}: (U_j \cap U_k) \times F \rightarrow (U_j \cap U_k) \times F$$

es un isomorfismo de fibrados triviales sobre  $U_j \cap U_k$ .

Entonces, al denotar por  $\underline{\text{GL}}(F)$  el grupo de automorfismos lineales<sup>39</sup> del espacio vectorial  $F$ , hay una única función suave  $\underline{g}_{jk}: U_j \cap U_k \rightarrow \underline{\text{GL}}(F)$  determinado por la fórmula  $\psi_j \circ \psi_k^{-1}(x, v) = (x, \underline{g}_{jk}(x)v)$ . Demostrar que estas **funciones de transición**  $\underline{g}_{jk}$  cumplen la relación siguiente:

$$\underline{g}_{jk}(x) \underline{g}_{kl}(x) = \underline{g}_{jl}(x) \quad \text{para } x \in U_j \cap U_k \cap U_l \tag{1.57}$$

toda vez que  $U_j \cap U_k \cap U_l \neq \emptyset$ .

[[ Inversamente, dada una familia de funciones  $\{g_{jk}\}$  que cumplen (1.57), es posible reconstruir un fibrado vectorial  $E \xrightarrow{\pi} M$  cuyas funciones de transición son estas  $g_{jk}$ . ]]

<sup>38</sup>Una variedad diferencial  $M$  se llama **paralelizable** si su fibrado tangente es trivial. El círculo  $\mathbb{S}^1$  y la esfera  $\mathbb{S}^3$  son paralelizables porque son grupos de Lie:  $\mathbb{S}^1 \approx \text{U}(1)$  y  $\mathbb{S}^3 \approx \text{SU}(2)$ . En cambio, la esfera  $\mathbb{S}^2$  no es paralelizable – y por lo tanto no es la variedad diferencial subyacente a grupo de Lie alguno.

<sup>39</sup>Si  $\dim_{\mathbb{R}} F = m$ , la elección de una base vectorial de  $F$  determina un isomorfismo de grupos de Lie  $\underline{\text{GL}}(F) \approx \text{GL}(m, \mathbb{R})$ .

## 2 Formas diferenciales

*It is nice to know that the computer understands the problem. But I would like to understand it, too.*

— Eugene Paul Wigner

En su libro sobre las formas diferenciales, Harley Flanders las define así:

*Estas son las cosas que ocurren bajo signos de integración.*

Sus ejemplos son “cosas” como

$$\omega = A dx + B dy + C dz, \quad \alpha = P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \quad \lambda = H dx dy dz,$$

que aparecen en integrales de línea, de superficie y triples en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\int A dx + B dy + C dz, \quad \iint P dy dz + Q dz dx + R dx dy, \quad \iiint H dx dy dz.$$

Los términos  $A, B, \dots, H$  son funciones de  $(x, y, z)$ .

Este capítulo se dedicará al concepto de forma diferencial; en el capítulo siguiente se examinará su colocación bajo signos de integración. El manejo algebraico de las formas diferenciales recibe el nombre de **cálculo de Cartan**.

### 2.1. Formas diferenciales de primer grado

Sea  $M$  una variedad diferencial. Las funciones suaves  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  son los elementos de la  $\mathbb{R}$ -álgebra conmutativa  $C^\infty(M)$ .<sup>1</sup> Fíjese que  $C^\infty(M)$  no es un cuerpo porque *contiene divisores de cero*: si  $p, q \in M$  con  $p \neq q$ , hay vecindarios abiertos  $U$  de  $p$  y  $V$  de  $q$  tales que  $U \cap V = \emptyset$ ; existen dos funciones  $f, g \in C^\infty(M)$  con  $f(p) = 1$  y  $\text{sop } f \subset U$  mientras  $g(q) = 1$  y  $\text{sop } g \subset V$ ; en consecuencia,  $fg = 0$  en  $C^\infty(M)$ .

Cabe recordar, por la Definición 1.55, que los campos vectoriales sobre  $M$  forman un *módulo* (a izquierda)  $\mathfrak{X}(M)$  del álgebra  $C^\infty(M)$ .

**Definición 2.1.** Una **1-forma diferencial** sobre una variedad diferencial  $M$  es una *aplicación*  $C^\infty(M)$ -lineal  $\underline{\alpha}: \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$ . Esto significa que:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha(X + Y) = \alpha(X) + \alpha(Y), \\ \alpha(fX) = f \alpha(X), \end{array} \right\} \text{ para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M); f \in C^\infty(M). \quad (2.1a)$$

---

<sup>1</sup>Sería más correcta escribir  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  en vez de  $C^\infty(M)$  para enfatizar que aquí solo se consideran funciones con valores *reales*. Por ahora no es necesario considerar  $C^\infty(M, \mathbb{C})$ , la totalidad de funciones suaves  $g: M \rightarrow \mathbb{C}$ , la cual es una  $\mathbb{C}$ -álgebra conmutativa.

Denótese por  $\mathcal{A}^1(M)$  la totalidad de 1-formas diferenciales sobre  $M$ . Con las operaciones “puntuales”:

$$\underline{\alpha + \beta}(X) := \alpha(X) + \beta(X); \quad \underline{f\alpha}(X) := f\alpha(X); \quad (2.1b)$$

el conjunto  $\mathcal{A}^1(M)$  es otro *módulo a izquierda* sobre  $C^\infty(M)$ .  $\diamond$

**Proposición 2.2.** Si  $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$  y  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , el valor de la función  $\alpha(X)$  en  $p \in M$  depende solamente del vector tangente  $X_p \in T_p(M)$ . La correspondencia  $\underline{\alpha}_p: X_p \mapsto \alpha(X)(p)$  define una sección suave  $p \mapsto \alpha_p$  del fibrado cotangente  $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ .

*Demostración.* Tómesese  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $X_p = 0$ ; se debe mostrar que  $\alpha(X)(p) = 0$ . Sea  $(U, \phi)$  una carta local de  $M$  con  $p \in U$  y  $\phi(p) = 0$ . Hay un abierto  $V \subset M$  con  $\bar{V}$  compacto tal que  $p \in V \subset \bar{V} \subset U$ . Por el Lema 1.29, hay una función  $g \in C^\infty(M)$  de soporte compacto con  $g(q) = 1$  para  $q \in \bar{V}$ ;  $0 \leq g(q) < 1$  para  $q \in U \setminus \bar{V}$ ; y  $\text{sop } g \subset U$ . Esto implica que

$$\alpha(gX)(q) = g\alpha(X)(q) = g(q)\alpha(X)(q) = \alpha(X)(q) \quad \text{para } q \in V,$$

y además  $\alpha(gX)(q') = 0$  si  $q' \notin U$ .

El campo vectorial  $gX \in \mathfrak{X}(M)$  está determinado por su restricción a  $U$ . En efecto, por el Lema 1.54, hay funciones suaves  $a^1, \dots, a^n$  en  $C^\infty(U)$  tales que  $X|_U = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  y por ende  $X|_V = (ga^j)|_V \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Defínase  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  por  $Y|_U := ga^j \frac{\partial}{\partial x^j}$ ,  $Y|_{M \setminus U} := 0$ . Está claro que  $X|_V = Y|_V$  y además  $\alpha(X)(p) = \alpha(gX)(p) = \alpha(Y)(p)$ .

Nótese que  $\alpha(Y) = a^j \alpha(g \frac{\partial}{\partial x^j})$  por  $C^\infty(M)$ -linealidad.<sup>2</sup> La hipótesis  $X_p = 0$  implica que  $a^j(p) = 0$  para  $j = 1, \dots, n$ . Por lo tanto, vale  $\alpha(X)(p) = \alpha(Y)(p) = 0$ .

Ahora, si  $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$  son dos campos vectoriales tales que  $X_p = Z_p$ , entonces vale  $(X - Z)_p = X_p - Z_p = 0$ , así que  $\alpha(X - Z)(p) = 0$  y por ende  $\alpha(X)(p) = \alpha(Z)(p)$ . Luego la correspondencia  $X_p \mapsto \alpha(X)(p)$  está bien definido y es obviamente una forma  $\mathbb{R}$ -lineal sobre  $T_pM$ ; en otras palabras, esta correspondencia  $\alpha_p$  es un *covector* en  $T_p^*M$ .

Si  $q \in V$ , hay escalares  $f_1(q), \dots, f_n(q) \in \mathbb{R}$  tales que  $\alpha_q = f_k(q) dx^k|_q$ , al usar la base vectorial de  $T_q^*M$  introducida en la Definición 1.106. Por lo tanto,

$$\alpha(X)(q) = \alpha_q(X_q) = f_k(q) dx^k|_q(X_q) = f_k(q) a^k(q) \quad \text{para } q \in V. \quad (2.2)$$

Al reemplazar  $X$  en (2.2) por el campo vectorial  $g \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(M)$ , se obtiene

$$\alpha\left(g \frac{\partial}{\partial x^j}\right)(q) = f_j(q)g(q) = f_j(q) \quad \text{para } q \in V.$$

<sup>2</sup>Es importante observar que la expresión  $ga^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  define un campo vectorial sobre todo  $M$ , que se anula (como sección del fibrado tangente) fuera de  $U$ , por las propiedades de la función suave  $g$ . Entonces  $Y = ga^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  es una igualdad válida en el espacio vectorial  $\mathfrak{X}(M)$ .

El lado izquierdo de esta ecuación es (por la definición de  $\alpha$ ) una función suave sobre  $V$ , así que  $f_j|_V$  es suave. Esto dice que la expresión local  $f_k dx^k$  de la aplicación  $q \mapsto \alpha_q$  tiene funciones coeficientes suaves en un vecindario abierto de  $p$ . Como  $p \in M$  es arbitrario, se obtiene de esta manera una sección suave  $p \mapsto \alpha_p$  del fibrado  $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ .  $\square$

**Lema 2.3.** Hay una biyección  $\mathbb{R}$ -lineal entre las 1-formas diferenciales sobre una variedad diferencial  $M$  y las secciones suaves del fibrado cotangente de  $M$ , es decir:

$$\mathcal{A}^1(M) \simeq \Gamma(M, T^*M). \tag{2.3}$$

*Demostración.* La Proposición 2.2 asocia a cada  $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$  una única sección  $p \mapsto \alpha_p$  del fibrado  $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ . De este modo, se ha definido una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal e inyectiva  $\theta: \mathcal{A}^1(M) \rightarrow \Gamma(M, T^*M)$ .

Por otro lado, sea  $p \mapsto \beta_p \in T_p^*M$  es una sección suave del fibrado cotangente. Si  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , la aplicación  $X_p \mapsto \beta_p(X_p) : T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  es lineal para cada  $p$ . Al usar expresiones locales  $X_q = a^j(q) \frac{\partial}{\partial x^j}|_q$  y  $\beta_q = g_k(q) dx^k|_q$  en un vecindario abierto  $V$  de  $p$ , se ve que  $\beta_q(X_q) = g_k(q) a^k(q)$  para  $q \in V$ . Como la suma finita  $g_k a^k$  es una función suave sobre  $V$ , se concluye que la correspondencia  $p \mapsto \beta_p(X_p) \in \mathbb{R}$  es una función suave sobre todo  $M$ .<sup>3</sup>

Llámesese  $\beta(X)$  a este elemento de  $C^\infty(M)$ . Entonces  $X \mapsto \beta(X) : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  es una 1-forma diferencial sobre  $M$ ; y por su definición, vale  $\beta(X)(p) = \beta_p(X_p)$  para todo  $p \in M$ . Se ha comprobado que la aplicación  $\theta$  es sobreyectiva.  $\square$

De hecho, las secciones suaves  $\Gamma(M, E)$  de un fibrado vectorial cualquiera  $E \xrightarrow{\pi} M$  constituyen un  $C^\infty(M)$ -módulo (a izquierda). La identificación (2.3) de 1-formas con secciones cotangentes resulta ser un isomorfismo de  $C^\infty(M)$ -módulos.

► A la luz de las demostraciones anteriores, en cada carta local  $(U, \phi)$  de  $M$  se define un juego de **1-formas locales**  $dx^1, \dots, dx^n \in \mathcal{A}^1(U)$  por:

$$\left\langle dx^k, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle \equiv dx^k \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) := \llbracket j = k \rrbracket. \tag{2.4}$$

Estas 1-formas sobre  $U$  definen secciones locales  $q \mapsto dx^k|_q$  del fibrado cotangente. En vista de la fórmula (2.2), la restricción a  $U$  de una 1-forma  $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$  es una combinación lineal de estas 1-formas locales en  $\mathcal{A}^1(U) \simeq \Gamma(U, T^*M)$ :

$$\alpha|_U = f_k dx^k, \quad \text{con coeficientes } f_1, \dots, f_n \in C^\infty(U). \tag{2.5}$$

<sup>3</sup>La suavidad de una función es una propiedad local; es decir,  $h: M \rightarrow \mathbb{R}$  es suave si y solo si  $h|_V$  es suave en un vecindario  $V$  de cualquier punto de  $M$ .

## 2.2. Álgebra tensorial y álgebra exterior

La teoría de las formas diferenciales de grado superior se apoya en ciertos conceptos de álgebra multilineal, que conviene repasar.

Si  $E$  y  $F$  son dos espacios  $\mathbb{R}$ -vectoriales, las *aplicaciones bilineales*  $h: E \times F \rightarrow \mathbb{R}$  conforman un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial  $B(E, F)$ . Dados dos vectores  $x \in E$ ,  $y \in F$ , la evaluación  $h \mapsto h(x, y)$  es una aplicación lineal sobre  $B(E, F)$ , es decir, un elemento del espacio vectorial dual  $B(E, F)^*$ . Se denota esta evaluación por  $x \otimes y$ . Dadas dos bases  $\{e_j\}$  de  $E$  y  $\{f_k\}$  de  $F$ , las combinaciones lineales<sup>4</sup>  $x = x^j e_j$ ,  $y = y^k f_k$  conllevan una expansión  $h(x, y) = x^j y^k h(e_j, f_k)$  por la bilinealidad de  $h$ . Esto muestra que  $x \otimes y = x^j y^k (e_j \otimes f_k)$ . De este modo,  $\{e_j \otimes f_k\}$  es una base  $\mathbb{R}$ -vectorial de  $B(E, F)^*$ .

**Definición 2.4.** El **producto tensorial** de dos espacios  $\mathbb{R}$ -vectoriales  $E$  y  $F$  es el espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial  $E \otimes F := B(E, F)^*$ . Sus elementos son sumas finitas de los *tensores simples*  $x \otimes y$  con  $x \in E$ ,  $y \in F$ , que cumplen las siguientes reglas de combinación:

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2) \otimes y &= x_1 \otimes y + x_2 \otimes y, \\ x \otimes (y_1 + y_2) &= x \otimes y_1 + x \otimes y_2, \\ t(x \otimes y) &= tx \otimes y = x \otimes ty \quad \text{para } t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Si  $E$  y  $F$  son finitodimensionales, entonces  $\dim_{\mathbb{R}}(E \otimes F) = (\dim_{\mathbb{R}} E) (\dim_{\mathbb{R}} F)$ .  $\diamond$

Hay isomorfismos lineales  $\mathbb{R} \otimes E \simeq E \simeq E \otimes \mathbb{R}$ , dadas por  $1 \otimes x \leftrightarrow x \leftrightarrow x \otimes 1$  para  $x \in E$ . En adelante, se identificará estos tres espacios  $\mathbb{R}$ -vectoriales.

Si  $E$ ,  $F$  y  $G$  son *tres* espacios  $\mathbb{R}$ -vectoriales, la evaluación  $h \mapsto h(x, y, z)$  de una forma trilineal  $k: E \times F \times G \rightarrow \mathbb{R}$  se denota por

$$\underline{x \otimes y \otimes z} := (x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z).$$

Así, el espacio dual del espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial  $T(E, F, G)$  de tales  $h$  se denota por

$$\underline{E \otimes F \otimes G} \simeq (E \otimes F) \otimes G \simeq E \otimes (F \otimes G).$$

**Definición 2.5.** Sean  $E_1, \dots, E_k$  y  $F$  unos espacios  $\mathbb{R}$ -vectoriales. Una determinada aplicación  $g: E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$  es  **$k$ -lineal** si para cada  $j = 1, \dots, k$  la aplicación parcial  $E_j \rightarrow F: x_j \mapsto g(x_1, \dots, x_j, \dots, x_k)$  es lineal.

El **producto tensorial**  $\underline{E_1 \otimes \dots \otimes E_k}$  es el espacio dual correspondiente. Está determinado hasta isomorfismo por la siguiente propiedad universal: existe una aplicación

<sup>4</sup>El convenio de Einstein sigue en vigor. Así, las expresiones  $x^j e_j$  y  $y^k f_k$  son sumas finitas.

$k$ -lineal canónica  $\theta: E_1 \times \cdots \times E_k \rightarrow E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$  tal que a cada aplicación  $k$ -lineal  $g: E_1 \times \cdots \times E_k \rightarrow F$  le corresponde una única aplicación lineal  $\tilde{g}: E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \rightarrow F$  que satisface  $\tilde{g} \circ \theta = g$ :

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 \times \cdots \times E_k & & \\
 \downarrow \theta & \searrow g & \\
 & & F \\
 E_1 \otimes \cdots \otimes E_k & \xrightarrow{\tilde{g}} & 
 \end{array}$$

Dados unos vectores  $x_j \in E_j$ , el símbolo  $x_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_k \in E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$  denota la evaluación  $h \mapsto h(x_1, x_2, \dots, x_k)$  de formas  $k$ -lineales. Sea  $\theta(x_1, \dots, x_k) := x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$ ; esta  $\theta$  es lineal en cada variable. Basta definir  $\tilde{g}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) := g(x_1, \dots, x_k)$  y extender esta receta por linealidad a sumas finitas de tensores simples.

Si  $\{e_{j1}, \dots, e_{jm_j}\}$  es una base  $\mathbb{R}$ -vectorial para cada  $E_j$ , todos los tensores simples  $e_{1r_1} \otimes e_{2r_2} \otimes \cdots \otimes e_{kr_k}$ , con cada  $r_j \in \{1, \dots, m_j\}$ , forman una base para  $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$ . Luego  $\dim_{\mathbb{R}}(E_1 \otimes \cdots \otimes E_k) = m_1 \cdots m_k = \prod_{j=1}^k \dim_{\mathbb{R}} E_j$ .  $\diamond$

**Definición 2.6.** Si  $f: E_1 \times \cdots \times E_k \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: E_{k+1} \times \cdots \times E_{k+r} \rightarrow \mathbb{R}$  son formas multilineales, su **producto tensorial** es la forma  $(k+r)$ -lineal  $f \otimes g: E_1 \times \cdots \times E_{k+r} \rightarrow \mathbb{R}$  dada por

$$\underline{f \otimes g}(x_1, \dots, x_{k+r}) := f(x_1, \dots, x_k) g(x_{k+1}, \dots, x_{k+r}). \quad \diamond$$

**Definición 2.7.** Si  $E$  es un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial,  $E^k := E \times \cdots \times E$  ( $k$  veces) denota el producto cartesiano de  $k$  copias de  $E$ . Una aplicación  $k$ -lineal  $g: E^k \rightarrow F$  es **alternante** (o *antisimétrica*) si cualquier permutación  $\sigma \in S_k$  de sus argumentos multiplica sus valores por el signo  $(-1)^\sigma = \pm 1$  de la permutación:<sup>5</sup>

$$g(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}) = (-1)^\sigma g(x_1, \dots, x_k) \quad \text{para } x_1, \dots, x_k \in E; \sigma \in S_k. \quad \diamond$$

**Definición 2.8.** Cada aplicación  $k$ -lineal  $h: E^k \rightarrow F$  da lugar a una aplicación  $k$ -lineal alternante  $\mathbb{A}h: E^k \rightarrow F$  por **antisimetrización**:

$$\underline{\mathbb{A}h}(x_1, \dots, x_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma h(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(k)}). \quad (2.6)$$

El **producto exterior** de dos formas multilineales alternantes  $f: E^k \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g: E^r \rightarrow \mathbb{R}$  es la forma  $(k+r)$ -lineal alternante  $f \wedge g: E^{k+r} \rightarrow \mathbb{R}$  siguiente:

$$f \wedge g := \frac{(k+r)!}{k! r!} \mathbb{A}(f \otimes g). \quad (2.7)$$

Cuando  $k = r = 1$ , la última fórmula se reduce a:  $f \wedge g = f \otimes g - g \otimes f$ .  $\diamond$

<sup>5</sup>Nótese que  $h: E^2 \rightarrow \mathbb{R}$  es alternante si y solo si  $h(x, y) = -h(y, x)$  para todo  $x, y \in E$ .

**Lema 2.9.** (a) *El producto exterior es asociativa y anticonmutativa: dadas tres formas multilineales alternantes  $f: E^k \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g: E^r \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h: E^s \rightarrow \mathbb{R}$ , valen*

$$(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h), \quad (2.8a)$$

$$g \wedge f = (-1)^{kr} f \wedge g. \quad (2.8b)$$

(b) *Si  $f_i: E^{k_i} \rightarrow \mathbb{R}$  es una forma alternante para  $i = 1, \dots, m$ , su producto exterior es*

$$f_1 \wedge \dots \wedge f_m = \frac{(k_1 + \dots + k_m)!}{k_1! \dots k_m!} \mathbb{A}(f_1 \otimes \dots \otimes f_m). \quad (2.9)$$

*Demostración.* El grupo de permutaciones  $S_k$  actúa sobre formas las  $k$ -lineales por

$$\underline{\sigma} \cdot a(x_1, \dots, x_k) := a(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(k)}).$$

Al poner  $\tau := \sigma^{-1}$ , la fórmula (2.6) se simplifica en  $\mathbb{A}h := (1/k!) \sum_{\tau} (-1)^{\tau} \tau \cdot h$ .

De la Definición 2.6 está claro que el producto tensorial de formas es asociativo; por lo tanto, vale

$$\begin{aligned} (f \wedge g) \wedge h &= \frac{(k+r+s)!}{(k+r)!s!} \mathbb{A}((f \wedge g) \otimes h) = \frac{(k+r+s)!}{(k+r)!s!} \frac{(k+r)!}{k!r!} \mathbb{A}(\mathbb{A}(f \otimes g) \otimes h) \\ &= \frac{(k+r+s)!}{k!r!s!} \frac{1}{(k+r+s)!} \frac{1}{(k+r)!} \sum_{\substack{\sigma \in S_{k+r+s} \\ \tau \in S_{k+r}}} (-1)^{\sigma} (-1)^{\tau} \sigma \cdot (\tau \cdot (f \otimes g) \otimes h) \\ &= \frac{1}{k!r!s!(k+r)!} \sum_{\substack{\sigma \in S_{k+r+s} \\ \tau \in S_{k+r}}} (-1)^{\sigma\tau} (\sigma\tau) \cdot (f \otimes g \otimes h) \\ &= \frac{1}{k!r!s!} \sum_{\rho \in S_{k+r+s}} (-1)^{\rho} \rho \cdot (f \otimes g \otimes h), \end{aligned}$$

después de identificar  $\tau \in S_{k+r}$  con la permutación correspondiente en  $S_{k+r+s}$  que deja fijos los últimos  $s$  objetos, tomando  $\rho = \sigma\tau$ . Con un cálculo similar, se obtiene

$$f \wedge (g \wedge h) = \frac{1}{k!r!s!} \sum_{\rho \in S_{k+r+s}} (-1)^{\rho} \rho \cdot (f \otimes g \otimes h),$$

lo cual establece la asociatividad (2.8a). De camino, se ha verificado el caso  $m = 3$  de la relación (2.9); el caso general (b) sigue por inducción sobre  $m$ .

En el caso  $k = r = 1$ , la forma bilineal  $f \wedge g$  está dada por (2.7):

$$\boxed{f \wedge g(x, y) = 2 \mathbb{A}(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y) - f(y)g(x).} \quad (2.10)$$

De ahí, su anticonmutatividad es evidente:  $g \wedge f = -f \wedge g$ .

En el caso general, sea  $\kappa \in S_{k+r}$  la permutación que intercambia los bloques  $\{1, \dots, k\}$  con  $\{k+1, \dots, k+r\}$ ; es decir,

$$\kappa(i) := \begin{cases} i+r & \text{si } i \leq k, \\ i-k & \text{si } i > k. \end{cases}$$

Esta permutación  $\kappa$  es el producto de  $kr$  transposiciones de elementos consecutivos: se requiere  $r$  transposiciones para llevar cada uno de los  $k$  elementos iniciales a su posición final. Así,  $(-1)^\kappa = (-1)^{kr}$ . Si  $f = f^1 \wedge \dots \wedge f^k$  y  $g = g^1 \wedge \dots \wedge g^r$  con  $f^i, g^j \in E^*$ , la anticonmutatividad (2.10) establece (2.8b) por inducción sobre  $k$  y  $r$ .

Solo falta observar que el espacio vectorial de formas  $k$ -lineales alternantes sobre  $E$  tiene una base de elementos  $\{f^1 \wedge \dots \wedge f^k\}$ , donde  $f^1, \dots, f^k$  son miembros de una base vectorial de  $E^*$ .  $\square$

**Lema 2.10.** Si  $g^1, \dots, g^k \in E^*$  y  $x_1, \dots, x_k \in E$ , entonces

$$g^1 \wedge \dots \wedge g^k(x_1, \dots, x_k) = \det [g^i(x_j)]. \quad (2.11)$$

*Demostración.* La igualdad (2.10) es el caso  $k=2$  de esta fórmula. En el caso general, se obtiene de (2.9) y (2.6) la expansión de Leibniz del determinante:

$$\begin{aligned} (g^1 \wedge \dots \wedge g^k)(x_1, \dots, x_k) &= k! \mathbb{A}(g^1 \otimes \dots \otimes g^k)(x_1, \dots, x_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma (g^{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes g^{\sigma(k)})(x_1, \dots, x_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma g^{\sigma(1)}(x_1) \dots g^{\sigma(k)}(x_k) = \det [g^i(x_j)]. \quad \square \end{aligned}$$

**Definición 2.11.** Sea  $E$  un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial con  $\dim_{\mathbb{R}} E = n$ . Denótese por  $\underline{\Lambda^k E^*}$  el espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial de las formas  $k$ -lineales alternantes  $f: E^k \rightarrow \mathbb{R}$ . Si  $\{f^1, \dots, f^n\}$  es una base de  $E^*$ , la base correspondiente de  $\Lambda^k E^*$  tiene elementos:

$$\underline{f^I} \equiv f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \dots \wedge f^{i_k}, \quad \text{con } I = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}.$$

Debido a la anticonmutatividad  $f^i \wedge f^j = -f^j \wedge f^i$ , se debe escribir las 1-formas  $f^i$  en orden estrictamente creciente,  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , para describir la  $k$ -forma básica  $f^I$ . La cardinalidad de esta base es

$$\#\{I \subseteq \{1, \dots, n\} : |I| = k\} = \binom{n}{k}.$$

Una “forma 0-lineal” es una constante:  $\underline{\Lambda^0 E^*} := \mathbb{R}$  y luego  $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^0 E^* = 1$ . Además,  $\Lambda^1 E^* = E^*$  y luego  $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^1 E^* = n$ . También,  $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^n E^* = 1$ ; y  $\Lambda^k E^* = \{0\}$  para  $k > n$ .

La suma directa de estos espacios vectoriales de  $k$ -formas,

$$\underline{\Lambda^\bullet E^*} := \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k E^* = \mathbb{R} \oplus E^* \oplus \Lambda^2 E^* \oplus \cdots \oplus \Lambda^n E^* \quad (2.12)$$

es una  $\mathbb{R}$ -álgebra graduada bajo el producto exterior de formas: si  $f \in \Lambda^k E^*$ ,  $g \in \Lambda^r E^*$ , entonces  $f \wedge g \in \Lambda^{k+r} E^*$ . Esta  $\Lambda^\bullet E^*$  es el **álgebra exterior** asociada con el espacio vectorial  $E^*$ . Nótese que  $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^\bullet E^* = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$ .  $\diamond$

**Definición 2.12.** Si  $\mathbb{F}$  es un cuerpo cualquiera, una  $\mathbb{F}$ -álgebra es un espacio  $\mathbb{F}$ -vectorial  $A$  dotado de un producto  $\mathbb{F}$ -bilineal asociativo. Ella es una  $\mathbb{F}$ -álgebra graduada si es la suma directa de subespacios  $\mathbb{F}$ -vectoriales  $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_k$ , de tal manera que  $A_k A_l \subseteq A_{k+l}$ . Esto significa que  $x \in A_k, y \in A_l \implies xy \in A_{k+l}$ .

Conviene escribir  $\#x = r \in \mathbb{Z}$  cuando  $x \in A_r$ .

Algunos de estos subespacios  $A_k$  pueden ser nulos: este es el caso de la  $\mathbb{R}$ -álgebra graduada  $\Lambda^\bullet E^*$  de (2.12), para la cual  $\Lambda^k E^* = \{0\}$  si  $k < 0$  o si  $k > \dim_{\mathbb{R}} E^*$ .

Si  $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} A_k$  es una  $\mathbb{F}$ -álgebra graduada, dícese que una aplicación  $\mathbb{F}$ -lineal  $T: A \rightarrow A$  es un **operador de grado**  $r \in \mathbb{Z}$  si  $T(A_k) \subseteq A_{k+r}$  para todo  $k$ .

[[ En particular, cada  $z \in A_r$  define dos operadores de grado  $r$ : la *premultiplicación*  $x \mapsto zx$  y la *postmultiplicación*  $x \mapsto xz$ . ]]

Si  $S: A \rightarrow A$  y  $T: A \rightarrow A$  son dos operadores de grados respectivos  $k$  y  $l$ , su **conmutador**  $[S, T] := ST - TS$  es un operador de grado  $k + l$ . Igual sucede con su **anticonmutador**  $[S, T]_+ := ST + TS$ .  $\diamond$

**Definición 2.13.** Sea  $A$  una  $\mathbb{F}$ -álgebra cualquiera. Una **derivación par** de  $A$  es un operador  $\mathbb{F}$ -lineal  $D: A \rightarrow A$  que cumple una *regla de Leibniz*:

$$D(ab) = (Da)b + a(Db) \quad \text{para todo } a, b \in A. \quad (2.13a)$$

Una **derivación impar** de  $A$  es otro operador  $\mathbb{F}$ -lineal  $E: A \rightarrow A$  tal que

$$E(ab) = (Ea)b + (-1)^{\#a} a(Eb) \quad \text{para todo } a \in A_k, b \in A. \quad (2.13b)$$

La fórmula (2.13b) también se escribe así:  $E(ab) = (Ea)b + (-1)^{\#a} a(Eb)$ .  $\diamond$

Si  $D'$  es otra derivación par, el **conmutador**  $[D, D'] := DD' - D'D$  es una derivación par: el cálculo (1.26) que demostró la Proposición 1.56 se adapta al caso.

Es fácil verificar lo siguiente: el conmutador  $[D, E] := DE - ED$  de una derivación par y una derivación impar resulta ser una derivación impar. En cambio, el **anticonmutador**  $[E, F]_+ := EF + FE$  de dos derivaciones impares  $E$  y  $F$  es una derivación par.

### 2.3. Formas diferenciales de grado superior

**Definición 2.14.** Sea  $M$  una variedad diferencial. Si  $p \in \mathbb{N}$ , un  **$p$ -tensor covariante** sobre  $M$  es una aplicación  $p$ -lineal  $R: \mathfrak{X}(M)^p \rightarrow C^\infty(M)$  tal que cada aplicación parcial  $X_j \mapsto R(X_1, \dots, X_j, \dots, X_p)$  sea  $C^\infty(M)$ -lineal. Dicho de otra manera: si  $j \in \{1, \dots, p\}$ ,  $R$  cumple las dos propiedades algebraicas:

$$\begin{aligned} R(X_1, \dots, X_j + X'_j, \dots, X_p) &= R(X_1, \dots, X_j, \dots, X_p) + R(X_1, \dots, X'_j, \dots, X_p), \\ R(X_1, \dots, fX_j, \dots, X_p) &= f R(X_1, \dots, X_j, \dots, X_p), \end{aligned}$$

para  $X_1, \dots, X_j, X'_j, \dots, X_p \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ .

Un  **$q$ -tensor contravariante** es una aplicación  $q$ -lineal  $S: \mathcal{A}^1(M)^q \rightarrow C^\infty(M)$  tal que cada  $\alpha^k \mapsto S(\alpha^1, \dots, \alpha^k, \dots, \alpha^q)$  sea  $C^\infty(M)$ -lineal.

Un **0-tensor** sobre  $M$  (covariante o contravariante) es una función suave en  $C^\infty(M)$ .

Una aplicación  $(p+q)$ -lineal  $T: \mathfrak{X}(M)^p \times \mathcal{A}^1(M)^q \rightarrow C^\infty(M)$ , cuyas aplicaciones parciales  $X_j \mapsto T(X_1, \dots, X_p, \alpha^1, \dots, \alpha^q)$  y  $\alpha^k \mapsto T(X_1, \dots, X_p, \alpha^1, \dots, \alpha^q)$  son todas  $C^\infty(M)$ -lineales, es un  **$(p, q)$ -tensor mixto** sobre  $M$ .  $\diamond$

**Ejemplo 2.15.** Un 1-tensor covariante es simplemente una 1-forma diferencial.

Un 1-tensor contravariante es una aplicación  $C^\infty(M)$ -lineal de 1-formas diferenciales en  $\mathbb{R}$ . Ahora, la evaluación  $\alpha \mapsto \alpha(X)$  de 1-formas en un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es una aplicación de  $\mathcal{A}^1(M)$  en  $\mathbb{R}$ , que de hecho es  $C^\infty(M)$ -lineal:

$$\underline{f\alpha}(X) = f \alpha(X) \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M), \alpha \in \mathcal{A}^1(M).$$

Por otro lado, sea  $S: \mathcal{A}^1(M) \rightarrow C^\infty(M)$  un 1-tensor contravariante. Al adaptar la demostración de la Proposición 2.2 al presente caso, se puede comprobar que:

- $\diamond$  el valor de  $S(\alpha)$  en un punto  $p \in M$  depende solamente del covector  $\alpha_p \in T_p^*M$ ;
- $\diamond$  la función  $X_p: \alpha_p \mapsto S(\alpha)(p)$  es  $\mathbb{R}$ -lineal, así que  $X_p \in (T_p^*M)^* \simeq T_pM$ ;
- $\diamond$  la asignación  $p \mapsto X_p$  es una sección suave del fibrado tangente  $TM \xrightarrow{\tau} M$ ;
- $\diamond$  dicha sección es un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , para el cual  $S(\alpha) = \alpha(X)$  para todo  $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$ .

En breve: cualquier 1-tensor contravariante es una evaluación de 1-formas en un campo vectorial. Al identificar la evaluación  $\alpha \mapsto \alpha(X)$  con el campo  $X$  mismo, se ve que los 1-tensores contravariantes coinciden con los campos vectoriales sobre  $M$ .  $\diamond$

**Definición 2.16.** Una  **$k$ -forma diferencial** sobre una variedad diferencial  $M$  es una aplicación  $k$ -lineal alternante  $\omega: \mathfrak{X}(M)^k \rightarrow C^\infty(M)$  tal que cada aplicación parcial  $X_j \mapsto \omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_k)$  es  $C^\infty(M)$ -lineal. En otras palabras,  $\omega$  cumple es un  $k$ -tensor covariante que es antisimétrico en sus  $k$  argumentos:

$$\begin{aligned}\omega(X_1, \dots, X_j + X'_j, \dots, X_k) &= \omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_k) + \omega(X_1, \dots, X'_j, \dots, X_k), \\ \omega(X_1, \dots, fX_j, \dots, X_k) &= f \omega(X_1, \dots, X_j, \dots, X_k) \quad \text{cuando } f \in C^\infty(M), \\ \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) &= (-1)^\sigma \omega(X_1, \dots, X_k) \quad \text{para cada } \sigma \in S_k.\end{aligned}\tag{2.14}$$

La totalidad de  $k$ -formas diferenciales sobre  $M$  será denotado por  $\mathcal{A}^k(M)$ .  $\diamond$

**Definición 2.17.** Cada  $k$ -tensor covariante  $R$  sobre  $M$  determina una  $k$ -forma  $\omega = \mathbb{A}R$ ,

$$\omega(X_1, \dots, X_k) := \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma R(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}).$$

Si  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ ,  $\eta \in \mathcal{A}^r(M)$ , su **producto tensorial** es el  $(k+r)$ -tensor covariante:

$$\omega \otimes \eta(X_1, \dots, X_{k+r}) := \omega(X_1, \dots, X_k) \eta(X_{k+1}, \dots, X_{k+r});$$

y su **producto exterior**  $\omega \wedge \eta \in \mathcal{A}^{k+r}(M)$  es la *antisimetrización* de  $\omega \otimes \eta$ :

$$\omega \wedge \eta := \frac{(k+r)!}{k! r!} \mathbb{A}(\omega \otimes \eta).\tag{2.15}$$

Con este producto exterior, la suma directa

$$\mathcal{A}^\bullet(M) := \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{A}^k(M) = \mathcal{A}^0(M) \oplus \mathcal{A}^1(M) \oplus \dots \oplus \mathcal{A}^n(M)\tag{2.16}$$

es una *álgebra graduada* sobre  $\mathbb{R}$ . Conviene emplear la notación  $\mathcal{A}^0(M) \equiv C^\infty(M)$ : las **0-formas** son las funciones suaves sobre  $M$ . Una **forma diferencial**, sin mención explícita de grado, es un elemento de este álgebra  $\mathcal{A}^\bullet(M)$ .  $\diamond$

Las fórmulas (2.14) implican que cada  $\mathcal{A}^k(M)$  [y también su suma directa  $\mathcal{A}^\bullet(M)$ ] es un módulo sobre el  $\mathbb{R}$ -álgebra conmutativa  $C^\infty(M)$ .

**Definición 2.18.** Sea  $M$  una variedad diferencial  $n$ -dimensional. Si  $k \in \{1, \dots, n\}$ , se puede definir un fibrado vectorial  $\Lambda^k T^*M \xrightarrow{\pi} M$  cuya fibra  $\pi^{-1}(p)$  en  $p \in M$  es la “potencia exterior”  $\Lambda^k(T_p^*M)$ . En efecto, sea

$$\underline{\Lambda^k T^*M} := \{ (p, \zeta) : p \in M, \zeta \in \Lambda^k(T_p^*M) \}, \quad \pi(p, \zeta) := p.$$

Un atlas  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}$  para  $M$  determina funciones  $\psi_\alpha: \pi^{-1}(U_\alpha) \rightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$  por

$$\underline{\psi}_\alpha(p, \zeta) := (p; \zeta_{1\dots k}, \dots, \zeta_{(n-k+1)\dots n}) \quad \text{si} \quad \zeta = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \zeta_{i_1\dots i_k} dx^{i_1}|_p \wedge \dots \wedge dx^{i_k}|_p.$$

Las cartas locales  $(\pi^{-1}(U_\alpha), (\phi_\alpha \times 1_{\binom{n}{k}}) \circ \psi_\alpha)$  forman un atlas sobre  $\Lambda^k T^*M$ , con la cual  $\Lambda^k T^*M$  es una variedad de dimensión  $n + \binom{n}{k}$  y la proyección  $\pi: \Lambda^k T^*M \rightarrow M$  es automáticamente una función suave. Por su construcción,  $\Lambda^k T^*M \xrightarrow{\pi} M$  es un fibrado vectorial de rango  $\binom{n}{k}$ .  $\diamond$

Al adaptar la Proposición 2.2 a este caso, el valor de la función  $\omega(X_1, \dots, X_k)$  en cada  $p \in M$  depende solamente de los vectores tangentes  $(X_1)_p, \dots, (X_k)_p \in T_p M$ . También, la aplicación  $(T_p M)^k \rightarrow \mathbb{R}: ((X_1)_p, \dots, (X_k)_p) \mapsto \omega(X_1, \dots, X_k)(p)$  es  $k$ -lineal y alternante. Luego, hay un elemento  $\omega_p \in \Lambda^k(T_p^* M) = \Lambda^k(T_p M)^*$  tal que

$$\omega_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p) = \omega(X_1, \dots, X_k)(p) \quad \text{para todo} \quad p \in M. \quad (2.17)$$

La aplicación  $p \mapsto \omega_p$  entonces define una sección del fibrado vectorial  $\Lambda^k T^*M \xrightarrow{\pi} M$ . En resumen: la fórmula (2.17) constituye una *identificación* de la  $k$ -forma  $\omega$  con esta sección:

$$\mathcal{A}^k(M) \simeq \Gamma(M, \Lambda^k T^*M).$$

► Si  $(U, \phi)$  es una carta local para  $M$ , la **restricción**  $\omega|_U \in \mathcal{A}^k(U)$  se define por una generalización de la receta (2.5) para 1-formas locales. Esta carta determina un juego básico de 1-formas locales  $dx^1, \dots, dx^n$  en  $\mathcal{A}^1(U)$ . Las reglas algebraicas de la Definición 2.17 conducen a las fórmulas:

$$\underline{dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}} \left( \frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}} \right) := \prod_{r=1}^k dx^{i_r} \left( \frac{\partial}{\partial x^{j_r}} \right) = \prod_{r=1}^k \llbracket i_r = j_r \rrbracket = \llbracket I = J \rrbracket,$$

donde  $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ ,  $J = \{j_1, \dots, j_k\}$  son  **$k$ -tuplas ordenadas** de elementos distintos de  $\{1, 2, \dots, n\}$ . En seguida, se define por antisimetrización:

$$\underline{dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}} := k! \mathbb{A}(dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_k}).$$

La expresión local de  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$  entonces tiene el aspecto siguiente:

$$\omega|_U = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_{i_1\dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} \equiv \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}. \quad (2.18)$$

En la segunda sumatoria, se sobreentiende que  $I \equiv \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, n\}$  tiene sus elementos desplegados *en orden creciente*.

**Proposición 2.19.** *El producto exterior de formas diferenciales es asociativa y anticonmutativa: si  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ ,  $\eta \in \mathcal{A}^r(M)$ ,  $\zeta \in \mathcal{A}^s(M)$ , entonces*

$$(\omega \wedge \eta) \wedge \zeta = \omega \wedge (\eta \wedge \zeta), \quad (2.19a)$$

$$\eta \wedge \omega = (-1)^{kr} \omega \wedge \eta. \quad (2.19b)$$

Si  $\lambda^i$  es una  $k_i$ -forma lineal, para  $i = 1, \dots, t$ , entonces

$$\lambda^1 \wedge \dots \wedge \lambda^t = \frac{(k_1 + \dots + k_t)!}{k_1! \dots k_t!} \mathbb{A}(\lambda^1 \otimes \dots \otimes \lambda^t). \quad (2.20)$$

*Demostración.* Basta observar que los valores de estas formas en cada punto  $p \in M$  satisfacen el Lema 2.9, con  $E = T_p M$ .  $\square$

► Sobre el álgebra graduada  $\mathcal{A}^\bullet(M)$  de formas diferenciales, se definen diversos operadores de grados  $\pm 1$  (estos son operadores que aumentan o disminuyen el grado de sus argumentos en 1).

**Definición 2.20.** Un operador sobre formas diferenciales  $T: \mathcal{A}^\bullet(M) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(M)$  se llama **de grado  $r$**  si  $\omega \in \mathcal{A}^k(M) \implies T(\omega) \in \mathcal{A}^{k+r}(M)$ .

Si  $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$  es una 1-forma fija, la **multiplicación exterior**  $\varepsilon_\alpha: \omega \mapsto \alpha \wedge \omega$  es un operador  $\mathbb{R}$ -lineal sobre  $\mathcal{A}^\bullet(M)$  de grado  $+1$ , pues  $\omega \in \mathcal{A}^k(M) \implies \alpha \wedge \omega \in \mathcal{A}^{k+1}(M)$ .

Si  $X \in \mathfrak{X}(M)$  es un campo vectorial fijo, la **contracción**  $i_X$  es un operador  $\mathbb{R}$ -lineal de grado  $-1$ . Si  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ , se define  $i_X \omega \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$  por:<sup>6</sup>

$$i_X \omega(Y_1, \dots, Y_{k-1}) := \omega(X, Y_1, \dots, Y_{k-1}). \quad (2.21)$$

Para  $f \in \mathcal{A}^0(M) = C^\infty(M)$ , se define  $i_X f := 0$ . Para una 1-forma  $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$ , la fórmula (2.21) se simplifica en  $i_X \alpha := \alpha(X) \in \overline{C^\infty(M)}$ .  $\diamond$

**Proposición 2.21.** Si  $\alpha^1, \dots, \alpha^k \in \mathcal{A}^1(M)$  y si  $X, X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$ ; y si  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ ,  $\eta \in \mathcal{A}^r(M)$ , entonces las siguientes fórmulas son válidas:

$$(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k)(X_1, \dots, X_k) = \det [\alpha^i(X_j)]. \quad (2.22a)$$

$$i_X(\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^k) = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \alpha^j(X) (\alpha^1 \wedge \dots \wedge \widehat{\alpha^j} \wedge \dots \wedge \alpha^k). \quad (2.22b)$$

$$i_X(\omega \wedge \eta) = i_X \omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X \eta. \quad (2.22c)$$

La fórmula (2.22c) dice que la contracción  $i_X$  es una derivación impar de  $\mathcal{A}^\bullet(M)$ .

<sup>6</sup>Algunos autores llaman *producto interior* a la contracción de  $X$  con  $\omega$ . Se escribe  $X \lrcorner \omega \equiv i_X \omega$ , en contraste con el producto exterior  $\alpha \wedge \omega \equiv \varepsilon_\alpha \omega$ .

*Demostración.* Ad (a): La fórmula (2.22a) sigue el patrón del Lema 2.10:

$$\begin{aligned} (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(X_1, \dots, X_k) &= k! \mathbb{A}(\alpha^1 \otimes \cdots \otimes \alpha^k)(X_1, \dots, X_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma (\alpha^{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \alpha^{\sigma(k)})(X_1, \dots, X_k) \\ &= \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^\sigma \alpha^{\sigma(1)}(X_1) \cdots \alpha^{\sigma(k)}(X_k) = \det[\alpha^i(X_j)]. \end{aligned}$$

Ad (b): Al desarrollar ese determinante con respecto a su primera columna,

$$\begin{aligned} i_{X_1}(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(X_2, \dots, X_k) &= (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(X_1, \dots, X_k) \\ &= \det[\alpha^i(X_j)] = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \alpha^j(X_1) \det[\alpha^r(X_s)] \quad (\text{con } r \neq j, s \geq 2) \\ &= \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \alpha^j(X_1) (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha^j} \wedge \cdots \wedge \alpha^k)(X_2, \dots, X_k). \end{aligned}$$

Ad (c): Cada elemento de  $\mathcal{A}^\bullet(M)$  es una suma finita de productos exteriores de 1-formas; para comprobar la relación (2.22c), cuyos dos lados dependen bilinealmente de  $(\omega, \eta)$ , basta tomar  $\omega = \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k$  y  $\eta = \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^r$  donde las  $\alpha^i$  y  $\beta^j$  son 1-formas. El resultado sigue de la parte (b), mediante el cálculo:

$$\begin{aligned} i_X(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k \wedge \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^r) &= \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} \alpha^i(X) \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\alpha^i} \wedge \cdots \wedge \alpha^k \wedge \beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^r \\ &\quad + \sum_{j=1}^r (-1)^{k+j-1} \beta^j(X) \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k \wedge \beta^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{\beta^j} \wedge \cdots \wedge \beta^r \\ &= i_X(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k) \wedge (\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^r) + (-1)^k (\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k) \wedge i_X(\beta^1 \wedge \cdots \wedge \beta^r). \quad \square \end{aligned}$$

**Definición 2.22.** Sea  $\tau: M \rightarrow N$  una aplicación suave entre variedades diferenciales y sea  $\beta \in \mathcal{A}^1(N)$ . El **pullback** (o la *preimagen*, o la *imagen inversa*)  $\tau^* \beta \in \mathcal{A}^1(M)$  se define por

$$(\tau^* \beta)_p(X_p) := \beta_{\tau(p)}(T_p \tau(X_p)). \quad (2.23)$$

Fíjese que la aplicación lineal  $T_{\tau(p)}^* N \rightarrow T_p^* M : \beta_{\tau(p)} \mapsto (\tau^* \beta)_p$  es, por esta misma definición, la *transpuesta* de la aplicación tangente  $T_p \tau: T_p M \rightarrow T_{\tau(p)} N$ .

Obsérvese que para definir el pullback  $\beta \mapsto \tau^* \beta$ , no es necesario que  $\tau: M \rightarrow N$  sea invertible.

Si  $\tau$  es un *difeomorfismo*, se puede comparar esta imagen inversa con las imágenes directas de campos vectoriales bajo  $\tau$ ; en efecto, de (1.29) se obtiene

$$\tau^* \beta(X) = \beta(\tau_* X) \circ \tau, \quad (2.24)$$

puesto que se recupera (2.23) al evaluar los dos lados de (2.24) en el punto  $p \in M$ .

Más generalmente, si  $\omega \in \mathcal{A}^k(N)$ , se define su pullback bajo  $\tau$  por:

$$(\tau^* \omega)_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p) := \omega_{\tau(p)}(T_p \tau(X_1)_p, \dots, T_p \tau(X_k)_p),$$

y en el caso de que  $\tau$  sea un difeomorfismo, la forma  $\tau^* \omega \in \mathcal{A}^k(M)$  cumple

$$\tau^* \omega(X_1, \dots, X_k) = \omega(\tau_* X_1, \dots, \tau_* X_k) \circ \tau.$$

Para  $g \in \mathcal{A}^0(N) = C^\infty(N)$ , se define simplemente  $\tau^* g := g \circ \tau$  (la transpuesta usual).  $\diamond$

**Proposición 2.23.** *El producto exterior es equivariante bajo pullbacks: si  $\tau: M \rightarrow N$  es una aplicación suave,  $\omega \in \mathcal{A}^k(N)$ ,  $\eta \in \mathcal{A}^r(N)$ , entonces en  $\mathcal{A}^{k+r}(M)$  vale*

$$\tau^*(\omega \wedge \eta) = \tau^* \omega \wedge \tau^* \eta. \quad (2.25)$$

*Demostración.* Si  $X_1, \dots, X_{k+r} \in \mathfrak{X}(M)$  y  $p \in M$ , entonces

$$\begin{aligned} (\tau^*(\omega \wedge \eta))_p((X_1)_p, \dots, (X_{k+r})_p) &= (\omega \wedge \eta)_{\tau(p)}(T_p \tau(X_1)_p, \dots, T_p \tau(X_{k+r})_p) \\ &= \binom{k+r}{k} \mathbb{A}(\omega_{\tau(p)} \otimes \eta_{\tau(p)})(T_p \tau(X_1)_p, \dots, T_p \tau(X_{k+r})_p) \\ &= \binom{k+r}{k} \mathbb{A}((\tau^* \omega)_p \otimes (\tau^* \eta)_p)((X_1)_p, \dots, (X_{k+r})_p) \\ &= (\tau^* \omega \wedge \tau^* \eta)_p((X_1)_p, \dots, (X_{k+r})_p). \end{aligned}$$

En el caso de un difeomorfismo  $\tau$ , hay un argumento “no puntual” equivalente:

$$\begin{aligned} \tau^*(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{k+r}) &= \binom{k+r}{k} \mathbb{A}(\omega \otimes \eta)(\tau_* X_1, \dots, \tau_* X_{k+r}) \circ \tau \\ &= \frac{1}{k! r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+r}} (-1)^\sigma (\omega(\tau_* X_{\sigma(1)}, \dots, \tau_* X_{\sigma(k)}) \eta(\tau_* X_{\sigma(k+1)}, \dots, \tau_* X_{\sigma(k+r)})) \circ \tau \\ &= \frac{1}{k! r!} \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_{k+r}} (-1)^\sigma \tau^* \omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}) \tau^* \eta(X_{\sigma(k+1)}, \dots, X_{\sigma(k+r)}) \\ &= \binom{k+r}{k} \mathbb{A}(\tau^* \omega \otimes \tau^* \eta)(X_1, \dots, X_{k+r}) = \tau^* \omega \wedge \tau^* \eta(X_1, \dots, X_{k+r}). \end{aligned}$$

Como  $X_1, \dots, X_{k+r}$  son arbitrarios, la relación (2.25) queda demostrada.  $\square$

## 2.4. La derivada exterior

**Definición 2.24.** Si  $f \in C^\infty(M)$ , la evaluación  $X \mapsto Xf$  es una aplicación  $C^\infty(M)$ -lineal de  $\mathfrak{X}(M)$  en  $C^\infty(M)$ , pues  $(X+Y)f = Xf + Yf$  y  $(gX)f = g(Xf)$  por la definición de  $gX$ . Por lo tanto, dicha evaluación define una 1-forma diferencial  $\underline{df} \in \mathcal{A}^1(M)$ :

$$\boxed{df(X) := Xf.} \quad (2.26)$$

En coordenadas locales, se ve que  $df(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \partial f / \partial x^j$ ; por lo tanto, la expresión local (2.5) de la 1-forma  $\underline{df}$  es la suma finita:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j. \quad \diamond$$

**Definición 2.25.** Sea  $(U, \phi)$  una carta local para  $M$  y sea  $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$  una  $k$ -forma local dada por (2.18):  $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$  para algunas  $f_I \in C^\infty(U)$ . Defínase la forma local  $\underline{d\omega} \in \mathcal{A}^{k+1}(U)$  por

$$\boxed{d\omega := \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.} \quad (2.27)$$

Las 1-formas  $dx^r \in \mathcal{A}^1(U)$  anticonmutan:  $dx^r \wedge dx^s = -dx^s \wedge dx^r$ . Por lo tanto, los sumandos al lado derecho de (2.27) tales que  $j \in I$  son nulas. Se puede exigir  $j \notin I$  al lado derecho sin cambiar el resultado (aunque  $\{j, i_1, \dots, i_k\}$  no esté en orden creciente).  $\diamond$

Es evidente que  $d(s\omega_1 + t\omega_2) = s d\omega_1 + t d\omega_2$  si  $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{A}^k(U)$  y  $s, t \in \mathbb{R}$ , así que  $\omega \mapsto d\omega$  es  $\mathbb{R}$ -lineal. Sean  $g \in C^\infty(U)$  y  $\eta = \sum_{|J|=r} g_J dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \in \mathcal{A}^r(U)$ . Las derivadas exteriores de  $g\omega$  y  $\omega \wedge \eta$  obedecen ciertas reglas de Leibniz:

$$\begin{aligned} d(g\omega) &= \sum_{I,j} \frac{\partial}{\partial x^j} (gf_I) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \\ &= \sum_{I,j} \left( \frac{\partial g}{\partial x^j} f_I + g \frac{\partial f_I}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} = dg \wedge \omega + g d\omega; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(\omega \wedge \eta) &= \sum_{I,J} d(f_I g_J) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \\ &= \sum_{I,J} (df_I g_J + f_I dg_J) \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} \\ &= d\omega \wedge \eta + (-1)^k \sum_{I,J} f_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \wedge dg_J \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r}. \end{aligned}$$

En la última igualdad, se usó la anticonmutación (2.19b) para pasar la 1-forma  $dg_J$  a la derecha de la  $k$ -forma  $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ . En consecuencia,

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta. \quad (2.28)$$

Se concluye que  $\omega \mapsto d\omega$  es una *derivación impar* del álgebra graduada  $\mathcal{A}^\bullet(U)$ .

► Para pasar de las fórmulas locales tales como (2.27) y (2.28) a expresiones “globales” sobre toda la variedad  $M$ , se requiere el lema siguiente.

**Lema 2.26.** *Sea  $M$  una variedad diferencial y sea  $D: \mathcal{A}^\bullet(M) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(M)$  una derivación (par o impar). Si  $U$  es un abierto de  $M$  y si  $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$  se anula sobre  $U$ , es decir,  $\omega|_U = 0$ , entonces  $(D\omega)|_U = 0$  también.*

*Demostración.* Si  $p \in U$ , el Lema 1.29 y la Definición 1.52 muestran que es posible hallar un vecindario  $V$  de  $p$  con  $\bar{V} \subset U$  y una función suave  $h \in C^\infty(M)$  tal que  $\text{sop } h \subset U$  mientras  $h(q) = 1$  para  $q \in V$ .

Sea  $n = \dim M$ . Entonces  $\omega$  es una suma  $\omega = \sum_{k=0}^n \omega_k$  donde cada  $\omega_k \in \mathcal{A}^k(M)$ , en vista de (2.16). La condición  $\omega|_U = 0$  dice que  $\omega_q = 0$  en  $\Lambda^\bullet T_q^* M = \bigoplus_{k=0}^n \Lambda^k T_q^* M$  para cada  $q \in U$ , así que  $\omega_k|_U = 0$  en  $\mathcal{A}^k(U)$  para cada  $k$  por separado. Sin perder generalidad, entonces, se puede suponer que  $\omega$  tiene un solo sumando:  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$  para algún  $k$ .

La forma diferencial  $h\omega$  se anula en  $U$  (porque  $\omega|_U = 0$ ), y también en  $M \setminus (\text{sop } h)$ ; luego  $h\omega = 0$  en  $\mathcal{A}^k(M)$ . La  $\mathbb{R}$ -linealidad de  $D$  y la propiedad de derivación entonces implican que

$$0 = D(0) = D(h\omega) = Dh \wedge \omega \pm h D\omega,$$

donde el signo  $\pm$  vale  $+1$  o bien  $(-1)^k$ , según  $D$  sea par o impar. Al evaluar esta igualdad en cualquier  $q \in V$ , se obtiene  $0 = (Dh)_q \wedge \omega_q \pm h(q) (D\omega)_q$  en  $\Lambda^\bullet T_q^* M$ . Ahora las hipótesis  $\omega_q = 0$  y  $h(q) = 1$  dan como resultado  $(D\omega)_q = 0$ . Se concluye que  $(D\omega)|_V = 0$ . En particular, se ve que  $(D\omega)_p = 0$  para  $p \in U$  arbitrario, así que  $(D\omega)|_U = 0$ .  $\square$

**Teorema 2.27.** *Sea  $M$  una variedad diferencial. Existe una única derivación impar  $\delta$ , de grado  $+1$ , sobre el álgebra graduada  $\mathcal{A}^\bullet(M)$ , que satisface:*

- (a)  $\delta(f) = df$  para toda  $f \in \mathcal{A}^0(M)$ ;
- (b)  $\delta(d\omega) = 0$  para toda  $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ .

*Demostración.* Sea  $(U, \phi)$  una carta local de  $M$ . Si  $\omega, \eta \in \mathcal{A}^\bullet(M)$  cumplen  $\omega|_U = \eta|_U$ , así que  $(\omega - \eta)|_U = 0$ , el Lema 2.26 muestra que  $D\omega|_U = D\eta|_U$  para cualquier derivación  $D$

de  $\mathcal{A}^\bullet(M)$ . Basta, entonces, determinar la correspondencia  $\omega|_U \mapsto \delta(\omega)|_U$  para cada carta local de  $M$ .

Tómese  $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$  para algún  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ . En términos de las coordenadas locales  $\{x^1, \dots, x^n\}$  para la carta  $(U, \phi)$ , vale  $\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ , según (2.18), para determinadas funciones  $f_I \in C^\infty(U)$ . Como  $\delta$  es  $\mathbb{R}$ -lineal y una derivación impar, se calcula que

$$\begin{aligned} \delta(\omega) &= \delta\left(\sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) \\ &= \sum_{|I|=k} \left(\delta(f_I) \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge \delta(dx^{i_r}) \wedge \dots \wedge dx^{i_k}\right) \\ &= \sum_{|I|=k} df_I \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} + 0 = d\omega, \end{aligned} \quad (2.29)$$

al usar las hipótesis (a) y (b) y la fórmula (2.27).

Es oportuno verificar la consistencia de las propiedades del enunciado, al comprobar que  $d(df) = 0$  para  $f \in C^\infty(U)$ . En vista de la fórmula (2.27), se obtiene

$$\begin{aligned} d(df) &= d\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j\right) = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} dx^i \wedge dx^j \\ &= \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} (dx^i \otimes dx^j - dx^j \otimes dx^i) \\ &= \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\right) dx^i \otimes dx^j = 0, \end{aligned}$$

por la igualdad de las derivadas parciales mixtas de segundo orden de una función suave.

Si  $(V, \psi)$  es otra carta local tal que  $U \cap V \neq \emptyset$ , con coordenadas locales  $\{y^1, \dots, y^n\}$ , entonces

$$\omega|_{U \cap V} = \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{|J|=k} g_J dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}$$

para algunas funciones  $g_J \in C^\infty(V)$ , relacionados con las  $f_I$  mediante fórmulas de cambio de variables. Es una consecuencia inmediata de (2.29) que

$$\sum_{|I|=k} df_I \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k} = \sum_{|J|=k} dg_J \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}$$

en  $\mathcal{A}^{k+1}(U \cap V)$ . (Se puede verificar esta igualdad directamente por fórmulas de cambio de variables.) Al evaluar esta forma en cualquier punto  $p \in U \cap V$ , se obtiene un

elemento  $(d\omega)|_p \in \Lambda^{k+1}T_p^*M$  que no depende de las cartas locales. Se ha construido una única sección suave  $p \mapsto (d\omega)|_p$  en  $\Gamma(M, \Lambda^{k+1}T^*M)$ , es decir, una forma diferencial  $d\omega \in \mathcal{A}^{k+1}(M)$ . Por su construcción,  $\omega \mapsto d\omega$  es una derivación impar que cumple las propiedades (a) y (b) del enunciado.  $\square$

**Definición 2.28.** La aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal  $d: \mathcal{A}^\bullet(M) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(M)$  de grado +1 dada por el Teorema 2.27 se llama la **derivación exterior** sobre el álgebra graduado  $\mathcal{A}^\bullet(M)$ . Este operador es una *derivación impar*:

$$d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\#\omega} \omega \wedge d\eta. \quad (2.30)$$

La forma diferencial  $d\omega$  es la **derivada exterior** de  $\omega$ .  $\diamond$

► Una manera alternativa de construir la derivación exterior no requiere el uso de cálculos locales. Es cuestión de exhibir las fórmulas algebraicas que evalúan  $d\omega$  sobre un juego de campos vectoriales. Si  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ , dichas fórmulas para  $d\omega$  deben ser funciones  $C^\infty$ -multilineales y alternantes, de grado  $(k + 1)$ , de elementos de  $\mathfrak{X}(M)$ .

**Proposición 2.29.** Si  $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$ , su derivada exterior cumple la fórmula:

$$d\alpha(X, Y) = X \alpha(Y) - Y \alpha(X) - \alpha([X, Y]). \quad (2.31)$$

*Demostración.* Está claro que el lado derecho de (2.31) es  $\mathbb{R}$ -bilineal y alternante como función de  $(X, Y)$ . Falta comprobar que sea bilineal sobre el anillo  $C^\infty(M)$ .

Al sustituir  $X \mapsto fX$  en el lado derecho, se obtiene  $fX \alpha(Y) - Y \alpha(fX) - \alpha([fX, Y])$ . El campo vectorial  $[fX, Y]$  obedece

$$\begin{aligned} [fX, Y](g) &= (fX)(Yg) - Y(fXg) \\ &= fX(Yg) - (Yf)(Xg) - fY(Xg) \\ &= f[X, Y](g) - (Yf)(Xg), \end{aligned}$$

y al eliminar  $g$ , se obtiene una fórmula útil, ya visto en el Ejercicio 1.18:

$$[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X \quad \text{en } \mathfrak{X}(M). \quad (2.32)$$

Ahora se calcula:

$$\begin{aligned} fX \alpha(Y) - Y \alpha(fX) - \alpha([fX, Y]) \\ &= fX \alpha(Y) - Y(f \alpha(X)) - \alpha(f[X, Y] - (Yf)X) \\ &= fX \alpha(Y) - (Yf) \alpha(X) - fY \alpha(X) - f \alpha([X, Y]) + (Yf) \alpha(X) \\ &= f(X \alpha(Y) - Y \alpha(X) - \alpha([X, Y])). \end{aligned}$$

De igual modo, se obtiene

$$X \alpha(gY) - gY \alpha(X) - \alpha([X, gY]) = g(X \alpha(Y) - Y \alpha(X) - \alpha([X, Y])).$$

Esto verifica que el lado derecho de (2.31) es una 2-forma evaluada en  $(X, Y)$ .

Para comprobar que esta 2-forma es igual a  $d\alpha$  (es decir, que ellas determinan el mismo elemento de  $\Lambda^2 T_p^* M$  para cada  $p \in M$ ), basta chequear que ambas 2-formas coinciden en el dominio de cada carta local. Para tal efecto, se puede suponer que  $M$  posee una sola carta local en donde  $\alpha = f_j dx^j$ . En particular,

$$d\alpha = \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x^i} dx^i \wedge dx^j = \sum_{i<j} \left( \frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j} \right) dx^i \wedge dx^j. \quad (2.33)$$

Por la  $C^\infty(M)$ -bilinealidad, se puede suponer también que  $X, Y$  son campos básicos, es decir,  $X = \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $Y = \frac{\partial}{\partial x^j}$ . Fíjese que *los campos básicos conmutan*, porque

$$\left[ \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right] (f) = \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = 0. \quad (2.34)$$

La evaluación de  $d\alpha$  en campos básicos sale directamente de (2.33):

$$d\alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial f_j}{\partial x^i} - \frac{\partial f_i}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i} \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^j} \right) - \frac{\partial}{\partial x^j} \alpha \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right).$$

Los dos lados de (2.31) coinciden en este caso especial, y por ende en general.  $\square$

Hay fórmulas análogas para las derivadas exteriores de formas de grado superior, las cuales se pueden comprobar al seguir el patrón de la última demostración. Por ejemplo, si  $\beta \in \mathcal{A}^2(M)$ , entonces

$$\begin{aligned} d\beta(X, Y, Z) &= X \beta(Y, Z) + Y \beta(Z, X) + Z \beta(X, Y) \\ &\quad - \beta([X, Y], Z) - \beta([Y, Z], X) - \beta([Z, X], Y). \end{aligned} \quad (2.35)$$

La receta general “libre de coordenadas” para la derivada exterior de una  $k$ -forma es la siguiente:

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}). \end{aligned} \quad (2.36)$$

**Proposición 2.30.** *La derivación exterior es equivariante bajo preimágenes; si  $\tau: M \rightarrow N$  es una aplicación suave y si  $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(N)$ , entonces*

$$\boxed{d(\tau^*\omega) = \tau^*(d\omega)}. \quad (2.37)$$

*Demostración.* Considérese primero el caso  $k = 0$ ,  $\omega = g \in C^\infty(N)$ . Si  $p \in M$  y  $X_p \in T_pM$ , entonces por (2.23), (2.26) y la Definición 1.38:

$$\begin{aligned} \tau^*(dg)_p(X_p) &= (dg)_{\tau(p)}(T_p\tau(X_p)) = T_p\tau(X_p)(g) \\ &= X_p(g \circ \tau) = X_p(\tau^*g) = d(\tau^*g)_p(X_p), \end{aligned}$$

así que  $\tau^*(dg)(X) = d(\tau^*g)(X)$  para  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ; es decir,  $\tau^*(dg) = d(\tau^*g)$  en  $\mathcal{A}^1(M)$ .

Si ahora  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$  con  $k \geq 1$ , se debe mostrar que  $d(\tau^*\omega)_p = \tau^*(d\omega)_p$  para cada  $p \in M$ . En vista del Lema 2.26, basta comprobar la relación (2.37) para  $k$ -formas en el dominio de una carta local. Dado  $p \in M$ , sea  $(V, \psi)$  una carta local de  $N$  con  $\tau(p) \in V$ , cuyas coordenadas locales son  $\{y^1, \dots, y^m\}$ . Tómesese  $\omega := \sum_{|J|=k} g_J dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}$  donde cada  $g_J \in C^\infty(V)$ . Entonces, por la Proposición 2.23,

$$\tau^*\omega = \sum_{|J|=k} (\tau^*g_J) \tau^*(dy^{j_1}) \wedge \dots \wedge \tau^*(dy^{j_k}) = \sum_{|J|=k} (g_J \circ \tau) dh^{j_1} \wedge \dots \wedge dh^{j_k}$$

al poner  $h^{j_r} := y^{j_r} \circ \tau$  para  $r = 1, \dots, k$ . Entonces

$$\begin{aligned} d(\tau^*\omega) &= \sum_{|J|=k} d(g_J \circ \tau) \wedge dh^{j_1} \wedge \dots \wedge dh^{j_k} \\ &= \sum_{|J|=k} d(\tau^*g_J) \wedge dh^{j_1} \wedge \dots \wedge dh^{j_k} \\ &= \sum_{|J|=k} \tau^*(dg_J) \wedge \tau^*(dy^{j_1}) \wedge \dots \wedge \tau^*(dy^{j_k}) \\ &= \tau^*\left(\sum_{|J|=k} dg_J \wedge dy^{j_1} \wedge \dots \wedge dy^{j_k}\right) = \tau^*(d\omega), \end{aligned}$$

en donde la tercera igualdad requiere el caso  $k = 0$ , ya comprobada.  $\square$

**Ejemplo 2.31.** Sea  $\tau: (0, \infty) \times (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  la función

$$(x, y) \equiv \tau(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta),$$

que efectúa el cambio de coordenadas polares a cartesianas en  $\mathbb{R}^2$ . (Fíjese que esta  $\tau$  no es sobreyectiva, porque su imagen omite el semieje  $x$  negativo.)

Como consecuencia inmediata, se obtiene

$$\begin{aligned}\tau^*(dx) &= d(x \circ \tau) = d(r \cos \theta) = \cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta, \\ \tau^*(dy) &= d(y \circ \tau) = d(r \operatorname{sen} \theta) = \operatorname{sen} \theta dr + r \cos \theta d\theta,\end{aligned}$$

pues  $d$  es una derivación impar.<sup>7</sup> La 2-forma de área  $dx \wedge dy$  tiene la siguiente expresión (archiconocida) en coordenadas polares:

$$\begin{aligned}\tau^*(dx \wedge dy) &= \tau^*(dx) \wedge \tau^*(dy) \\ &= (\cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta) \wedge (\operatorname{sen} \theta dr + r \cos \theta d\theta) \\ &= r \cos^2 \theta dr \wedge d\theta - r \operatorname{sen}^2 \theta d\theta \wedge dr \\ &= r dr \wedge d\theta,\end{aligned}$$

porque  $dr \wedge dr = 0$ ,  $d\theta \wedge d\theta = 0$  y  $d\theta \wedge dr = -dr \wedge d\theta$  por antisimetría.  $\diamond$

**Ejemplo 2.32.** Sea  $i: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  la inclusión de la esfera en  $\mathbb{R}^3$  como subvariedad. El pullback de la forma de volumen  $dx \wedge dy \wedge dz$  en  $\mathbb{R}^3$  es una 3-forma sobre  $\mathbb{S}^2$  y por lo tanto es nula, porque  $3 > \dim \mathbb{S}^2$ . Se debe buscar, entonces, una 2-forma  $\sigma \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^3)$  – en las coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$  – cuyo pullback es la 2-forma conocida de área:  $\operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\phi \in \mathcal{A}^2(\mathbb{S}^2)$ , expresada en las coordenadas esféricas usuales:

$$x = \operatorname{sen} \theta \cos \phi, \quad y = \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi, \quad z = \cos \theta.$$

Estas fórmulas son abreviaturas para  $i^*(x) := \operatorname{sen} \theta \cos \phi$ , etc.

Nótese que

$$\begin{aligned}i^*(dx \wedge dy) &= (\cos \theta \cos \phi d\theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi d\phi) \wedge (\cos \theta \operatorname{sen} \phi d\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \phi d\phi) \\ &= \cos \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\phi.\end{aligned}$$

Por cálculos similares, se deduce que

$$\begin{aligned}i^*(x dy \wedge dz) &= (\operatorname{sen} \theta \cos \phi)(\cos \theta \operatorname{sen} \phi d\theta + \operatorname{sen} \theta \cos \phi d\phi) \wedge (-\operatorname{sen} \theta d\theta) \\ &= \operatorname{sen}^3 \theta \cos^2 \phi d\theta \wedge d\phi,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}i^*(y dz \wedge dx) &= (\operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi)(-\operatorname{sen} \theta d\theta) \wedge (\cos \theta \cos \phi d\theta - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi d\phi) \\ &= \operatorname{sen}^3 \theta \operatorname{sen}^2 \phi d\theta \wedge d\phi,\end{aligned}$$

$$i^*(z dx \wedge dy) = \cos \theta i^*(dx \wedge dy) = \cos^2 \theta \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\phi.$$

Al sumar estas tres expresiones, se obtiene el área esférica en coordenadas cartesianas:

$$\boxed{\sigma := x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy} \implies \boxed{i^*\sigma = \operatorname{sen} \theta d\theta \wedge d\phi.} \quad \diamond$$

<sup>7</sup>Se suele escribir estas fórmulas y el resultado final sin mención explícita de la función  $\tau$ , de este modo:  $dx = \cos \theta dr - r \operatorname{sen} \theta d\theta$ ,  $dy = \operatorname{sen} \theta dr + r \cos \theta d\theta$ ; y luego  $dx \wedge dy = r dr \wedge d\theta$ .

## 2.5. La derivada de Lie

**Definición 2.33.** Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo vectorial *completo* sobre una variedad diferencial  $M$ ; el flujo de  $X$ , según la Definición 1.67, determina un grupo uniparamétrico  $\{\alpha_t : t \in \mathbb{R}\}$  de difeomorfismos de  $M$ . Si  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$  es una  $k$ -forma diferencial sobre  $M$ , su **derivada de Lie** con respecto a  $X$  es la  $k$ -forma  $\mathcal{L}_X\omega$  dada por:

$$\mathcal{L}_X\omega := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_t^*\omega = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\alpha_t^*\omega - \omega}{t}. \quad (2.38a)$$

En cada punto  $p \in M$ , su valor  $(\mathcal{L}_X\omega)_p \in \Lambda^k T_p^*M$  satisface:

$$(\mathcal{L}_X\omega)_p((X_1)_p, \dots, (X_k)_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega_{\alpha_t(p)}(T_p\alpha_t(X_1)_p, \dots, T_p\alpha_t(X_k)_p). \quad (2.38b)$$

La segunda fórmula sigue válida para un campo vectorial incompleto, con  $\mathcal{D}_X \neq \mathbb{R} \times M$ , porque en todo caso, según (1.33), el flujo de  $X$  define difeomorfismos locales  $\alpha_t$  en un vecindario de  $p$ , para  $-\varepsilon(p) < t < \varepsilon(p)$ . Por lo tanto, la derivada de Lie  $\mathcal{L}_X$  está definido para cualquier  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , no necesariamente completo.  $\diamond$

Para simplificar la exposición, en estos apuntes se considerará  $\mathcal{L}_X$  solo para campos vectoriales completos; por la Proposición 1.63, esto no conlleva pérdida de generalidad cuando  $M$  es compacta.

**Lema 2.34.** Si  $f \in \mathcal{A}^0(M) = C^\infty(M)$ , entonces  $\mathcal{L}_X f = Xf$ .

*Demostración.* Cabe recordar que  $\alpha_t^* f = f \circ \alpha_t$  para  $f \in C^\infty(M)$ ; luego, para cada  $p \in M$ , la Proposición 1.68 y la fórmula (1.35) muestran que

$$\mathcal{L}_X f(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_t^* f(p) \equiv \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(\alpha_t(p)) = Xf(p). \quad \square$$

**Proposición 2.35.** La derivada de Lie de formas diferenciales con respecto a un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  cumple las siguientes identidades, para  $\omega, \eta \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ :

$$(a) \quad \mathcal{L}_X(\omega + \eta) = \mathcal{L}_X\omega + \mathcal{L}_X\eta; \quad (2.39a)$$

$$(b) \quad \mathcal{L}_X(f\omega) = (Xf)\omega + f\mathcal{L}_X\omega; \quad (2.39b)$$

$$(c) \quad \mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X\eta; \quad (2.39c)$$

$$(d) \quad \mathcal{L}_X(d\omega) = d(\mathcal{L}_X\omega). \quad (2.39d)$$

*Demostración.* La aditividad (a) es obvia por las fórmulas (2.38), porque  $\alpha_t^*(\omega + \eta) = \alpha_t^*\omega + \alpha_t^*\eta$  para cada  $t$ . La regla de Leibniz (b) es un caso particular de la identidad (c).

Nótese que las propiedades (a) y (c) dicen que  $\mathcal{L}_X$  es una *derivación par* de  $\mathcal{A}^\bullet(M)$ .

La propiedad (c) es una consecuencia de la equivariancia del producto exterior bajo pullbacks, dada por la Proposición 2.23:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha_t^*(\omega \wedge \eta) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha_t^*\omega \wedge \alpha_t^*\eta \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha_t^*\omega \wedge \eta + \omega \wedge \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha_t^*\eta = \mathcal{L}_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X\eta.\end{aligned}$$

La propiedad (d) sigue de la equivariancia de la derivada exterior, Proposición 2.30:

$$\mathcal{L}_X(d\omega) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha_t^*(d\omega) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d(\alpha_t^*\omega) = d\left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \alpha_t^*\omega\right) = d(\mathcal{L}_X\omega). \quad \square$$

**Ejemplo 2.36.** Si  $M = \mathbb{R}^2$ , considérese la 2-forma  $\omega$  y el campo vectorial  $X$  dadas por

$$\omega = (x^2 + y^2) dx \wedge dy, \quad X = -y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Las reglas de la Proposición 2.35 permiten calcular:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X\omega &= X(x^2 + y^2) dx \wedge dy + (x^2 + y^2) (\mathcal{L}_X(dx) \wedge dy + dx \wedge \mathcal{L}_X(dy)) \\ &= (-2yx + 2xy) dx \wedge dy + (x^2 + y^2) (d(Xx) \wedge dy + dx \wedge d(Xy)) \\ &= 0 + (x^2 + y^2) (-dy \wedge dy + dx \wedge dx) = 0.\end{aligned}$$

Ahora la condición  $\mathcal{L}_X\omega = 0$  es una *ecuación diferencial*, la cual, por la fórmula (2.38), es equivalente a la condición de que  $\alpha_t^*\omega = \omega$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto,  $\mathcal{L}_X\omega = 0$  expresa la *invariancia* de la forma  $\omega$  bajo el flujo de  $X$ . En el caso aquí ejemplificado, este flujo es *el grupo de rotaciones* alrededor del origen de  $\mathbb{R}^2$ ; es evidente por inspección que  $\omega$  es invariante bajo tales rotaciones de las coordenadas cartesianas.<sup>8</sup>  $\diamond$

Hay una relación notable entre las tres derivaciones del álgebra graduada  $\mathcal{A}^\bullet(M)$  consideradas hasta ahora: la derivada exterior  $d$ , de grado (+1); la contracción  $i_X$  con un campo vectorial  $X$ , de grado (-1); y ahora la derivada de Lie  $\mathcal{L}_X$ , de grado 0. (Obsérvese que las fórmulas (2.38) conservan el grado de formas diferenciales.)

**Proposición 2.37.** Las derivadas de Lie  $\mathcal{L}_X$  cumplen la *identidad de Cartan*:

$$\boxed{\mathcal{L}_X\omega = i_X(d\omega) + d(i_X\omega)} \quad (2.40)$$

para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ .

<sup>8</sup>Este generador  $-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y}$  del grupo de rotaciones del plano es un operador de *momento angular*.

*Demostración.* La prueba es inductiva: se comprobará la identidad de Cartan (2.40) por inducción sobre el grado de  $\omega$ .

En primer lugar, si  $\omega = f \in \mathcal{A}^0(M)$ , entonces  $\mathcal{L}_X f = Xf$  por el Lema 2.34. Por otro lado, vale  $i_X(df) = df(X) = Xf$ , mientras  $i_X f = 0$  por regla, según la Definición 2.20.

En segundo lugar, si  $\omega = \beta \in \mathcal{A}^1(M)$ , tómesese  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ; entonces, por (2.24):

$$\mathcal{L}_X \beta(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_t^* \beta(Y) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \beta(\alpha_{t*} Y) \circ \alpha_t. \quad (2.41)$$

Ahora, si  $h \in C^\infty(M)$ , se puede adaptar el Lema 1.19 (de Hadamard) para escribir

$$h \circ \alpha_t =: h + t g_t \quad \text{para todo } t \in \mathbb{R},$$

donde la función  $t \mapsto g_t(p) : \mathbb{R} \rightarrow M$  es suave, para cada  $p \in M$ . En efecto, se define

$$g_t(p) := \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} h(\alpha_{st}(p)) ds,$$

y el teorema fundamental del cálculo muestra que

$$t g_t(p) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial s} h(\alpha_{st}(p)) t ds = \int_0^t \frac{\partial}{\partial u} h(\alpha_u(p)) du = h(\alpha_t(p)) - h(p).$$

Además, la curva  $t \mapsto \alpha_t(p)$  es la curva integral del campo vectorial  $X$  que pasa por  $p$ , así que  $g_0(p) = \lim_{t \rightarrow 0} g_t(p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} h(\alpha_t(p)) = Xh(p)$ .

La Definición 1.57 de la imagen directa  $\alpha_{t*} Y$  y el Lema 2.34 implican que

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \alpha_{t*} Y(h) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(h \circ \alpha_t) \circ \alpha_{-t} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Yh \circ \alpha_{-t} + t Yg_t \circ \alpha_{-t}) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (Yh \circ \alpha_{-t}) + \lim_{t \rightarrow 0} (Yg_t \circ \alpha_{-t}) \\ &= \mathcal{L}_{-X}(Yh) + Y(Xh) = -X(Yh) + Y(Xh) = -[X, Y](h). \end{aligned}$$

Por lo tanto, vale  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\alpha_{t*} Y) = -[X, Y]$ . Al enchufar esto en (2.41), se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X \beta(Y) &= -\beta([X, Y]) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \beta(Y) \circ \alpha_t \\ &= -\beta([X, Y]) + X \beta(Y) = d\beta(X, Y) + Y \beta(X) \\ &= d\beta(X, Y) + Y(i_X \beta) = i_X(d\beta)(Y) + d(i_X \beta)(Y), \end{aligned} \quad (2.42)$$

donde se ha empleado la fórmula (2.31) para la 2-forma  $d\beta$ . Entonces se deduce que  $\mathcal{L}_X \beta = i_X(d\beta) + d(i_X \beta)$  en  $\mathcal{A}^1(M)$ .

Por último, supóngase que la proposición es válida para  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$  – para hacer una inducción sobre  $k$ . Si  $\beta \in \mathcal{A}^1(M)$ , fíjese que  $i_X\beta$ ,  $\beta$ ,  $d\beta$  tienen grados respectivos 0, 1 y 2. Entonces las derivaciones impares  $d$  e  $i_X$  cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} d(i_X\beta \wedge \omega) &= d(i_X\beta) \wedge \omega + i_X\beta \wedge d\omega, \\ d(\beta \wedge \omega) &= d\beta \wedge \omega - \beta \wedge d\omega, \\ i_X(\beta \wedge \omega) &= i_X\beta \wedge \omega - \beta \wedge i_X\omega, \\ i_X(d\beta \wedge \omega) &= i_X(d\beta) \wedge \omega + d\beta \wedge i_X\omega. \end{aligned}$$

Como  $\mathcal{L}_X$  es una derivación par, se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X(\beta \wedge \omega) &= \mathcal{L}_X\beta \wedge \omega + \beta \wedge \mathcal{L}_X\omega \\ &= (i_X(d\beta) + d(i_X\beta)) \wedge \omega + \beta \wedge (i_X(d\omega) + d(i_X\omega)) \\ &= i_X(d\beta \wedge \omega) - d\beta \wedge i_X\omega + \beta \wedge d(i_X\omega) \\ &\quad + d(i_X\beta \wedge \omega) - i_X\beta \wedge d\omega + \beta \wedge i_X(d\omega) \\ &= i_X(d\beta \wedge \omega) - d(\beta \wedge i_X\omega) + d(i_X\beta \wedge \omega) - i_X(\beta \wedge d\omega) \\ &= i_X(d(\beta \wedge \omega)) + d(i_X(\beta \wedge \omega)). \end{aligned}$$

Cada elemento de  $\mathcal{A}^{k+1}(M)$  es una suma finita de formas de tipo  $\beta \wedge \omega$ . Entonces (2.40) es válida para elementos de  $\mathcal{A}^{k+1}(M)$ ; la proposición sigue por inducción sobre  $k$ .  $\square$

► La derivada de Lie  $\mathcal{L}_X$  define un operador, no solamente sobre formas, sino sobre un tensor de cualquier especie, como la derivada en  $t = 0$  de una preimagen del tensor bajo el flujo de  $X$ . Dicha derivada será nula si (y solo si) el flujo de  $X$  deja el tensor invariante. Toda vez que el campo vectorial  $X$  sea completo, se define  $\mathcal{L}_X$  como sigue.

En tensores covariantes cualesquiera se define la imagen inversa  $\alpha_t^*$  como en la Definición 2.22; en tensores contravariantes se reemplaza  $\alpha_t^*$  por la imagen directa  $(\alpha_{-t})_*$  bajo el flujo en reverso  $t \mapsto \alpha_{-t}$  generado por  $-X$ . El cambio de signo es necesario pues las acciones de  $\alpha_t^*$  y  $\alpha_{t*}$  son contragredientes, como evidencia la fórmula (2.24).

**Definición 2.38.** Sea  $X \in \mathfrak{X}(M)$  un campo completo, con flujo  $\{\alpha_t \in \text{Diff}(M) : t \in \mathbb{R}\}$ . Si  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  es otro campo vectorial, su **derivada de Lie**  $\mathcal{L}_X Y \in \mathfrak{X}(M)$  se define como

$$\mathcal{L}_X Y := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\alpha_{-t})_* Y. \quad \diamond$$

**Lema 2.39.** Si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces  $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ .

*Demostración.* Para cada  $f \in C^\infty(M)$ , las Definiciones 1.57 y 2.33 muestran que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X Y(f) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Y(f \circ \alpha_{-t}) \circ \alpha_t = Y \left( \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f \circ \alpha_{-t} \right) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} Yf \circ \alpha_t \\ &= Y(\mathcal{L}_{-X} f) + \mathcal{L}_X(Yf) \\ &= Y(-Xf) + X(Yf) = [X, Y]f.\end{aligned}\quad \square$$

En el desarrollo del cálculo (2.42), se obtuvo otra fórmula útil:

$$X \beta(Y) = \mathcal{L}_X \beta(Y) + \beta([X, Y]), \quad (2.43)$$

para todo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $\beta \in \mathcal{A}^1(M)$ . Fíjese que esta es otra especie de regla de Leibniz, pues dice que  $\mathcal{L}_X(\beta(Y)) = \mathcal{L}_X \beta(Y) + \beta(\mathcal{L}_X Y)$ .

**Proposición 2.40.** Si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\beta \in \mathcal{A}^1(M)$ , se verifica:

$$\boxed{\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y \beta) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X \beta) = \mathcal{L}_{[X, Y]} \beta.} \quad (2.44)$$

*Demostración.* Empleando la identidad de Cartan (2.40), la fórmula (2.31), la identidad de Jacobi (1.25b) y la fórmula (2.43) varias veces, se calcula, para cada  $Z \in \mathfrak{X}(M)$ :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{[X, Y]} \beta(Z) &= i_{[X, Y]}(d\beta)(Z) + d(i_{[X, Y]} \beta)(Z) = d\beta([X, Y], Z) + Z(i_{[X, Y]} \beta) \\ &= [X, Y](\beta(Z)) - Z \beta([X, Y]) - \beta([X, Y], Z) + Z \beta([X, Y]) \\ &= X(Y \beta(Z)) - Y(X \beta(Z)) + \beta([Y, Z], X) + \beta([Z, X], Y) \\ &= X(\mathcal{L}_Y \beta(Z) + \beta([Y, Z])) - Y(\mathcal{L}_X \beta(Z) + \beta([X, Z])) \\ &\quad - \beta([X, [Y, Z]]) + \beta([Y, [X, Z]]) \\ &= X(\mathcal{L}_Y \beta(Z)) + \mathcal{L}_X \beta([Y, Z]) - Y(\mathcal{L}_X \beta(Z)) - \mathcal{L}_Y \beta([X, Z]) \\ &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y \beta)(Z) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X \beta)(Z).\end{aligned}\quad \square$$

**Corolario 2.41.** Si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ , se verifica:

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y \omega) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X \omega) = \mathcal{L}_{[X, Y]} \omega.$$

*Demostración.* Otra consecuencia de la identidad de Cartan (2.40) es la  $\mathbb{R}$ -linealidad de la correspondencia  $X \mapsto \mathcal{L}_X \beta$ . Por lo tanto, se puede suponer sin perder generalidad que  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$  para algún  $k$ . El caso  $k = 0$  es un resultado inmediato del Lema 2.34: si  $f \in C^\infty(M)$ , entonces

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y f) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X f) = X(Yf) - Y(Xf) = [X, Y]f = \mathcal{L}_{[X, Y]} f.$$

El caso  $k = 1$  es la Proposición 2.40 anterior.

Escríbase  $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] := \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X$ . Si  $\beta \in \mathcal{A}^1(M)$  y  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](\beta \wedge \omega) &= \mathcal{L}_X(\mathcal{L}_Y\beta \wedge \omega + \beta \wedge \mathcal{L}_Y\omega) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_X\beta \wedge \omega + \beta \wedge \mathcal{L}_X\omega) \\ &= \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\beta \wedge \omega + \mathcal{L}_Y\beta \wedge \mathcal{L}_X\omega + \mathcal{L}_X\beta \wedge \mathcal{L}_Y\omega + \beta \wedge \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\omega \\ &\quad - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\beta \wedge \omega - \mathcal{L}_X\beta \wedge \mathcal{L}_Y\omega - \mathcal{L}_Y\beta \wedge \mathcal{L}_X\omega - \beta \wedge \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\omega \\ &= \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\beta \wedge \omega - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\beta \wedge \omega + \beta \wedge \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\omega - \beta \wedge \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\omega \\ &= \mathcal{L}_{[X,Y]}\beta \wedge \omega + \beta \wedge [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\omega. \end{aligned}$$

Si  $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]\omega = \mathcal{L}_{[X,Y]}\omega$  para  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ , el despliegue anterior implica que

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](\beta \wedge \omega) = \mathcal{L}_{[X,Y]}\beta \wedge \omega + \beta \wedge \mathcal{L}_{[X,Y]}\omega = \mathcal{L}_{[X,Y]}(\beta \wedge \omega).$$

Cada elemento de  $\mathcal{A}^{k+1}(M)$  es una suma finita de tales  $\beta \wedge \omega$ . El resultado sigue por inducción sobre  $k$ .  $\square$

Este corolario dice que la correspondencia  $\mathbb{R}$ -lineal  $X \mapsto \mathcal{L}_X$ , que lleva  $\mathfrak{X}(M)$  en el espacio vectorial  $\text{Der}^+(\mathcal{A}^\bullet(M))$  de derivaciones pares sobre formas diferenciales, es un homomorfismo de álgebras de Lie. En efecto, el conmutador de dos derivaciones pares es otra derivación par (véase la demostración de la Proposición 1.56), así que  $\text{Der}^+(\mathcal{A}^\bullet(M))$  es un álgebra de Lie cuyo corchete es el conmutador. Por lo tanto, se puede abreviar la conclusión del Corolario 2.41 como sigue:

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]} \quad \text{en } \text{Der}^+(\mathcal{A}^\bullet(M)), \quad \text{para todo } X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Hay una fórmula análoga en  $\text{Der}^+(\mathfrak{X}(M))$ :

$$\mathcal{L}_X(\mathcal{L}_YZ) - \mathcal{L}_Y(\mathcal{L}_XZ) = \mathcal{L}_{[X,Y]}Z, \quad \text{para todo } X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

En vista del Lema 2.39, esto no es otra cosa que una reformulación de la *identidad de Jacobi*, ya notada en la fórmula (1.27b).

## 2.6. Formas cerradas y exactas

**Definición 2.42.** Sea  $M$  una variedad diferencial. Una forma  $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$  es **cerrada** si  $d\omega = 0$ . (En particular, si  $\dim M = n$ , cualquier  $n$ -forma es cerrada.)

Se dice que  $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$  es **exacta** si hay otra forma  $\eta \in \mathcal{A}^\bullet(M)$  tal que  $\omega = d\eta$ .

Una forma exacta es también cerrada, ya que  $d(d\eta) = 0$  por el Teorema 2.27.  $\diamond$

**Ejemplo 2.43.** En algunas variedades, hay formas cerradas que no son exactas. Considérese la variedad bidimensional  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ , con la 1-forma

$$\alpha := -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy.$$

Los coeficientes de  $\alpha$  son funciones singulares en el origen; no es posible extender  $\alpha$  a una forma diferencial sobre  $\mathbb{R}^2$ . Un cálculo directo muestra que  $\alpha$  es cerrada:

$$\begin{aligned} d\alpha &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) dy \wedge dx + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right) dx \wedge dy \\ &= \left( \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) dx \wedge dy = 0. \end{aligned}$$

Si hubiera una 0-forma  $f \in C^\infty(M)$  tal que  $\alpha = df = (\partial f/\partial x) dx + (\partial f/\partial y) dy$ , sería  $\partial f/\partial y = x/(x^2 + y^2)$ , así que  $f(x, y) \equiv \text{arctg}(y/x) + c(x)$ , al menos en el semiplano  $x > 0$ , para alguna función suave  $c(x)$ . Al derivar esta relación con respecto a  $x$ , se obtiene  $\partial f/\partial x = -y/(x^2 + y^2) + c'(x)$ , por lo cual  $c' \equiv 0$  y por ende  $c$  es una constante.

La función  $f(x, y) = \text{arctg}(y/x) + c$ , definida inicialmente en el semiplano  $x > 0$ , puede extenderse al plano cortado  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) : x \leq 0\}$ , en el cual la igualdad  $\alpha = df$  sigue válida. Pero no es posible extender  $f$  continuamente a  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ; por ejemplo,  $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} f(-1, \varepsilon) = c + \pi$  pero  $\lim_{\varepsilon \uparrow 0} f(-1, \varepsilon) = c - \pi$ . Luego no hay  $f \in C^\infty(M)$  alguna tal que  $\alpha = df$ ; la forma cerrada  $\alpha$  no es exacta.  $\diamond$

La obstrucción a la exactitud de  $\alpha$  en el Ejemplo 2.43 es topológica: la variedad  $M$  tiene un “agujero” en el origen de  $\mathbb{R}^2$ , y la función de arcotangente toma valores distintos en los extremos de un circuito circular que encierra el agujero. Para poder afirmar que en una determinada variedad cada forma cerrada es exacta, se debe imponer una condición topológica que elimina tales agujeros.

**Definición 2.44.** Una parte  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  es **convexa** si para cada par de puntos  $x, y \in A$ , el conjunto  $A$  incluye el segmento  $[x, y] := \{(1 - t)x + ty : 0 \leq t \leq 1\}$ .

Dícese que otra parte  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  es **estelar** desde  $z \in B$  si para cada  $y \in B \setminus \{z\}$ , el conjunto  $B$  incluye el segmento  $[z, y]$ . Por ejemplo, el plano cortado del Ejemplo 2.43 es estelar desde  $z = (1, 0)$ ; por otra parte,  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$  no es estelar, ya que cada segmento  $[x, -x]$  atraviesa el agujero en el origen. Fíjese que  $A$  es convexo si y solo si es estelar desde cualquiera de sus puntos.  $\diamond$

**Definición 2.45.** Una variedad  $M$  es **contractible** si hay un punto  $z \in M$  y una función suave  $F: [0, 1] \times M \rightarrow M$  tal que  $\underline{F(0, p)} \equiv z$  y  $\underline{F(1, p)} = p$  para todo  $p \in M$ .

Al poner  $f_t(p) := F(t, p)$ , se define una familia de funciones suaves  $f_t: M \rightarrow M$ , para  $0 \leq t \leq 1$ , tales que  $f_1 = 1_M$  mientras  $f_0 = c_z$  es la función constante cuya imagen es el punto  $z$ . Dícese que  $F$  es una **homotopía** (suave) entre las funciones  $c_z$  e  $1_M$ .

Si un abierto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es estelar desde  $z \in U$ , entonces  $U$  es contractible, porque  $F(t, x) := (1-t)z + tx$  define una homotopía suave entre  $c_z$  e  $1_U$ .  $\diamond$

**Teorema 2.46** (Lema de Poincaré). *Cada forma cerrada sobre  $\mathbb{R}^n$  es exacta. En particular, si  $\omega \in \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n)$  cumple  $d\omega = 0$ , entonces existe  $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\omega = d\eta$ .*

*Demostración.* Las coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^n$  son coordenadas locales para la sola carta de  $\mathbb{R}^n$ . Cualquier  $\omega \in \mathcal{A}^k(\mathbb{R}^n)$ , no necesariamente cerrada, se escribe como

$$\omega = \sum_{|I|=k} f_I dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \quad \text{con cada } f_I \in C^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Para cada  $I \subseteq \{1, \dots, n\}$  con  $|I| = k$ , defínase una forma  $\sigma_I \in \mathcal{A}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$  por

$$\underline{\sigma}_I := \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} x^{i_r} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{i_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

La derivada exterior de cada sumando es  $dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$ , así que

$$d\sigma_I = k dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}.$$

Si  $k \in \{1, \dots, n\}$ , defínase un operador  $\mathbb{R}$ -lineal  $E_{k-1}: C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$  por

$$\underline{E}_{k-1} f(x) := \int_0^1 t^{k-1} f(tx) dt. \quad (2.45)$$

Este es un promedio ponderado de la función  $f$  a lo largo del segmento  $[0, x]$ . Se ve que

$$\frac{\partial}{\partial x^j} (E_{k-1} f)(x) = \int_0^1 t^k \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx) dt = E_k \left( \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) (x).$$

Ahora se puede definir una forma diferencial  $h\omega \in \mathcal{A}^{k-1}(\mathbb{R}^n)$  por la receta:

$$h\omega := \sum_{|I|=k} (E_{k-1} f_I) \sigma_I. \quad (2.46)$$

Su derivada exterior es

$$\begin{aligned} d(h\omega) &= \sum_{|I|=k} d(E_{k-1} f_I) \wedge \sigma_I + (E_{k-1} f_I) d\sigma_I \\ &= \sum_{|I|=k} \left( \sum_{j=1}^n E_k \left( \frac{\partial f_I}{\partial x^j} \right) dx^j \wedge \sigma_I + k(E_{k-1} f_I) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} \right), \end{aligned}$$

mientras

$$\begin{aligned} h(d\omega) &= h\left(\sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_I}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}\right) \\ &= \sum_{|I|=k} \sum_{j=1}^n E_k\left(\frac{\partial f_I}{\partial x^j}\right) (x^j dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k} - dx^j \wedge \sigma_I), \end{aligned}$$

Al sumar estas dos expresiones, se obtiene

$$d(h\omega) + h(d\omega) = \sum_{|I|=k} \left( k(E_{k-1} f_I) + \sum_{j=1}^n x^j E_k\left(\frac{\partial f_I}{\partial x^j}\right) \right) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}. \quad (2.47)$$

Para  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  y  $k \in \{1, \dots, n\}$ , se calcula que

$$\begin{aligned} k(E_{k-1} f)(x) + \sum_{j=1}^n x^j E_k\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)(x) &= \int_0^1 \left( kt^{k-1} f(tx) + \sum_{j=1}^n t^k x^j \frac{\partial f}{\partial x^j}(tx) \right) dt \\ &= \int_0^1 \frac{d}{dt} (t^k f(tx)) dt = t^k f(tx) \Big|_{t=0}^{t=1} = f(x). \end{aligned}$$

Al enchufar esta evaluación en (2.47), se obtiene la relación fundamental:

$$\boxed{d(h\omega) + h(d\omega) = \omega.} \quad (2.48)$$

La igualdad (2.48) no requiere que  $\omega$  sea cerrada, Ahora bien, en el caso  $d\omega = 0$ , esta ecuación se reduce a  $d(h\omega) = \omega$ , así que basta tomar  $\eta := h\omega$ .  $\square$

**Corolario 2.47.** Si  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es un abierto estelar, cada forma cerrada en  $\mathcal{A}^\bullet(U)$  es exacta.

*Demostración.* El resultado es una consecuencia inmediata de (2.48), una vez que se construye un operador lineal que la cumple,  $h: \mathcal{A}^\bullet(U) \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(U)$ , de grado  $(-1)$ .

Si  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es estelar desde 0, los integrandos en (2.45) para  $f \in C^\infty(U)$  están bien definidos, las integrales  $E_{k-1} f$  existen, y la receta (2.46) define  $h\omega \in \mathcal{A}^{k-1}(U)$ . La demostración anterior muestra que  $d(h\omega) + h(d\omega) = \omega$  para toda  $\omega \in \mathcal{A}^k(U)$ .

Más generalmente, si  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  es estelar desde  $z$ , sea  $\tau(x) := x - z$  la traslación de  $\mathbb{R}^n$  que lleva  $z$  al origen. Sea  $V := \{x - z : x \in U\}$ ; fíjese que  $V$  es estelar desde 0. Si  $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(U)$ , tómesese  $\theta := (\tau^{-1})^* \omega \in \mathcal{A}^\bullet(V)$ , así que  $\omega = \tau^* \theta$ . Entonces

$$0 = d\omega = \tau^*(d\theta) \iff d\theta = 0 \iff \theta = d\zeta \text{ para algún } \zeta \in \mathcal{A}^{k-1}(V).$$

Por lo tanto,  $d\omega = 0$  si y solo si  $\omega = d\eta$  para algún  $\eta := \tau^* \zeta \in \mathcal{A}^{k-1}(U)$ .  $\square$

La esencia de la demostración del Lema de Poincaré es la construcción de las aplicaciones  $h$  de (2.46) – una para cada  $k = 1, 2, \dots, n$  – que dan lugar a (2.48). Dada una homotopía suave  $F: [0, 1] \times M \rightarrow M$ , se puede modificar la demostración para obtener una receta para  $h$  tal que

$$d(h\omega) + h(d\omega) = f_1^* \omega - f_0^* \omega. \quad (2.49)$$

Si  $f_0$  es una función constante, vale  $f_0^* \omega = 0$ ; y si  $f_1 = 1_M$ , entonces  $f_1^* \omega = \omega$ . Por lo tanto, *el Lema de Poincaré es válido para toda variedad contractible.*

► Considérese el **campo vectorial de Euler**:

$$\boxed{Z := x^j \frac{\partial}{\partial x^j}} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n). \quad (2.50)$$

El flujo de  $Z$  es un grupo uniparamétrico  $\{\rho_t : t \in \mathbb{R}\}$  de difeomorfismos de  $\mathbb{R}^n$ , que satisface la **ecuación de Euler**:

$$\frac{d}{dt} (f \circ \rho_t) = Z(f \circ \rho_t); \quad \rho_0 = 1_{\mathbb{R}^n}.$$

Su solución única es

$$\rho_t(x) \equiv e^t x. \quad (2.51)$$

Para  $s > 0$ , la dilatación  $\rho_{\log s}: x \mapsto sx$  cumple  $f(sx) \equiv \rho_{\log s}^* f(x)$ . Entonces

$$\begin{aligned} i_Z \left( \int_0^1 \rho_{\log s}^* \omega \, ds \right) &= \sum_{|I|=k} \int_0^1 f_I(sx) i_Z(\rho_{\log s}^*(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})) \, ds \\ &= \sum_{|I|=k} \int_0^1 \left( f_I(sx) \sum_{r=1}^k (-1)^{r-1} x^{i_r} d(sx)^{i_1} \wedge \dots \wedge \widehat{d(sx)^{i_r}} \wedge \dots \wedge d(sx)^{i_k} \right) ds \\ &= \sum_{|I|=k} \left( \int_0^1 s^{k-1} f_I(sx) \, ds \right) \sigma_I = h\omega. \end{aligned}$$

Nótese, de paso, que las formas  $\sigma_I$  introducidas en la demostración del Teorema 2.46 obedecen  $\sigma_I = i_Z(dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k})$ .

El resultado del cálculo anterior puede abreviarse como  $h = i_Z \circ \int_0^1 \rho_{\log s}^* ds$ . Con  $\Omega := \int_0^1 \rho_{\log s}^* \omega \, ds$ , y luego  $d\Omega = \int_0^1 \rho_{\log s}^*(d\omega) \, ds$ , la identidad de Cartan muestra que

$$d(h\omega) + h(d\omega) = d(i_Z \Omega) + i_Z(d\Omega) = \mathcal{L}_Z \Omega.$$

Por otro lado:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_Z \Omega &= \int_0^1 \mathcal{L}_Z(\rho_{\log s}^* \omega) ds = \int_0^1 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\rho_t^* \rho_{\log s}^* \omega) ds \\
 &= \int_0^1 r \left. \frac{d}{dr} \right|_{r=1} (\rho_{\log r}^* \rho_{\log s}^* \omega) ds = \int_0^1 r \left. \frac{d}{dr} \right|_{r=1} (\rho_{\log rs}^* \omega) ds \\
 &= \int_0^1 \left. \frac{d}{du} (\rho_{\log u}^* \omega) \right|_{u=0}^{u=1} du = \rho_{\log u}^* \omega \Big|_{u=0}^{u=1} = \omega,
 \end{aligned}$$

porque  $\lim_{u \downarrow 0} \rho_{\log u}(x) = 0$  por (2.51). Se concluye que  $d(h\omega) + h(d\omega) = \omega$ .

El cálculo anterior muestra que  $\int_0^1 \rho_{\log s}^* ds$  es la *transformación inversa* de la derivada de Lie  $\mathcal{L}_Z$ . Como  $Z$  genera las *dilataciones* (2.51), este inverso es un operador integral que toma un promedio de las dilataciones por factores de escala entre 0 y 1; luego, requiere que la variedad sea un conjunto estelar donde tales dilataciones pueden actuar.

## 2.7. Suplemento: cálculo de Cartan

Lo que sigue es una transcripción de la Tabla 2.4-1 del libro: Ralph Abraham & Jerrold Marsden, *Foundations of Mechanics*, Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1978. Se trata de un resumen ejecutivo del llamado Cálculo de Cartan.

En esta tabla,  $M$  es una variedad diferencial;  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  son campos vectoriales; y  $\omega, \eta \in \mathcal{A}^\bullet(M)$  son formas diferenciales.

1. Los campos vectoriales sobre  $M$  con el corchete  $[X, Y]$  forman un álgebra de Lie; esto es,  $[X, Y]$  es  $\mathbb{R}$ -bilineal, antisimétrica, y cumple la identidad de Jacobi:

$$[[X, Y], Z] + [[Z, X], Y] + [[Y, Z], X] = 0.$$

2. Para difeomorfismos  $\tau$  y  $\sigma$ , valen  $\tau_*[X, Y] = [\tau_*X, \tau_*Y]$  y  $(\tau \circ \sigma)_*X = \tau_*\sigma_*X$ .
3. Las formas  $\mathcal{A}^\bullet(M)$  son un álgebra asociativa real con  $\wedge$  como su multiplicación. Además,  $\omega \wedge \eta = (-1)^{kl} \eta \wedge \omega$  para  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ ,  $\eta \in \mathcal{A}^l(M)$ .
4. Si  $\tau$  y  $\sigma$  son aplicaciones suaves, valen  $\tau^*(\omega \wedge \eta) = \tau^*\omega \wedge \tau^*\eta$  y  $(\tau \circ \sigma)^*\omega = \sigma^*\tau^*\omega$ .
5. La derivación exterior  $d$  es  $\mathbb{R}$ -lineal sobre formas y se cumple:

$$d(d\omega) = 0, \quad d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge d\eta \quad \text{para } \omega \text{ una } k\text{-forma.}$$

6. Para  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$  y campos vectoriales  $X_0, \dots, X_k$ , vale:

$$d\omega(X_0, \dots, X_k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j X_j(\omega(X_0, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k)) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_0, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_k).$$

7. Para  $\tau$  una aplicación suave, vale  $\tau^*(d\omega) = d(\tau^*\omega)$ .

8. (Lema de Poincaré): si  $d\omega = 0$ , entonces  $\omega$  es localmente exacta; esto es, hay un vecindario  $U$  de cada punto en el cual  $\omega = d\eta$  para algún  $\eta$ .

9.  $i_X\omega$  es  $\mathbb{R}$ -bilineal en  $X, \omega$ ; y para  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ , vale  $i_{fX}\omega = f i_X\omega = i_X(f\omega)$ . Además, vale  $i_X i_X\omega = 0$  y

$$i_X(\omega \wedge \eta) = i_X\omega \wedge \eta + (-1)^k \omega \wedge i_X\eta.$$

10. Para un difeomorfismo  $\tau: M \rightarrow N$ , vale<sup>9</sup>  $\tau^*(i_X\omega) = i_{\tau^*X}(\tau^*\omega)$ .

11.  $\mathcal{L}_X\omega = di_X\omega + i_Xd\omega$ .

12.  $\mathcal{L}_X\omega$  es  $\mathbb{R}$ -bilineal en  $X, \omega$ ; y vale  $\mathcal{L}_X(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_X\omega \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_X\eta$ .

13. Para un difeomorfismo  $\tau: M \rightarrow N$ , vale  $\tau^*(\mathcal{L}_X\omega) = \mathcal{L}_{\tau^*X}(\tau^*\omega)$ .

14.  $\mathcal{L}_X\omega(X_1, \dots, X_k) = X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{j=1}^k \omega(X_1, \dots, [X, X_j], \dots, X_k)$ .

15. Localmente, vale

$$(\mathcal{L}_X\omega)_p(v_1, \dots, v_k) = D\omega_p \cdot X_p(v_1, \dots, v_k) + \sum_{j=1}^k \omega_p(v_1, \dots, DX_p \cdot v_j, \dots, v_k).$$

16. Las siguientes identidades son válidas:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{fX}\omega &= f \mathcal{L}_X\omega + df \wedge i_X\omega, \\ \mathcal{L}_{[X,Y]}\omega &= \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y\omega - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X\omega, \\ i_{[X,Y]}\omega &= \mathcal{L}_X i_Y\omega - i_Y\mathcal{L}_X\omega, \\ \mathcal{L}_X(d\omega) &= d(\mathcal{L}_X\omega), \\ \mathcal{L}_X i_X\omega &= i_X\mathcal{L}_X\omega. \end{aligned}$$

<sup>9</sup>Aquí se denota  $\tau^*X \equiv (\tau^{-1})_*X$ .

## 2.8. Ejercicios sobre formas diferenciales

**Ejercicio 2.1.** Sea  $E$  un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial con  $\dim_{\mathbb{R}} E = n$  y sea  $\sigma : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  una forma bilineal alternante. Demostrar que hay  $g_1, \dots, g_{2r} \in E^*$ , linealmente independientes, tales que

$$\sigma = g_1 \wedge g_2 + g_3 \wedge g_4 + \dots + g_{2r-1} \wedge g_{2r}.$$

[[ Indicación: Si  $\sigma \neq 0$ , hay vectores  $v_1, v_2 \in E$  tales que  $\sigma(v_1, v_2) \neq 0$ . Demostrar que hay  $g_1, g_2 \in E^*$  con  $g_1(v_1) = g_2(v_2) = 1$ ,  $g_1(v_2) = g_2(v_1) = 0$ . ]]

Calcular  $\sigma^{\wedge r} := \sigma \wedge \dots \wedge \sigma$  ( $r$  veces) y verificar que  $\sigma^{\wedge r} \neq 0$ ,  $\sigma^{\wedge(r+1)} = 0$ .

**Ejercicio 2.2.** La diferencial de una función suave  $f \in C^\infty(M)$  se define como la evaluación  $df : X \mapsto Xf$  para todo campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Comprobar que  $df$  es una 1-forma sobre  $M$ , al demostrar que  $df : \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$  es  $C^\infty(M)$ -lineal.

**Ejercicio 2.3.** (a) Si  $\omega \in \mathcal{A}^{2r+1}(M)$  tiene grado impar, mostrar que  $\omega \wedge \omega = 0$ .

(b) Si  $\eta = dx^1 \wedge dx^2 - dx^2 \wedge dx^3 + dx^3 \wedge dx^4 \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^4)$ , calcular  $\eta \wedge \eta$ .

**Ejercicio 2.4.** Si  $M = \mathbb{R}^{2m}$ , demostrar que la 2-forma

$$\omega := dx^1 \wedge dx^2 + dx^3 \wedge dx^4 + \dots + dx^{2m-1} \wedge dx^{2m}$$

es no degenerada: esto es, si  $\omega(X, Y) = 0$  para todo  $Y \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2m})$ , entonces  $X = 0$ .

Calcular la  $2m$ -forma  $\omega^{\wedge m} := \omega \wedge \dots \wedge \omega$  ( $m$  veces) en las coordenadas  $x^1, \dots, x^{2m}$ .

**Ejercicio 2.5.** Una matriz  $A := [a_r^i]$  con entradas en  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  determina un juego de 1-formas  $\alpha^i := a_r^i dx^r$ , para  $i = 1, \dots, n$ . Si  $I := \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, n\}$ , listado en orden creciente, demostrar que

$$\alpha^{i_1} \wedge \dots \wedge \alpha^{i_k} = \sum_{|J|=k} m_{IJ} dx^{j_1} \wedge \dots \wedge dx^{j_k},$$

donde  $m_{IJ} = \det A_{IJ}$  es el menor de la submatriz  $k \times k$  de  $A$  con filas  $I$  y columnas  $J$ . Concluir que

$$\alpha^1 \wedge \dots \wedge \alpha^n = (\det A) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

**Ejercicio 2.6.** En la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$ , las cartas locales  $(V_k^\pm, \psi_k^\pm)$  del Ejercicio 1.2 determinan coordenadas locales  $(x^1, \dots, \widehat{x^k}, \dots, x^n)$ . La fórmula siguiente:

$$\sigma := \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} x^j dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^n,$$

determina una forma diferencial  $\sigma \in \mathcal{A}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1})$  en las coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^n$ . Calcular la expresión local de  $\sigma$  en cada  $V_k^\pm$  y comprobar que  $\sigma_q \neq 0$  para  $q \in \mathbb{S}^{n-1}$ .

**Ejercicio 2.7.** Si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , demostrar que  $i_X \circ i_Y = -i_Y \circ i_X$  como operadores sobre  $\mathcal{A}^\bullet(M)$ .  $\llbracket$  En particular, esto significa que  $i_X \circ i_X = 0$ .  $\rrbracket$

**Ejercicio 2.8.** Si  $\tau: M \rightarrow N$  y  $\sigma: N \rightarrow R$  son aplicaciones suaves entre variedades diferenciales, demostrar que  $\tau^*(\sigma^*\eta) = (\sigma \circ \tau)^*\eta$  para todo  $\eta \in \mathcal{A}^\bullet(R)$ .

**Ejercicio 2.9.** Si  $\eta = g dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$  en  $\mathcal{A}^n(\mathbb{R}^n)$  y si  $\tau: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo con componentes  $\tau = (\tau^1, \dots, \tau^n)$ , demostrar que

$$\tau^*\eta = (g \circ \tau) \det \left[ \frac{\partial \tau^i}{\partial x^j} \right] dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

**Ejercicio 2.10.** Si  $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  y  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  son suaves, defínase tres formas diferenciales  $\alpha_{\vec{F}} \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^3)$ ,  $\beta_{\vec{F}} \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^3)$ ,  $\gamma_g \in \mathcal{A}^3(\mathbb{R}^3)$  por:

$$\begin{aligned} \alpha_{\vec{F}} &:= F^1 dx + F^2 dy + F^3 dz, \\ \beta_{\vec{F}} &:= F^1 dy \wedge dz + F^2 dz \wedge dx + F^3 dx \wedge dy, \\ \gamma_g &:= g dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Con las notaciones usuales  $\vec{\nabla} f \equiv \text{grad } f$ ,  $\vec{\nabla} \times \vec{F} \equiv \text{rot } \vec{F}$ ,  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} \equiv \text{div } F$ , verificar que

$$\alpha_{\text{grad } f} = df, \quad \beta_{\text{rot } \vec{F}} = d\alpha_{\vec{F}}, \quad \gamma_{\text{div } \vec{F}} = d\beta_{\vec{F}}.$$

Comprobar que las identidades conocidas  $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$  y  $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$  son casos particulares de la *nilpotencia*  $d^2 = 0$  de la derivada exterior.

**Ejercicio 2.11.** Si  $\beta \in \mathcal{A}^2(M)$ , verificar la fórmula:

$$\begin{aligned} d\beta(X, Y, Z) &= X(\beta(Y, Z)) + Y(\beta(Z, X)) + Z(\beta(X, Y)) \\ &\quad - \beta([X, Y], Z) - \beta([Y, Z], X) - \beta([Z, X], Y). \end{aligned}$$

$\llbracket$  Indicación: comprobar que el lado derecho es trilineal y alternante en  $(X, Y, Z)$ ; y que la sustitución  $X \mapsto fX$  multiplica el lado derecho por  $f \in C^\infty(M)$ . Concluir que entonces basta verificar la fórmula dada en una carta local con campos vectoriales básicos.  $\rrbracket$

**Ejercicio 2.12.** Si  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ , verificar la fórmula algebraica general para la derivada exterior:

$$\begin{aligned} d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= \sum_{j=1}^{k+1} (-1)^{j-1} X_j(\omega(X_1, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.13.** Si  $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$  y si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , comprobar la fórmula siguiente:

$$\mathcal{L}_X \alpha(Y) = X \alpha(Y) - \alpha([X, Y]).$$

**Ejercicio 2.14.** Verificar esta fórmula algebraica general para la derivada de Lie: para todo  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$ , se cumple

$$\mathcal{L}_X \omega(X_1, \dots, X_k) = X(\omega(X_1, \dots, X_k)) - \sum_{j=1}^k \omega(X_1, \dots, [X, X_j], \dots, X_k).$$

**Ejercicio 2.15.** Las fórmulas de los Ejercicios 2.12 y 2.14 pueden considerarse como unas *definiciones alternativas* de las derivadas exterior y de Lie. Con base en estas fórmulas *únicamente*, comprobar las identidades algebraicas:

$$d(d\omega) = 0; \quad \mathcal{L}_X = d \circ i_X + i_X \circ d; \quad \mathcal{L}_X \circ \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \circ \mathcal{L}_X = \mathcal{L}_{[X, Y]}.$$

**Ejercicio 2.16.** Si  $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $f \in C^\infty(M)$ , comprobar las fórmulas:

$$i_{fX} \omega = f i_X \omega, \\ \mathcal{L}_{fX} \omega = f \mathcal{L}_X \omega + df \wedge i_X \omega.$$

[[ Indicación: usar inducción sobre el grado de  $\omega$ . ]]

**Ejercicio 2.17.** Si  $\tau: M \rightarrow N$  es un difeomorfismo, si  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y si  $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(N)$ , demostrar las identidades:

$$i_X(\tau^* \omega) = \tau^*(i_{\tau_* X} \omega) \quad \text{y} \quad \mathcal{L}_X(\tau^* \omega) = \tau^*(\mathcal{L}_{\tau_* X} \omega).$$

**Ejercicio 2.18.** Si  $\eta = f dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  en  $\mathcal{A}^n(\mathbb{R}^n)$ , verificar la fórmula:

$$\mathcal{L}_X \eta = (Xf + f \operatorname{div} X) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n,$$

donde  $\operatorname{div} X := \sum_{j=1}^n \frac{\partial g^j}{\partial x^j}$  es la **divergencia** del campo vectorial  $X = g^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ .

**Ejercicio 2.19.** Si  $\omega \in \mathcal{A}^\bullet(M)$  y si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ , verificar la fórmula:

$$i_{[X, Y]} \omega = \mathcal{L}_X(i_Y \omega) - i_Y(\mathcal{L}_X \omega).$$

Concluir que  $\mathcal{L}_X(i_X \omega) = i_X(\mathcal{L}_X \omega)$ .

**Ejercicio 2.20.** Si  $X = a^j \frac{\partial}{\partial x^j}$  y  $\alpha = b_k dx^k$  en el dominio de una carta local de  $M$ , comprobar que en ese dominio  $\mathcal{L}_X$  tiene obedece la fórmula local:

$$\mathcal{L}_X \alpha = \left( a^j \frac{\partial b_k}{\partial x^j} + b_j \frac{\partial a^j}{\partial x^k} \right) dx^k.$$

**Ejercicio 2.21.** Si  $G$  es un grupo de Lie y  $\mathfrak{g} = T_1G$  su álgebra de Lie. Una forma diferencial  $\eta \in \mathcal{A}^\bullet(G)$  se llama **invariante** (a izquierda) si  $\lambda_g^* \eta = \eta$  para todo  $g \in G$ ; en cuyo caso,  $\eta$  está determinada por el elemento  $\eta_1 \in \Lambda^\bullet(T_1^*G)$ . Demostrar que  $\alpha \in \mathcal{A}^1(G)$  es invariante si y solo si, para todo  $X \in \mathfrak{g}$ , la función  $\alpha(\tilde{X})$  es constante<sup>10</sup> con valor  $\alpha_1(X)$ .

Concluir que  $d\alpha$  es una 2-forma invariante, que cumple la relación:

$$d\alpha(\tilde{X}, \tilde{Y}) = -\alpha_1([X, Y]).$$

**Ejercicio 2.22.** Si  $\{X_1, \dots, X_n\}$  es una base vectorial para el álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , el corchete de  $\mathfrak{g}$  está determinado por las combinaciones lineales:

$$[X_i, X_k] = c_{ij}^k X_k$$

cuyas coeficientes  $c_{ij}^k$  (para  $i, j, k = 1, \dots, n$ ) son las **constantes de estructura** de  $\mathfrak{g}$ . Se identifica el espacio vectorial de 1-formas invariantes con el espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial dual  $\mathfrak{g}^* := T_1^*G$ . Si  $\alpha^1, \dots, \alpha^n$  son las 1-formas invariantes tales que  $\{(\alpha^1)_1, \dots, (\alpha^n)_1\}$  es la base dual a  $\{X_1, \dots, X_n\}$ , comprobar las **ecuaciones de Maurer y Cartan**:

$$d\alpha^k = -\frac{1}{2} c_{ij}^k \alpha^i \wedge \alpha^j.$$

**Ejercicio 2.23.** Defínase una matriz de 1-formas sobre  $GL(m, \mathbb{R})$  por la receta  $\Omega := g^{-1} dg$ , donde  $g = [g_j^i] \in GL(m, \mathbb{R})$ . Verificar que las entradas  $\Omega_j^i := (g^{-1})_k^i dg_j^k$  de esta matriz son 1-formas invariantes sobre  $GL(m, \mathbb{R})$ .

Comprobar que  $d(g^{-1}) = -g^{-1} dg g^{-1}$  para  $g \in GL(m, \mathbb{R})$  y obtener con esta fórmula una expresión matricial para  $d\Omega$ . Cómo se expresan las ecuaciones de Maurer y Cartan (del Ejercicio 2.22) para este grupo de Lie?

**Ejercicio 2.24.** Una **forma simpléctica** sobre  $M$  es una 2-forma cerrada no degenerada:<sup>11</sup>

$$\omega \in \mathcal{A}^2(M), \quad d\omega = 0; \quad \text{y} \quad \omega(X, Y) = 0 \text{ para todo } Y \in \mathfrak{X}(M) \implies X = 0.$$

Demostrar que  $X \leftrightarrow i_X \omega$  es una biyección  $C^\infty(M)$ -lineal entre los  $C^\infty(M)$ -módulos  $\mathfrak{X}(M)$  y  $\mathcal{A}^1(M)$ .

<sup>10</sup>Este  $\tilde{X}$  es el campo vectorial invariante tal que  $\tilde{X}_1 = X$ .

<sup>11</sup>Si  $p \in M$ ,  $\omega_p$  es una forma bilineal alternada no degenerada sobre  $T_pM$ , cuya matriz es antisimétrica e invertible; por lo tanto,  $\dim M = \dim_{\mathbb{R}} T_pM$  es necesariamente par.

**Ejercicio 2.25.** Si  $\dim M$  es par y  $\omega \in \mathcal{A}^2(M)$  es una forma simpléctica, dícese que  $(M, \omega)$  es una **variedad simpléctica**.

Denotando por  $(q^1, \dots, q^n)$  las coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^n$ , se suele escribir  $(q^1, \dots, q^n; p_1, \dots, p_n)$  para denotar las coordenadas cartesianas de  $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ . Al definir

$$\omega := dq^j \wedge dp_j \in \mathcal{A}^2(T^*\mathbb{R}^n),$$

comprobar que  $(T^*\mathbb{R}^n, \omega)$  es una variedad simpléctica.<sup>12</sup>

**Ejercicio 2.26.** En una variedad simpléctica  $(M, \omega)$ , un campo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  se llama un *campo vectorial simpléctico* si  $\mathcal{L}_X \omega = 0$ . Si  $X, Y$  son dos campos vectoriales simplécticos, demostrar que  $i_{[X,Y]} \omega = df$  donde  $f := \omega(Y, X)$ . [[ Indicación: usar el Ejercicio 2.19. ]]

**Ejercicio 2.27.** Dada una variedad simpléctica  $(M, \omega)$ , escríbase  $X^\flat := i_X \omega \in \mathcal{A}^1(M)$  para cualquier  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . La biyección  $X \mapsto X^\flat$  dada por el Ejercicio 2.24 tiene una biyección inversa  $\alpha \mapsto \alpha^\sharp : \mathcal{A}^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , determinada por la identidad  $\omega(\alpha^\sharp, Y) = \alpha(Y)$ .

Si  $f \in C^\infty(M)$ , el campo vectorial  $X_f := (df)^\sharp \in \mathfrak{X}(M)$  se llama el **campo vectorial hamiltoniano** asociado a la función  $f$ ; se ve que  $i_{X_f} \omega = df$ .

- (a) Demostrar que  $\mathcal{L}_{X_f} \omega = 0$  (o sea,  $X_f$  es un campo simpléctico); concluir que  $\omega$  es invariante bajo el flujo del campo hamiltoniano  $X_f$ .
- (b) Si  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  es un campo vectorial simpléctico, demostrar que

$$Yf = \omega(X_f, Y) \quad \text{y además} \quad [Y, X_f] = X_{Yf}.$$

**Ejercicio 2.28.** Verificar que el campo vectorial hamiltoniano  $X_f$  de  $f \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$  está dado por

$$X_f = \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial}{\partial q^j} - \frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial}{\partial p_j}$$

con la notación del Ejercicio 2.25. [[ Nótese que

$$X_f g = \frac{\partial f}{\partial q^j} \frac{\partial g}{\partial p_j} - \frac{\partial f}{\partial p_j} \frac{\partial g}{\partial q^j}.$$

El lado derecho de esta fórmula clásica se llama el *corchete de Poisson*  $\{f, g\}$  de las funciones  $f, g \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ . ]]

<sup>12</sup>Un teorema de Darboux asegura cualquier variedad simpléctica tiene un atlas para el cual  $\omega$  posee esta misma expresión en cada carta local. Si  $Q$  es una variedad diferencial cualquiera, el espacio total  $M = T^*Q$  de su fibrado cotangente es una variedad simpléctica.

**Ejercicio 2.29.** En una variedad simpléctica  $(M, \omega)$  en general, el **corchete de Poisson** es la forma  $\mathbb{R}$ -bilineal sobre  $C^\infty(M)$  dada por  $\{f, g\} := X_f g$ . Comprobar las siguientes identidades:

$$\{f, g\} = \omega(X_g, X_f) \quad \text{y además} \quad [X_f, X_g] = X_{\{f, g\}}.$$

**Ejercicio 2.30.** Si  $(M, \omega)$  es una variedad simpléctica y si  $f, g, h \in C^\infty(M)$ , verificar las propiedades algebraicas del corchete de Poisson:

$$\begin{aligned} \{f, g\} + \{g, f\} &= 0, \\ \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} &= 0, \\ \{f, gh\} &= \{f, g\}h + g\{f, h\}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 2.31.** Si  $f, g, h \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ , considérese el sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial r}{\partial y} - \frac{\partial q}{\partial z} = f, \quad \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial r}{\partial x} = g, \quad \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial p}{\partial y} = h.$$

Demostrar que esta ecuación tiene una solución – dada por  $p, q, r \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$  – si y solo si

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z} = 0.$$

[[ Indicación: colocar  $\omega := f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy$  y usar el lema de Poincaré en  $\mathbb{R}^3$ . ]]

### 3 Integración en variedades

*A problem that seems insurmountable is just seemingly so because we have not asked the right question. You should always ask the right question and then you can solve the problem.*

— Niels Henrik Abel

La teoría de variedades diferenciales generaliza el cálculo diferencial sobre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ , dando lugar a las formas diferenciales introducidos en el capítulo anterior. De igual importancia es el cálculo integral sobre abiertos de  $\mathbb{R}^n$ ; en ese contexto, los teoremas clásicos de Green, Gauss y Stokes juegan un papel importante, bajo la rúbrica de “análisis vectorial”. Esos teoremas son, en el fondo, generalizaciones del teorema fundamental del cálculo en una variable. El objetivo de este capítulo es definir el concepto de integración de formas diferenciales sobre una variedad diferencial, e identificar la generalización apropiada de dichos teoremas clásicos.

Un aspecto notable del cálculo integral, ya en dimensión 1, es la conocida fórmula

$$\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt, \quad (3.1)$$

que expresa la integral de una función  $f$  sobre un intervalo compacto  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ . Por lo tanto, el dominio de integración es *ese intervalo*  $[a, b]$  *dotado de una dirección*, que puede ser  $a \rightarrow b$  o bien  $b \rightarrow a$ . Se habla, pues, de un *intervalo orientado*; un cambio de orientación del dominio conlleva un cambio de signo en la integral.

Un aspecto novedoso de la teoría, entonces, impuesto por la necesidad de formular y calcular integrales, es la posibilidad (o no) de asignar una direccionalidad a una determinada variedad diferencial de manera consistente.

#### 3.1. Variedades orientables

En el cálculo del volumen de un abierto  $V \subset \mathbb{R}^n$ , se suele repartir  $V$  en una colección de cubos pequeños que no traslapan – los llamados “elementos de volumen” – para luego sumar los volúmenes individuales de los cubos. El volumen de un cubo o paralelepípedo rectangular (un producto cartesiano de intervalos) se define como el producto de las longitudes de los lados incidentes a un vértice particular. Pero en vista de (3.1), se puede *adjudicar un signo al volumen de un determinado cubo*. Si  $a < b$  en  $\mathbb{R}$ , se asigna la *longitud*  $(b - a)$  al intervalo  $[a, b] := \{t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b\}$ . El intervalo degenerado  $[a, a] = \{a\}$  tendrá longitud 0. En el caso  $a > b$ , se puede adoptar la notación  $[a, b]$  para designar el conjunto  $\{t \in \mathbb{R} : a \geq t \geq b\}$  dotado de una *longitud negativa*  $b - a = -(a - b)$ .

Al tomar productos cartesianos de intervalos de  $\mathbb{R}$ , se puede asignar volúmenes positivos o negativos a paralelepípedos de la misma manera. Este procedimiento se volvería engorroso al unir juegos de paralelepípedos para formar el “volumen” de  $V$ . Sin embargo, en una variedad diferencial hay un artificio, definido a continuación, que simplifica el proceso de asignar volúmenes con signo.

**Definición 3.1.** Una variedad diferencial  $M$  de dimensión  $n$  es **orientable** si existe una forma diferencial de grado máximo  $\nu \in \mathcal{A}^n(M)$  tal que  $\nu_p \neq 0$  en  $\Lambda^n T_p^* M$  para todo  $p \in M$ . Se dice que la  $n$ -forma  $\nu$  *no se anula*.<sup>1</sup>

Si una tal  $n$ -forma  $\nu$  existe, el par  $(M, \nu)$  se llama una **variedad orientada**; y esa  $n$ -forma  $\nu$  es su **forma de volumen**.  $\diamond$

**Ejemplo 3.2.** La variedad diferencial  $\mathbb{R}^n$ , junto con la  $n$ -forma

$$\nu := dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n, \tag{3.2}$$

es una variedad orientada. Este  $\nu$  es el “elemento de volumen” en integrales múltiples.  $\diamond$

► Para entender mejor el concepto de orientación, conviene reexpresar la definición anterior en el lenguaje de fibrados. Nótese que  $\dim_{\mathbb{R}} \Lambda^n T_p^* M = 1$  si  $n = \dim M$ , así que el fibrado vectorial  $\Lambda^n T^* M \xrightarrow{\pi} M$  tiene rango 1, es decir, cada fibra es una recta real. Se puede considerar  $M$  como una subvariedad de  $\Lambda^n T^* M$ , al identificar cada punto  $p \in M$  con la imagen de la **sección cero**  $p \mapsto 0 \in \Lambda^n T_p^* M$ . Al restringir la proyección  $\pi$  a la variedad  $\Lambda^n T^* M \setminus M$ , se obtiene un fibrado  $(\Lambda^n T^* M \setminus M) \xrightarrow{\pi} M$ , cuyas fibras son las “rectas perforadas”  $\Lambda^n T_p^* M \setminus \{0\}$ ; su *fibra típica* es  $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Fíjese bien que esa fibra típica tiene *dos componentes conexos*, los intervalos abiertos  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ .

Una  $n$ -forma  $\nu \in \mathcal{A}^n(M)$  que no se anula es precisamente una *sección suave* del fibrado  $(\Lambda^n T^* M \setminus M) \xrightarrow{\pi} M$ .

**Proposición 3.3.** Una variedad orientada  $(M, \nu)$  posee un atlas  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$  donde toda función de transición  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1} : \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$  tiene jacobiano positivo.

*Demostración.* El jacobiano de una función de transición entre dos cartas locales  $(U, \phi)$  y  $(V, \psi)$  de  $M$  tales que  $U \cap V \neq \emptyset$ , es una función suave que no se anula en  $\phi(U \cap V)$ ,

$$J(\psi \circ \phi^{-1}) := \det \left[ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right] \in \mathbb{R}^\times. \tag{3.3}$$

---

<sup>1</sup>La  $n$ -forma  $\nu \in \mathcal{A}^n(M)$  es una sección del fibrado vectorial de rango uno  $\Lambda^n T^* M \xrightarrow{\pi} M$ . Decir que  $\nu$  no se anula es afirmar que  $\nu$  es disjunta de la “sección cero”  $p \mapsto 0$ .

(Véase la discusión antes del Ejemplo 1.31.) En cada componente conexo de  $\phi(U \cap V)$ , el jacobiano toma valores positivos exclusivamente, o bien valores negativos solamente.

Sea  $(U, \phi)$  una carta local de  $M$  para la cual  $U$  es conexo, con coordenadas locales  $(x^1, \dots, x^n)$ . Como  $v_p \neq 0$  para cada  $p \in U$ , la  $n$ -forma local  $v|_U$  se escribe como

$$v|_U = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

donde la función  $f \in C^\infty(U)$  no se anula. Como  $U$  es conexo, bien  $f(q) > 0$  para todo  $q \in U$ , o bien  $f(q) < 0$  para todo  $q \in U$ . Sea  $(U, \theta)$  la carta local de  $M$  con el mismo dominio  $U$  pero con  $\theta \equiv (z^1, \dots, z^n)$  dado por

$$(z^1, z^2, \dots, z^n) := \begin{cases} (x^1, x^2, \dots, x^n), & \text{si } f > 0 \text{ en } U, \\ (-x^1, x^2, \dots, x^n), & \text{si } f < 0 \text{ en } U. \end{cases}$$

Nótese que  $dz^k = dx^k$  para  $k = 2, \dots, n$ ; mientras  $dz^1 = \pm dx^1$  con signo negativo si y solo si  $f < 0$ ; esto implica que

$$v|_U = g dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n, \quad \text{con } g(q) := |f(q)| > 0 \text{ para todo } q \in U.$$

Ahora  $\theta = \phi$  si  $f > 0$  en  $U$ ; pero  $\theta = \rho \circ \phi$  si  $f < 0$  en  $U$ , donde  $\rho$  es una reflexión (lineal e invertible) de  $\mathbb{R}^n$ .

Dado un atlas  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  de  $M$  con cada  $U_\alpha$  conexo (sin perder generalidad),<sup>2</sup> las cartas correspondientes  $(U_\alpha, \theta_\alpha)$  forman un nuevo atlas, compatible con el original.

Si  $(V, \psi)$ , con  $\psi \equiv (y^1, \dots, y^n)$ , es otra carta del atlas modificado  $\{(U_\alpha, \theta_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  con  $U \cap V \neq \emptyset$ , hay un cambio de variable:

$$\begin{aligned} dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n &= \frac{\partial y^1}{\partial z^{j_1}} dz^{j_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial y^n}{\partial z^{j_n}} dz^{j_n} \\ &= \sum_{|J|=n} \varepsilon_J \frac{\partial y^1}{\partial z^{j_1}} \cdots \frac{\partial y^n}{\partial z^{j_n}} dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n = \det \left[ \frac{\partial y^i}{\partial z^j} \right] dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n \\ &= J(\psi \circ \theta^{-1}) dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n, \end{aligned} \tag{3.4}$$

donde  $\varepsilon_J = 0$  si la lista  $(j_1, \dots, j_n)$  tiene repeticiones – por cancelación de  $dz^j \wedge dz^j = 0$ ; y si no,  $\varepsilon_J$  es el signo de la permutación  $(1, \dots, n) \mapsto (j_1, \dots, j_n)$ . En  $U \cap V$ , vale

$$v|_{U \cap V} = h dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = g dz^1 \wedge \cdots \wedge dz^n,$$

así que  $J(\psi \circ \theta^{-1}) = g/h > 0$  en  $U \cap V$ , pues  $g > 0$  en  $U$  y  $h > 0$  en  $V$ .  $\square$

<sup>2</sup>Si  $U$  no es conexo, sea  $U = \bigcup_j V_j$  su expresión como unión de componentes conexos (los cuales son abiertos de  $M$  porque  $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$  es un espacio topológico localmente conexo). Luego, se puede reemplazar la carta local  $(U, \phi)$  por el juego de cartas locales  $(V_j, \phi|_{V_j})$ ; de esta manera se obtiene otro atlas, compatible con el original, en el cual cada dominio de carta es conexo.

En la demostración anterior, el cambio de atlas se rige por las alternativas  $\theta_\alpha = \phi_\alpha$  o bien  $\theta_\alpha = \rho \circ \phi_\alpha$ ; en cada carta se elige uno u otro según el signo del coeficiente  $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$  de la 1-forma local  $\nu|_{U_\alpha}$ . Sin embargo, en la ausencia de una  $n$ -forma que no se anula, no siempre es posible elegir estas opciones de manera consistente.

**Ejemplo 3.4.** Considérese el *plano proyectivo*  $\mathbb{R}P^2$  con el atlas del Ejemplo 1.14. Hay tres cartas  $(U_j, \phi_j)$  y el jacobiano de una de las funciones de transición fue calculado en el Ejemplo 1.31:

$$J(\phi_2 \circ \phi_1^{-1}) = -(y^1)^{-3} \neq 0 \quad \text{para } y^1 \neq 0.$$

En este caso, los dominios de cartas  $U_j$  son conexos *pero las intersecciones*  $U_j \cap U_k$  son *disconexos*:  $\phi_1(U_1 \cap U_2)$  es la unión de dos semiplanos abiertos  $\{y^1 > 0\}$  y  $\{y^1 < 0\}$ ; para otro par de cartas, el cambio podría dar jacobiano  $-(y^2)^{-3}$  en semiplanos  $\{y^2 > 0\}$  y  $\{y^2 < 0\}$ . En todo caso, *con o sin la reflexión*  $\rho: (y^1, y^2) \mapsto (-y^1, y^2)$ , el jacobiano siempre tomará valores positivos en un semiplano y negativos en el otro.

Se concluye que no es posible modificar este atlas por reflexiones para obtener jacobianos positivos de las funciones de transición. En vista de la demostración anterior, no puede existir una 2-forma sobre  $\mathbb{R}P^2$  que no se anula: se concluye que *la variedad diferencial*  $\mathbb{R}P^2$  *no es orientable*.  $\diamond$

La Proposición 3.3 tiene una inversa (la Proposición 3.6 abajo): un atlas de  $M$  para el cual todos los jacobianos son positivos establece la orientabilidad de  $M$ . La construcción de la  $n$ -forma  $\nu$  depende del siguiente concepto topológico.

**Definición 3.5.** Sea  $X$  un espacio topológico metrizable y separable. Una **partición de la unidad** es un juego de funciones continuas  $h_\alpha: X \rightarrow [0, 1]$ , tales que:

- (a) hay abiertos  $V_\alpha$ , tales que  $\text{sop}(h_\alpha) \subset V_\alpha$  para cada  $\alpha$ , que forman un **cubrimiento localmente finito** de  $X$ ; es decir, cada  $x \in X$  posee un vecindario abierto  $W$  tal que  $W \cap V_\alpha \neq \emptyset$  solo para un número finito de índices  $\alpha$ ;
- (b)  $\sum_\alpha h_\alpha(x) = 1$  para todo  $x \in X$ .<sup>3</sup>

Una partición de la unidad de una variedad diferencial  $M$  se llama *suave* si cada función  $h_\alpha$  es suave; y se dice que la partición  $\{h_\alpha\}$  es *subordinada* al cubrimiento abierto  $\{V_\alpha\}$ .  $\diamond$

Un espacio metrizable y separable siempre posee una partición de la unidad continua, con conjunto índice numerable.

---

<sup>3</sup>La finitud local (a) implica que la sumatoria en (b) es una suma finita en cada  $x \in X$ : se puede escribir  $\sum_\alpha h_\alpha(x) \equiv 1$  sin incurrir en problemas de convergencia.

Si  $M$  es una variedad diferencial, se puede elegir los  $V_\alpha$  como dominios de cartas de un atlas de  $M$ ; y se puede tomar cada  $h_\alpha \in C^\infty(M)$ , a la luz de la discusión que sigue al Ejemplo 1.28. En resumen: *cada variedad diferencial  $M$  posee una partición de la unidad suave, subordinada a un atlas de  $M$ .*

**Proposición 3.6.** *Si una variedad diferencial  $M$  posee un atlas tal que todas sus funciones de transición tienen jacobianos positivos, entonces  $M$  es orientable.*

*Demostración.* Por hipótesis, hay un atlas  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  de  $M$  tal que  $J(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) > 0$  en  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  toda vez que  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ . Sea  $\{h_\alpha : \alpha \in A\} \subset C^\infty(M)$  una partición de la unidad suave subordinada al cubrimiento abierto  $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$  de  $M$ . Defínase unas  $n$ -formas  $v_{(\alpha)} \in \mathcal{A}^n(M)$  por

$$v_{(\alpha)}|_{U_\alpha} := h_\alpha dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n; \quad v_{(\alpha)}|_{M \setminus U_\alpha} := 0.$$

Nótese que  $v_{(\alpha)}$  están bien definidas porque  $h_\alpha = 0$  en un vecindario abierto de  $M \setminus U_\alpha$ . La siguiente suma:

$$v := \sum_{\alpha \in A} v_{(\alpha)}$$

es localmente finita (es decir, la restricción del lado derecho a algún vecindario  $W$  de cualquier  $p \in M$  es una suma finita) y por ende define una sección suave  $p \mapsto v_p$  del fibrado vectorial  $\Lambda^n T^*M \xrightarrow{\pi} M$ . Esto demuestra que  $v \in \mathcal{A}^n(M)$ .

La expresión local de  $v$  en  $U_\alpha$  tiene el siguiente aspecto:

$$v|_{U_\alpha} = \left( h_\alpha + \sum_{\beta \neq \alpha} h_\beta J(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) \right) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n,$$

al usar la fórmula (3.4) para efectuar los cambios de coordenadas. Esta sumatoria es localmente finita, y por lo tanto la expresión entre paréntesis converge a una función suave  $f_\alpha \in C^\infty(U_\alpha)$ . Como  $0 \leq h_\alpha \leq 1$  y cada  $0 \leq h_\beta \leq 1$ , y por hipótesis

$$J(\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}) > 0 \quad \text{en} \quad \{q \in U_\alpha : h_\beta(q) > 0\} \subseteq U_\alpha \cap U_\beta,$$

se concluye que la suma cumple  $f_\alpha \geq 0$  en  $U_\alpha$ .

Además, si  $q \in U_\alpha$ , entonces

$$f_\alpha(q) = 0 \implies h_\alpha(q) = 0 \quad \text{y} \quad h_\beta(q) = 0 \quad \text{para cada } \beta,$$

lo cual es imposible pues  $h_\alpha(q) + \sum_{\beta \neq \alpha} h_\beta(q) = 1$ . Se concluye que  $f_\alpha > 0$  en  $U_\alpha$ , para cualquier  $\alpha \in A$ . En consecuencia, la  $n$ -forma  $v$  no se anula en  $U_\alpha$ . Como los dominios  $U_\alpha$  recubren  $M$ , se ve que  $v$  no se anula en todo  $M$ .

Por lo tanto,  $(M, v)$  es una variedad orientada. □

**Corolario 3.7.** Sea  $M$  una variedad orientable y sean  $\mu, \nu \in \mathcal{A}^n(M)$  dos  $n$ -formas sobre  $M$  que no se anulan. Entonces hay una función  $h \in C^\infty(M)$  tal que  $\mu = h\nu$ , con  $h(p) \neq 0$  para todo  $p \in M$ . El signo de la función  $h$  es constante en cada componente conexo de  $M$ .

*Demostración.* Para carta local  $(U, \phi)$  de  $M$ , hay funciones  $f_U, g_U \in C^\infty(U)$  tales que

$$\nu|_U = f_U dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \mu|_U = g_U dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

con  $f \neq 0, g \neq 0$  en  $U$ . Colóquese  $h_U := g_U/f_U \in C^\infty(U)$ .

Si  $(V, \psi)$  es otra carta local, entonces  $f_V = f_U J(\psi \circ \phi^{-1})$  y  $g_V = g_U J(\psi \circ \phi^{-1})$  en  $U \cap V$ , así que  $h_U = g_V/f_V = h_V$  en  $U \cap V$ . Por lo tanto, hay una función suave  $h \in C^\infty(M)$  tal que  $h|_U = h_U$  para cada carta  $(U, \phi)$ . Como ningún  $h_U$  se anula en  $U$ , la función global  $h$  no toma el valor 0 en punto alguno de  $M$ .

Sin perder generalidad, se puede suponer que cada dominio de carta  $U$  es conexo. Luego  $f_U, g_U$  y por ende  $h_U$  no cambian de signo en  $U$ . Como los  $U$  recubren  $M$ , cada punto  $p \in M$  posee un vecindario  $V$  para el cual  $\text{signo}(h)|_V$  es constante. En otras palabras, signo  $h$ :  $M \mapsto \{-1, +1\}$  es una función continua *localmente constante*.

En particular,  $\{p \in M : h(p) > 0\} = (\text{signo } h)^{-1}(+1)$  es una unión de componentes conexos de  $M$ . □

**Escolio 3.8.** Sea  $M$  una variedad orientable y conexo. Si  $\mu, \nu \in \mathcal{A}^n(M)$  son  $n$ -formas que no se anulan, entonces  $\mu = h\nu$ , con  $h > 0$  en  $M$  o bien  $h < 0$  en  $M$ . ◻

**Definición 3.9.** Si  $M$  es una variedad orientable, dos  $n$ -formas  $\mu, \nu \in \mathcal{A}^n(M)$  que no se anulan son *equivalentes*,  $\mu \sim \nu$ , si  $\mu = h\nu$  para algún  $h \in C^\infty(M)$  con  $h > 0$  sobre  $M$ . Si  $M$  es también conexo, solo hay dos clases de equivalencia:  $\mu \sim \nu$  o bien  $\mu \sim -\nu$ , por el Escolio 3.8. Si  $M$  es disconexo, con  $k$  componentes conexos, entonces hay  $2^k$  clases de equivalencia. Cada clase de equivalencia  $[\nu]$  se llama una **orientación** sobre  $M$ . ◇

**Ejemplo 3.10.** Cada permutación  $\sigma \in S_n$  reordena las coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^n$ . En vista de la relación

$$dx^{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx^{\sigma(n)} = (-1)^\sigma dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

la acción de  $\sigma$  *preserva o cambia* la orientación usual de  $\mathbb{R}^n$  según  $\sigma$  sea *par o impar*. ◇

**Lema 3.11.** Sea  $(M, \nu)$  una variedad orientada con  $\dim M = n$ , y sea  $N$  una subvariedad de  $M$  con  $\dim N = n - 1$ ; denótese por  $j: N \rightarrow M$  la inclusión.<sup>4</sup> Si hay un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tal que  $X_p \notin T_p j(T_p N)$  para todo  $p \in N$ , entonces  $N$  es orientable:  $j^*(i_X \nu)$  es una forma de volumen sobre  $N$ .

<sup>4</sup>Se dice que la subvariedad  $N$  tiene *codimensión 1* en  $M$ .

*Demostración.* Nótese que  $i_X v \in \mathcal{A}^{n-1}(M)$ ; en consecuencia,  $j^*(i_X v) \in \mathcal{A}^{n-1}(N)$  es una forma diferencial de grado máximo sobre  $N$ . Si  $p \in N$ , sea  $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$  una base de  $T_p N$  y escríbase  $w_k := T_p j(v_k)$ . Los vectores  $w_1, \dots, w_{n-1} \in T_p j(T_p N)$  son linealmente independientes por ser  $T_p j$  inyectivo (porque la inclusión de la subvariedad  $j: N \rightarrow M$  es una inmersión). Luego  $\{X_p, w_1, \dots, w_{n-1}\}$  es una base vectorial de  $T_p M$ . Ahora

$$(j^*(i_X v))_p(v_1, \dots, v_{n-1}) = (i_X v)_p(w_1, \dots, w_{n-1}) = v_p(X_p, w_1, \dots, w_{n-1}) \neq 0,$$

pues  $v_p \neq 0$  en  $\Lambda^n T_p^* M$ . Se concluye que  $(j^*(i_X v))_p \neq 0$  en  $\Lambda^{n-1} T_p^* N$  para todo  $p \in N$ . Esto dice que la  $(n-1)$ -forma  $j^*(i_X v)$  no se anula sobre  $N$ .  $\square$

Para una superficie  $N \subset \mathbb{R}^3$ , el espacio vectorial  $T_p j(T_p N)$  puede visualizarse como el *plano tangente* a  $N$  en el punto  $p$ ; el vector  $X_p$  corresponde a una dirección en  $\mathbb{R}^3$  que sale de ese plano. Si esta dirección es perpendicular al plano tangente en cada  $p \in N$ , se describe  $\{X_p : p \in N\}$  como un “campo de vectores normales no ceros” sobre  $N$ . Hay superficies no orientables, como la franja de Möbius, para los cuales esto es imposible: cualquier campo de vectores normales debe anularse en algún punto de la superficie.

**Ejemplo 3.12.** La esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  es una subvariedad de  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ; y el *campo de Euler*  $Z := x^k \frac{\partial}{\partial x^k}$  definido en (2.50) no se anula en  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Obsérvese que

$$i_Z v = i_Z(dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} x^k dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (3.5a)$$

La esfera está dada por  $\mathbb{S}^{n-1} = f^{-1}(1)$ , donde  $f(x) := (x^1)^2 + \dots + (x^n)^2$ . Evidentemente,  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Si  $p \in \mathbb{S}^{n-1}$  y  $Y_p \in T_p j(T_p \mathbb{S}^{n-1})$ , entonces  $Y_p f = Y_p(1) = 0$ .

Pero  $Zf = 2f$ , ya que  $f$  es un polinomio cuadrático, y por lo tanto vale  $Z_p f = 2$  para  $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Esto implica que  $Z_p \notin T_p j(T_p \mathbb{S}^{n-1})$ . Del Lema 3.11 se deduce que la forma diferencial

$$\sigma := j^*(i_Z v) \in \mathcal{A}^{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \quad (3.5b)$$

es una *forma de volumen* sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$ . En particular, la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  es orientable.

El lado derecho de (3.5a) expresa  $\sigma$  en las coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^n$ . El pullback de  $i_Z v$  bajo  $j^*$  permite interpretar  $\{x^1, \dots, x^n\}$  como un juego de coordenadas locales para la esfera – pero se debe notar que en cada carta local de  $\mathbb{S}^n$  una de esas coordenadas es redundante. Para ese efecto, conviene emplear las cartas hemisféricas  $(V_k^\pm, \psi_k^\pm)$  del Ejercicio 1.2. En cada carta, la coordenada extra debe expresarse como una función de las otras mediante la ecuación  $f(x) = 1$ .  $\diamond$

### 3.2. Integrales de $n$ -formas

**Definición 3.13.** Sea  $\omega_0 = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  una  $n$ -forma sobre un abierto  $V \subseteq \mathbb{R}^n$ . Su **integral** sobre  $V$  es el número real

$$\int_V \omega_0 \equiv \int \cdots \int_V f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (3.6)$$

obtenido por el proceso iterativo usual. (La función coeficiente  $f$  de  $\omega$  es suave, pero el lado derecho de (3.6) tiene sentido para una clase más amplia de integrandos.)<sup>5</sup>

En detalle, esta “integral iterada” se define como sigue. Sea  $V_1 := \text{pr}_1(V)$  la proyección de  $V$  sobre el eje  $x^1$ ; y sea

$$V^{(1)} := \{ (x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-1} : (x^1, x^2, \dots, x^n) \in V \text{ para algún } x^1 \in V_1 \}$$

la proyección de  $V$  sobre el complemento ortogonal  $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ . Defínase  $f_1: V^{(1)} \rightarrow \mathbb{R}$  por la integral:

$$f_1(x^2, \dots, x^n) := \int_{V_1} f(x^1, \dots, x^n) dx^1,$$

Si  $V_{12} := \text{pr}_2(V^{(1)})$ , defínase de modo similar:

$$f_{12}(x^3, \dots, x^n) := \int_{V_{12}} f_1(x^2, \dots, x^n) dx^2,$$

y así sucesivamente. En resumen, se calcula la integral de  $f(x^1, \dots, x^n)$  respecto de las variables  $x^1, \dots, x^n$  consecutivamente; en cada paso, al integrar con respecto a  $x^j$ , se dejan fijas las variables subsiguientes. La integral resultante (3.6) está bien definida si todas las integraciones intermedias convergen, y su valor no depende del orden de las variables de integración.  $\diamond$

**Definición 3.14.** Sea  $(M, \nu)$  una variedad orientada con  $\dim M = n$  y sea  $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$ . En una carta local  $(U, \phi)$  de  $M$ , sea  $\omega|_U = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  la expresión local de  $\omega$ . Entonces  $\omega|_U = \phi^* \omega_0$ , donde  $\omega_0$  es la  $n$ -forma en  $\phi(U)$  que posee la misma expresión local – conviene recordar que  $(x^1, \dots, x^n)$  son las coordenadas cartesianas en el abierto  $\phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Defínase **la integral de  $\omega$  sobre  $U$**  por la fórmula:

$$\int_U \omega = \boxed{\int_U \phi^* \omega_0 := \int_{\phi(U)} \omega_0} = \int_{\phi(U)} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \quad (3.7)$$

cuyo lado derecho está dado por la integral múltiple ordinaria (3.6).  $\diamond$

<sup>5</sup>Estas integrales iteradas son integrales de Lebesgue, en principio. En cada caso el integrando es una función suave, y por ende su integral de Lebesgue coincide con su integral de Riemann, quizás impropia: esas dos integrales coinciden cuando el integrando es continuo y su valor absoluto tiene integral finita.

No es obvio si  $\int_U \omega$  está bien definida, porque el lado derecho de (3.6) depende de la carta  $(U, \phi)$ . Considérese entonces otra carta  $(V, \psi)$  para  $M$ , con  $U \cap V \neq \emptyset$ , donde

$$\omega|_{U \cap V} = f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = g(y^1, \dots, y^n) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n$$

son las dos expresiones locales para  $\omega$  en  $U \cap V$ . Para que  $\int_{U \cap V} \omega$  sea independiente de las cartas, hace falta comprobar que:

$$\int_{\phi(U \cap V)} f(x^1, \dots, x^n) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n = \int_{\psi(U \cap V)} g(y^1, \dots, y^n) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n. \quad (3.8)$$

El jacobiano de la función de transición  $J(\psi \circ \phi^{-1})$  no se anula en  $\phi(U \cap V)$ , así que  $g(y) = g(\psi \circ \phi^{-1}(x))$  en esa región de  $\mathbb{R}^n$ . Los elementos de volumen transforman según la receta (3.4), y se deduce que

$$g(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = g(\psi \circ \phi^{-1}(x)) J(\psi \circ \phi^{-1})(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

Esto implica que

$$f(x) = g(\psi \circ \phi^{-1}(x)) J(\psi \circ \phi^{-1})(x) \quad \text{para todo } x \in \phi(U \cap V).$$

Basta entonces comprobar lo siguiente, para  $g$  suave pero arbitraria:

$$\int_{\psi(U \cap V)} g(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^n = \int_{\phi(U \cap V)} g(\psi \circ \phi^{-1}(x)) J(\psi \circ \phi^{-1})(x) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n.$$

(3.9)

Esta fórmula es la regla usual de cambio de variable en integrales múltiples, *toda vez que el jacobiano aparece a la derecha en valor absoluto*. Al ser  $(M, \nu)$  una variedad orientada, es necesario y suficiente exigir que su atlas sea compatible con la orientación, esto es, que *todos los jacobianos sean positivos*. En efecto, por las Proposiciones 3.3 y 3.6, se puede suponer que  $J(\psi \circ \phi^{-1})(x) > 0$  en (3.9), sin perder generalidad. *El contexto apropiado para definir integrales de  $n$ -formas es el de una variedad orientada  $(M, \nu)$ .*

**Definición 3.15.** Sea  $(M, \nu)$  una variedad orientada. Sea  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$  un atlas de  $M$  cuyas funciones de transición tienen jacobianos positivos, y que además cumple  $\nu|_{U_\alpha} = f_\alpha dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$  con  $f_\alpha > 0$  en  $C^\infty(U_\alpha)$  para cada carta local. Sea  $\{h_\alpha : \alpha \in A\}$  una partición de la unidad suave y localmente finita con  $\text{sop}(h_\alpha) \subset U_\alpha$  para cada  $\alpha \in A$ . Si  $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$ , entonces  $\omega = \sum_\alpha h_\alpha \omega$ . No es difícil comprobar que la suma  $\sum_\alpha \int_{U_\alpha} (h_\alpha \omega)$  no depende de la partición de la unidad empleada. Entonces se define la **integral** de la  $n$ -forma  $\omega$  sobre  $M$  (relativa a la orientación dada) por

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} (h_\alpha \omega).$$

◇

**Proposición 3.16** (Cambio de variables). Sean  $(M, \nu)$  y  $(N, \rho)$  dos variedades orientadas de la misma dimensión  $n$  y sea  $\tau: M \rightarrow N$  un difeomorfismo que preserva la orientación: es decir,  $\tau^* \rho \sim \nu$  en el sentido de la Definición 3.9. La integral sobre  $M$  del pullback de una  $n$ -forma coincide con su integral original sobre  $N$ :

$$\int_M \tau^* \eta = \int_N \eta \quad \text{para todo } \eta \in \mathcal{A}^n(N). \quad (3.10)$$

*Demostración.* Si  $(V, \psi)$  es una carta local para  $N$ , sea  $(U, \phi)$  una carta local para  $M$  tal que  $\tau(U) = V$ ; escríbase  $\theta := \psi \circ \tau \circ \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow \psi(V)$ . La igualdad  $\tau^* \rho \sim \nu$  implica que es posible elegir estas cartas – en atlas apropiados para  $M$  y  $N$  – de tal manera que el jacobiano  $J\theta$  sea positivo.

Sea  $\eta|_V = g(y) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n$  la expresión local de  $\eta$  en  $V$ . Entonces la expresión local de  $\tau^* \eta$  en  $U$  es

$$\tau^* \eta|_U = g(\theta(x)) J\theta(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \text{donde } x = \theta^{-1}(y).$$

Ahora la regla (3.9) de cambio de variable en integrales múltiples muestra que

$$\int_V \eta = \int_{\psi(V)} g(y) dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^n = \int_{\phi(U)} g(\theta(x)) J\theta(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \int_U \tau^* \eta.$$

El resultado sigue de la Definición 3.15, al emplear una partición de la unidad  $\{h_\alpha\}_{\alpha \in A}$  sobre  $N$ ; su preimagen  $\{h_\alpha \circ \tau\}_{\alpha \in A}$  es otra partición de la unidad sobre  $M$ .  $\square$

Fíjese bien que la “fórmula de cambio de variables” (3.10) es concordante con la fórmula (3.7) que define la integral en una carta local. En efecto, si  $\nu_0 = dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$  es la orientación usual de  $\mathbb{R}^n$ , entonces  $\phi: U \rightarrow \phi(U)$  es un difeomorfismo tal que  $\nu|_U \sim \phi^{-1}(\nu_0|_{\phi(U)})$  en la situación de la Definición 3.14. En otras palabras, (3.7) es un caso particular de la fórmula general (3.10).

### 3.3. Símplices y cadenas

El cálculo de *integrales múltiples* en abiertos de algún  $\mathbb{R}^n$  fue generalizado por la Definiciones 3.14 y (3.15) a la integración de  $n$ -formas sobre variedad orientada  $M$  de dimensión  $n$ . Se debe tomar particular nota de la fórmula (3.9) de cambio de variable, que muestra que la integral no depende de la parametrización usada, toda vez que esta sea compatible con la orientación de  $M$ .

En cambio, para las *integrales de línea* y las *integrales de superficie*, generalizadas a casos de  $n$  variables, los integrandos son  $k$ -formas con  $k < n$ . Por consiguiente, sus *regiones de integración* deben ser también  $k$ -dimensionales. (No es necesario que estas sean subvariedades de la variedad ambiente  $M$ .) En esta sección se investigará la naturaleza de tales regiones de integración.

► Conviene empezar con regiones poligonales en  $\mathbb{R}^n$ , para luego generalizarlas mediante cambios de parametrización.

**Definición 3.17.** Un conjunto finito  $\{p_0, p_1, \dots, p_k\}$  de puntos en  $\mathbb{R}^n$  es **afínmente independiente** si las diferencias  $p_1 - p_0, p_2 - p_0, \dots, p_k - p_0$  son vectores *linealmente independientes*. (Para eso, es necesario que  $k \leq n$ .) Una **combinación afín** de los puntos  $p_i$  es una suma de la forma

$$\sum_{i=0}^k t_i p_i = t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_k p_k \quad \text{con} \quad \underline{t_0 + t_1 + \dots + t_k = 1}.$$

Una **combinación convexa** de los puntos  $p_i$  es una combinación afín con coeficientes no negativos:

$$\sum_{i=0}^k t_i p_i = t_0 p_0 + t_1 p_1 + \dots + t_k p_k, \quad \text{con} \quad \sum_{i=0}^k t_i = 1 \quad \text{y cada} \quad \underline{t_i \geq 0}. \quad (3.11)$$

Una parte  $C \subseteq \mathbb{R}^n$  es **convexa** si incluye el *segmento*

$$[x, y] \equiv \{ (1 - t)x + ty : 0 \leq t \leq 1 \}$$

que una cualquier par de sus puntos:  $x, y \in C \implies [x, y] \subseteq C$ . La totalidad de las combinaciones convexas (3.11) del conjunto finito  $\{p_0, p_1, \dots, p_k\}$  es obviamente convexa; esta es su **envoltura convexa**,<sup>6</sup> denotado por  $[p_0, p_1, \dots, p_k]$  o  $\Delta(p_0, \dots, p_k)$ .  $\diamond$

**Definición 3.18.** Un  $k$ -**símplice**<sup>7</sup> en  $\mathbb{R}^n$  es la envoltura convexa  $\sigma := \Delta(p_0, \dots, p_k)$  de  $(k + 1)$  puntos afínmente independientes en  $\mathbb{R}^n$ .

El  $k$ -**símplice estándar** en  $\mathbb{R}^n$  es

$$\underline{\Delta}^k := \Delta(0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k), \quad (3.12)$$

donde  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$  son los primeros  $k$  vectores de la base estándar de  $\mathbb{R}^n$ .

Se identifica  $\mathbb{R}^n$  con el subespacio  $\text{lin}\langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , de esa manera,  $\Delta^k$  no depende del espacio ambiente  $\mathbb{R}^n$  siempre y cuando  $n \geq k$ .  $\diamond$

<sup>6</sup>Una definición equivalente de la envoltura convexa de  $C$  es: la intersección de todos los conjuntos convexos  $C' \subseteq \mathbb{R}^n$  tales que  $C \subseteq C'$ .

<sup>7</sup>Algunos libros escriben *simplex* (del Nuevo Latín; su plural es *simplicia*) en vez de “símplice”.

**Definición 3.19.** Una  $k$ -cadena simplicial en  $\mathbb{R}^n$  es una suma formal de  $k$ -símplices con coeficientes enteros:

$$C = a_1\sigma_1 + \cdots + a_r\sigma_r, \quad \text{con } a_1, \dots, a_r \in \mathbb{Z},$$

donde  $\sigma_1, \dots, \sigma_r$  son  $k$ -símplices en  $\mathbb{R}^n$ . La totalidad de tales  $k$ -cadenas simpliciales, denotada por  $S_k(\mathbb{R}^n)$ , es el  $\mathbb{Z}$ -módulo (o grupo abeliano libre) generado por todos los  $k$ -símplices en  $\mathbb{R}^n$ .

El **borde** de un  $k$ -símplice  $\sigma = \Delta(p_0, \dots, p_k)$  es la  $(k - 1)$ -cadena simplicial siguiente:

$$\partial\sigma := \sum_{j=0}^k (-1)^j \Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_j, \dots, p_k). \tag{3.13}$$

Se extiende  $\partial$  por  $\mathbb{Z}$ -linealidad a las  $k$ -cadenas:

$$\partial(a_1\sigma_1 + \cdots + a_r\sigma_r) := a_1\partial\sigma_1 + \cdots + a_r\partial\sigma_r.$$

De esta manera,  $\partial: S_k(\mathbb{R}^n) \rightarrow S_{k-1}(\mathbb{R}^n)$  es un homomorfismo de grupos abelianos. En el caso  $k = 0$ , se define  $\partial\Delta(p_0) := 0$ , el cero del grupo trivial  $S_{-1}(\mathbb{R}^n) := \{0\}$ .  $\diamond$

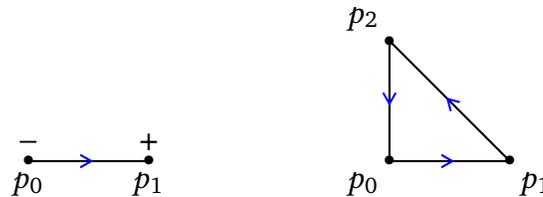


Figura 3.1: Un 1-símplice y un 2-símplice con sus bordes

**Ejemplo 3.20.** Un 0-símplice  $\Delta(p_0)$  es el punto  $\{p_0\} \subset \mathbb{R}^n$ . El 0-símplice estándar es el origen:  $\Delta^0 = \{0\}$ .

Un 1-símplice  $\Delta(p_0, p_1)$  es el segmento  $[p_0, p_1]$ . Su borde es la diferencia  $\partial\Delta(p_0, p_1) = \Delta(p_1) - \Delta(p_0)$ . Fíjese que  $\partial\Delta(p_1, p_0) = -\partial\Delta(p_0, p_1)$ ; ese cambio de signo se indica, en la Figura 3.1, al decorar  $[p_0, p_1]$  con una flecha de  $p_0$  a  $p_1$ .  $\diamond$

**Ejemplo 3.21.** Un 2-símplice es un triángulo  $\Delta(p_0, p_1, p_2) = [p_0, p_1, p_2]$ . Su borde es

$$\begin{aligned} \partial\Delta(p_0, p_1, p_2) &= \Delta(p_1, p_2) - \Delta(p_0, p_2) + \Delta(p_0, p_1) \\ &= \Delta(p_1, p_2) + \Delta(p_2, p_0) + \Delta(p_0, p_1). \end{aligned} \tag{3.14}$$

Esta es la suma formal de sus tres lados, recorridos en el sentido determinado por la orientación inicial de sus vértices: véase la Figura 3.1.  $\diamond$

En la fórmula (3.14), se ha escrito  $\Delta(p_2, p_0) = -\Delta(p_0, p_2)$ , en vista de la igualdad  $\partial\Delta(p_2, p_0) = -\partial\Delta(p_0, p_2)$  en el ejemplo anterior. Resulta conveniente, entonces, adoptar el *convenio de signo* de que una permutación  $\pi$  de los vértices de un  $k$ -símplice preserva o revierte su signo, según sea  $\pi$  para o impar:

$$\Delta(p_{\pi(0)}, p_{\pi(1)}, \dots, p_{\pi(k)}) = (-1)^\pi \Delta(p_0, \dots, p_k) \quad \text{para } \pi \in S_{k+1}. \quad (3.15)$$

El signo de un  $k$ -símplice, *considerado como una  $k$ -cadena con un solo término*, tiene una interpretación geométrica. Es posible cambiar el orden de los vértices mediante un número finito de *reflexiones* de  $\mathbb{R}^n$  que intercambian dos vértices mientras dejan fijos los demás. Sea  $\pi \in S_{k+1}$  el producto correspondiente de transposiciones de los vértices. El producto de las reflexiones modifica la forma de volumen  $v$  de  $\mathbb{R}^n$  en  $(-1)^\pi v$ . Por lo tanto, el signo en (3.15) es  $+1$  si y solo si la reenumeración de los vértices *preserva la orientación dada* de  $\mathbb{R}^n$ .

**Ejemplo 3.22.** El borde del  $k$ -símplice estándar  $\Delta^k$  es

$$\underline{\partial\Delta^k} = \Delta(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) + \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^j \Delta(0, \mathbf{e}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_j, \dots, \mathbf{e}_k) + (-1)^k \Delta^{k-1}. \quad (3.16)$$

En particular,  $\partial\Delta^1 = \Delta(\mathbf{e}_1) - \Delta^0$ ; y además  $\partial\Delta^2 = \Delta(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) - \Delta(0, \mathbf{e}_2) + \Delta^1$ .  $\diamond$

**Lema 3.23.** Si  $C \in S_k(\mathbb{R}^n)$  es una  $k$ -cadena simplicial, entonces  $\underline{\partial(\partial C)} = 0$  en  $S_{k-2}(\mathbb{R}^n)$ .

*Demostración.* Basta comprobar que  $\partial(\partial\sigma) = 0$  para un  $k$ -símplice  $\sigma = \Delta(p_0, \dots, p_k)$ :

$$\begin{aligned} \partial(\partial\sigma) &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \partial\Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_j, \dots, p_k) \\ &= \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_i, \dots, \widehat{p}_j, \dots, p_k) + \sum_{i > j} (-1)^{i-1+j} \Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_j, \dots, \widehat{p}_i, \dots, p_k) \\ &= \sum_{i < j} ((-1)^{i+j} + (-1)^{j-1+i}) \Delta(p_0, \dots, \widehat{p}_i, \dots, \widehat{p}_j, \dots, p_k) = 0 \quad \text{por cancelación.} \end{aligned}$$

En la primera sumatoria del segundo renglón, hay  $i$  vértices antes de  $p_i$ , mientras que en la segunda hay  $(i-1)$  vértices antes de  $p_i$ . Es oportuno reorganizar la segunda sumatoria con el cambio de índices  $i \leftrightarrow j$ . Entonces, entre las dos sumatorias, se repiten los términos con signos opuestos.  $\square$

Todos los  $k$ -símplices en  $\mathbb{R}^k$  están relacionados mediante transformaciones afines de  $\mathbb{R}^k$ .  $\llbracket$  Una *transformación afín* de  $\mathbb{R}^k$  es una biyección que lleva rectas en rectas; como

tal, es la composición de una aplicación lineal invertible y una traslación,  $x \mapsto Ax + v$  con  $A \in GL(k, \mathbb{R})$ ,  $v \in \mathbb{R}^k$ . ] En efecto, si  $p_0, \dots, p_k$  son afínmente independientes, hay una única transformación afín  $s$  de  $\mathbb{R}^k$  tal que  $s(e_j) = p_j$  para  $j = 0, \dots, k$ . En consecuencia,

$$s(\Delta^k) = \Delta(p_0, \dots, p_k).$$

En otras palabras, la imagen del  $\Delta^k$  bajo  $s$  es el conjunto convexo  $[p_0, \dots, p_k]$ ; y si  $s(x) \equiv Ax + v$ , el signo  $\pm 1$  de  $\Delta(p_0, \dots, p_k)$  es el signo de  $(\det A)$ .

La fórmula (3.16) para el borde del  $k$ -símplice estándar se puede abreviar como

$$\partial\Delta^k = \sum_{j=0}^k (-1)^j s_j^k(\Delta^{k-1}), \tag{3.17a}$$

donde las **aplicaciones faciales**  $s_j^k: \mathbb{R}^{k-1} \rightarrow \mathbb{R}^k$ , para  $j = 0, \dots, k$ , son las aplicaciones afines determinadas por los vértices, de esta manera:

$$s_j^k(0) := \begin{cases} 0 & \text{si } j > 0, \\ \mathbf{e}_1 & \text{si } j = 0, \end{cases} \quad s_j^k(\mathbf{e}_i) := \begin{cases} \mathbf{e}_i & \text{si } i < j, \\ \mathbf{e}_{i+1} & \text{si } i \geq j. \end{cases} \tag{3.17b}$$

Nótese que  $s_k^k = 1_k$  es la aplicación identidad sobre  $\mathbb{R}^k$ . Además, la lista de vértices  $\{s_j^k(0), s_j^k(\mathbf{e}_1), \dots, s_j^k(\mathbf{e}_{k-1})\}$  omite el vértice  $\mathbf{e}_j$  de  $\Delta^k$ ; entonces, el símplice  $s_j^k(\Delta^{k-1})$  es la **faceta** de  $\Delta^k$  opuesto al vértice  $\mathbf{e}_j$ . La cadena  $\partial\Delta^k$  es la suma alternada de estas facetas.

► Los dominios de integración de  $k$ -formas sobre una variedad generalmente no son cadenas simpliciales, pero comparten la estructura combinatoria de esas cadenas. Una generalización apropiada de las cadenas simpliciales consiste en reemplazar las imágenes afines de los  $\Delta^k$  por sus imágenes bajo funciones suaves.<sup>8</sup>

**Definición 3.24.** Sea  $M$  una variedad diferencial. Si  $k \in \mathbb{N}$ , un  **$k$ -símplice singular** (suave) es una *función suave*  $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$  cualquiera. (Por función suave con dominio  $\Delta^k$ , se entiende la restricción a  $\Delta^k$  de una función suave  $\sigma: V \rightarrow M$  cuyo dominio es un abierto  $V$  con  $\Delta^k \subset V \subseteq \mathbb{R}^k$ .)

Una  **$k$ -cadena singular** (suave) en  $M$ , con coeficientes reales, es una suma finita formal  $c = \sum_{i=1}^r a_i \sigma_i$ , con  $a_i \in \mathbb{R}$ , donde los  $\sigma_i$  son  $k$ -símplices singulares (suaves) en  $M$ . La totalidad de  $k$ -cadenas singulares en  $M$  se denotará por  $S_k(M, \mathbb{R})$ ; este es el espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial generado por los  $k$ -símplices singulares.  $\diamond$

<sup>8</sup>Habría más flexibilidad si se usara imágenes *continuas* de los  $\Delta^k$  en vez de imágenes suaves solamente. Eso permitiría considerar dominios de integración menos regulares, si fuera necesario.

**Definición 3.25.** El **borde** de un  $k$ -símplice singular  $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$  es la  $(k-1)$ -cadena singular definido por

$$\partial\sigma := \sum_{j=0}^k (-1)^j \sigma \circ s_j^k : \Delta^{k-1} \rightarrow M, \quad (3.18)$$

donde las aplicaciones faciales (3.17b) se interpretan como funciones  $s_j^k: \Delta^{k-1} \rightarrow \Delta^k$ .

Al extender (3.18) por linealidad, se obtiene el borde de una  $k$ -cadena singular:

$$c = \sum_{i=1}^r a_i \sigma_i \implies \partial c := \sum_{i=1}^r a_i \partial \sigma_i.$$

Entonces (3.18) define una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal  $\partial: S_k(M, \mathbb{R}) \rightarrow S_{k-1}(M, \mathbb{R})$ .

Un 0-símplice singular es un *punto* de  $M$ : si  $p \in M$ , se identifica  $p$  con la única función  $\sigma: \Delta^0 \rightarrow M$  tal que  $\sigma(\Delta^0) = p$ . Como  $\partial\Delta^0 = 0$  por regla, se declara que  $S_{-1}(M, \mathbb{R}) := \{0\}$  y se pone  $\partial c := 0$  para  $c \in S_0(M, \mathbb{R})$ .  $\diamond$

**Lema 3.26.** Si  $c \in S_k(M, \mathbb{R})$  es una  $k$ -cadena singular, entonces

$$\partial(\partial c) = 0 \quad \text{en } S_{k-2}(M, \mathbb{R}).$$

*Demostración.* A partir de las fórmulas (3.17) y (3.18), la demostración del Lema 3.23 se traduce directamente en un cálculo que da  $\partial(\partial\sigma) = 0$  por cancelación. Por linealidad, se obtiene  $\partial(\partial c) = 0$  para una  $k$ -cadena  $c$  cualquiera.  $\square$

**Definición 3.27.** Un  **$k$ -ciclo singular** es una  $k$ -cadena singular  $c$  tal que  $\partial c = 0$ . La totalidad de  $k$ -ciclos es un subespacio  $\mathbb{R}$ -vectorial de  $S_k(M, \mathbb{R})$ , denotado por

$$\underline{Z}_k(M, \mathbb{R}) := \{ c \in S_k(M, \mathbb{R}) : \partial c = 0 \}.$$

En particular, se ve que  $Z_0(M, \mathbb{R}) = S_0(M, \mathbb{R})$ .

Un  **$k$ -borde singular** es el borde de una  $(k+1)$ -cadena singular; el subespacio

$$\underline{B}_k(M, \mathbb{R}) := \{ \partial b : b \in S_{k+1}(M, \mathbb{R}) \}$$

de los  $k$ -bordes cumple  $B_k(M, \mathbb{R}) \subseteq Z_k(M, \mathbb{R})$  para todo  $k$ , por la relación  $\partial(\partial c) = 0$ .

El espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial cociente

$$\underline{H}_k(M, \mathbb{R}) := \underline{Z}_k(M, \mathbb{R}) / \underline{B}_k(M, \mathbb{R})$$

es el  $k$ -ésimo espacio<sup>9</sup> de **homología singular real** de la variedad  $M$ .  $\diamond$

<sup>9</sup>Los  $H_k(M, \mathbb{R})$  también se llaman *grupos* (abelianos) de homología, en vez de “espacios vectoriales”.

Los  $S_k(M, \mathbb{R})$  forman un **complejo**: una sucesión de espacios vectoriales ligados por aplicaciones lineales  $\partial$  tales que  $\partial \circ \partial = 0$  en cada caso:

$$\cdots \xrightarrow{\partial} S_{k+1}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} S_k(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} S_{k-1}(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} S_0(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\partial} 0. \quad (3.19)$$

[[ El contexto general que abarca el concepto de un *complejo* es el siguiente. Dado un anillo conmutativo  $R$  cualquiera, se define un complejo  $C_\bullet = \{C_k : k \in \mathbb{Z}\}$  como una sucesión de  $R$ -módulos (en algunos casos con  $C_k = 0$  para  $k < 0$ ) dotado con una familia de  $R$ -homomorfismos  $\partial: C_k \rightarrow C_{k-1}$  tales que  $\partial \circ \partial = 0 : C_k \rightarrow C_{k-2}$  en cada caso. Se identifica dos  $R$ -submódulos de cada  $C_k$ : los  **$k$ -ciclos**  $Z_k := \ker(\partial: C_k \rightarrow C_{k-1})$  y los  **$k$ -bordes**  $B_k := \text{im}(\partial: C_{k+1} \rightarrow C_k)$ . La condición  $\partial \circ \partial = 0$  implica que  $B_k \subseteq Z_k$ . Los  $R$ -módulos cocientes  $H_k := Z_k/B_k$  forman la **homología** del complejo  $C_\bullet$ .

En particular, se puede replantear las cadenas singulares con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  en vez de  $\mathbb{R}$ ; tales cadenas forman un complejo de grupos abelianos ( $\mathbb{Z}$ -módulos). Los grupos abelianos  $H_k(M, \mathbb{Z})$ , para  $k \in \mathbb{N}$ , forman la *homología singular* de  $M$  (sin adjetivo calificativo); ellos podrían tener subgrupos de torsión, en contraste con los  $H_k(M, \mathbb{R})$ . ]]

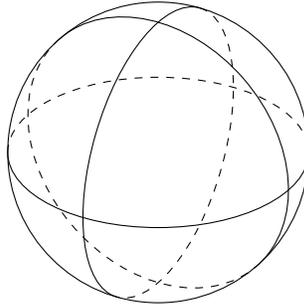


Figura 3.2: Una triangulación de la esfera  $S^2$

**Ejemplo 3.28.** Considérese la 2-cadena singular en  $S^2$ :

$$c = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5 + \sigma_6 + \sigma_7 + \sigma_8$$

cuyos  $\sigma_i$  son los triángulos esféricos formados por las intersecciones de  $S^2$  con los octantes  $x^j \geq 0$  de  $\mathbb{R}^3$ . Se recorren sus vértices en el orden contrario a reloj, visto desde el punto diagonal  $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$  del octante correspondiente (véase la Figura 3.2). El borde  $\partial c$  es una suma de arcos orientados, de un cuarto de gran círculo cada uno, sobre los gran círculos  $x^1 = 0$ ,  $x^2 = 0$  y  $x^3 = 0$ . Resulta que estos arcos orientados se cancelan en pares, y por ende  $c \in Z_2(S^2, \mathbb{R})$ . Nótese que la unión de los triángulos colindantes es todo  $S^2$ . Se puede mostrar que  $B_2(S^2, \mathbb{R}) = \{0\}$ , así que  $[c] \neq 0$  en  $H_2(S^2, \mathbb{R})$ .

Sucede que  $H_2(S^2, \mathbb{R}) = H_0(S^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$  y que  $H_k(S^2, \mathbb{R}) = 0$  para  $k = 1$  o  $k \geq 3$ .

La igualdad  $H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$  dice que  $\mathbb{S}^2$  es conexo por arcos. Si  $p, q \in \mathbb{S}^2$ , la diferencia  $\{p\} - \{q\}$  es el borde de un arco de círculo  $\gamma \in S_1(\mathbb{S}^2, \mathbb{R})$  que va desde  $q$  a  $p$ . Por lo tanto,  $\{p\} - \{q\} = \partial\gamma \in B_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{R})$ ; pero el singulete  $\{p\}$  no es el borde de un arco. Entonces  $\{p\}$  representa un elemento no cero  $H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{R})$ , mientras  $\{p\} - \{q\}$  representa el cero de este espacio cociente, así que  $[p] = [q]$ . En resumen,  $H_0(\mathbb{S}^2, \mathbb{R}) = \mathbb{R} [p] \simeq \mathbb{R}$ .

En general, si  $M$  es una variedad diferencial con  $m$  componentes conexos (por arcos), entonces  $H_0(M, \mathbb{R}) \simeq \mathbb{R}^m$ .  $\diamond$

► Después de estos prolegómenos, ya se puede plantear la integral de una  $k$ -forma sobre la “región de integración” dada por una  $k$ -cadena singular.

**Definición 3.29.** Sea  $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$  un  $k$ -símplice singular en una variedad diferencial  $M$  y sea  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$  una  $k$ -forma (con  $k \leq \dim M$ ). Hay un abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^k$  con  $\Delta^k \subset V$  al cual  $\sigma$  se extiende como aplicación suave  $\sigma: V \rightarrow M$ . Entonces  $\sigma^*\omega \in \mathcal{A}^k(V)$  posee una integral dada por la Definición 3.13. La **integral de  $\omega$  sobre  $\sigma$**  se define por

$$\boxed{\int_{\sigma} \omega := \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega.} \quad (3.20a)$$

Si  $\sigma^*\omega = g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^k \in \mathcal{A}^k(V)$ , el lado derecho es una integral iterada:

$$\int_{\Delta^k} \sigma^* \omega := \int_0^1 \int_0^{1-x^k} \dots \int_0^{1-x^2-\dots-x^k} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^k. \quad (3.20b)$$

Es importante notar que el lado derecho de (3.20a) no depende de la extensión de  $\sigma$  al abierto  $V$  que incluye  $\Delta^k$ . En efecto, si  $\tau: V' \rightarrow V$  es un difeomorfismo de  $V$  en otro abierto que incluye  $\Delta^k$ , tal que  $\tau(x) = x$  para todo  $x \in \Delta^k$ , entonces

$$\int_{\Delta^k} (\sigma \circ \tau)^* \omega = \int_{\Delta^k} \tau^*(\sigma^* \omega) = \int_{\Delta^k} \sigma^* \omega$$

por la Proposición 3.16, porque la restricción a  $\Delta^k$  del difeomorfismo  $\tau: V' \rightarrow V$  es la aplicación idéntica  $1_{\Delta^k}: \Delta^k \rightarrow \Delta^k$ .

Si  $c = \sum_{i=1}^r a_i \sigma_i$  es una  $k$ -cadena singular en  $M$ , se define  $\int_c \omega$  al extender (3.20a) por linealidad. De esta manera,  $c \mapsto \int_c \omega$  es un funcional lineal sobre  $S_k(M, \mathbb{R})$ , al poner

$$\int_c \omega := \sum_{i=1}^r a_i \int_{\sigma_i} \omega. \quad \diamond$$

*Observación.* Una **triangulación** de la variedad orientable  $M$  es un  $n$ -ciclo  $c = \sum_i \pm \sigma_i$  sobre  $M$  tal que  $M = \bigcup_i \sigma_i(\Delta^n)$  y tal que las expresiones locales  $\phi_\alpha \circ \sigma_i$  con respecto a un atlas compatible con la orientación tengan jacobianos positivos. Un teorema no trivial de la topología algebraica asegura que cada variedad orientable *compacta* admite una triangulación.<sup>10</sup> También es posible, mediante un proceso llamado *subdivisión baricéntrica*, refinar una triangulación dada para obtener otra más fina, en la cual que cada símplice esté incluido en el dominio de alguna carta local de  $M$ . (La subdivisión baricéntrica conserva la homología singular de  $M$ .) El resultado de este proceso es que la integral  $\int_c \omega$  de una  $n$ -forma  $\omega$  puede evaluarse por cálculos con coordenadas locales.

### 3.4. El teorema de Stokes

Las formas diferenciales y cadenas singulares permiten unificar diversos teoremas del “análisis vectorial” en un solo enunciado: el *teorema de Stokes*. El paso esencial en su prueba es la invocación del *teorema fundamental del cálculo* unidimensional, esto es, la fórmula conocida  $\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a)$ . A la vez, el lenguaje de formas y cadenas señala que el teorema de Stokes es esencialmente un teorema de dualidad.

**Teorema 3.30** (Stokes). *Sea  $M$  una variedad diferencial de dimensión  $n$ ; sea  $c \in S_k(M, \mathbb{R})$  una  $k$ -cadena singular suave sobre  $M$  con  $k \in \{1, \dots, n\}$ ; y sea  $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$  una forma diferencial sobre  $M$  de grado  $(k - 1)$ . Entonces la siguiente igualdad es válida:*

$$\boxed{\int_{\partial c} \eta = \int_c d\eta.} \tag{3.21}$$

*Demostración.* Los dos lados de (3.21) son lineales en  $c$ , así que basta comprobar esta ecuación cuando  $c = \sigma$  es un  $k$ -símplice singular suave. Se debe mostrar que

$$\int_{\partial \Delta_k} \sigma^* \eta = \int_{\Delta_k} \sigma^*(d\eta) = \int_{\Delta_k} d(\sigma^* \eta) \tag{3.22}$$

para todo  $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ . Aquí  $\sigma^* \eta$  es una  $(k-1)$ -forma diferencial definido en un abierto  $V$  con  $\Delta^k \subset V \subseteq \mathbb{R}^k$ , que tiene la siguiente expresión en las coordenadas cartesianas de  $\mathbb{R}^k$ :

$$\sigma^* \eta = \sum_{j=1}^k g_j(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \dots \wedge dx^k.$$

---

<sup>10</sup>En la categoría más amplia de variedades diferenciales con borde, las triangulaciones son cadenas pero no necesariamente son ciclos.

Por la linealidad en  $\eta$  de los tres términos en (3.22), basta considerar el caso de un solo sumando al lado derecho; entonces se puede suponer que

$$\sigma^* \eta = g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1}.$$

(Los otros sumandos son análogos, después de una permutación cíclica de las variables  $x^j$  y un cambio de la función coeficiente.) La derivada exterior de esta expresión es

$$\begin{aligned} \sigma^*(d\eta) &= d(\sigma^* \eta) = \frac{\partial g}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^k) dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{\partial g}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \wedge dx^k. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por otro lado, la fórmula (3.16) dice que el borde  $\partial\Delta^k$  es una cadena  $\sum_{j=0}^k (-1)^j \sigma_j$ , la suma alternada de  $(k+1)$  símlices de dimensión  $(k-1)$ ; la primera de estas facetas es

$$\sigma_0 = \Delta(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k) = \{ (x^1, \dots, x^{k-1}, 1 - \sum_{j=1}^{k-1} x^j) : (x^1, \dots, x^{k-1}) \in \Delta^{k-1} \}.$$

Esta es la parte del hiperplano  $x^1 + \dots + x^k = 1$  con coordenadas no negativas. La última faceta es  $\sigma_k = \Delta_{k-1}$ . También hay facetas intermedias  $\sigma_j = \Delta(0, \mathbf{e}_1, \dots, \widehat{\mathbf{e}}_j, \dots, \mathbf{e}_k)$  en los hiperplanos  $x^j = 0$ , para  $j \in \{1, \dots, k-1\}$ .

Al combinar las fórmulas anteriores, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k} \sigma^*(d\eta) &\stackrel{(3.23)}{=} \int_{\Delta_k} \frac{\partial g}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^k) dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \\ &\stackrel{(3.20)}{=} \int_0^1 \int_0^{1-x^1} \dots \int_0^{1-x^1-\dots-x^{k-1}} \frac{\partial g}{\partial x^k}(x^1, \dots, x^k) dx^k \wedge dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \\ &\stackrel{(a)}{=} \int_{\Delta^{k-1}} (g(x^1, \dots, x^{k-1}, 1 - \sum_{j=1}^{k-1} x^j) - g(x^1, \dots, x^{k-1}, 0)) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \\ &\stackrel{(b)}{=} \int_{\Delta(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k)} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \\ &\quad - (-1)^{k-1} \int_{\Delta(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k-1}, 0)} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} \\ &\stackrel{(c)}{=} \int_{\partial\Delta_{k-1}} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1} = \int_{\partial\Delta_{k-1}} \sigma^* \eta. \end{aligned}$$

La igualdad (a) viene del teorema fundamental del cálculo en una variable. En la (b), las regiones de integración son las facetas  $\sigma_0$  y  $\sigma_k$  de  $\partial\Delta^k$ . Sobre las otras facetas  $\sigma_j$ , los integrales  $\int_{\sigma_j} g(x^1, \dots, x^k) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{k-1}$  valen 0 porque la coordenada  $x^j$  es constante y por ende  $dx^j = 0$  a lo largo de  $\sigma_j$ ; la igualdad (c) queda establecida.  $\square$

**Ejemplo 3.31.** Este “teorema de Stokes” generaliza varios resultados clásicos del llamado análisis vectorial. Por ejemplo, si  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una curva suave y si  $F: V \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función de clase  $C^1$  definido en un abierto  $V$  con  $\gamma([a, b]) \subset V \subseteq \mathbb{R}^n$ , la **integral de línea** de  $F$  sobre la curva  $\gamma$  es igual a

$$\int_{\gamma} F \cdot d\mathbf{r} \equiv \int_{\gamma} F_j dx^j = \int_{[a,b]} \gamma^*(F_j dx^j) = \int_a^b F_j(\gamma(t)) (\gamma^j)'(t) dt \equiv \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

La curva  $\gamma$  es un 1-símplice singular. Si existe una *función potencial*  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $F = \nabla v$  (es decir,  $F_j = \partial v / \partial x^j$  para cada  $j$ ), entonces

$$\int_{\gamma} F \cdot d\mathbf{r} = \int_{\gamma} \frac{\partial v}{\partial x^j} dx^j = \int_{\gamma} dv = \int_{\gamma} v \equiv v(\gamma(b)) - v(\gamma(a)).$$

porque el borde de  $\gamma$  es la 0-cadena singular  $\partial\gamma := \{\gamma(b)\} - \{\gamma(a)\}$ . La parametrización de la curva reduce este caso del teorema de Stokes a una instancia del teorema fundamental del cálculo unidimensional:

$$\int_a^b \frac{d}{dt} [v(\gamma(t))] dt = v(\gamma(b)) - v(\gamma(a)). \quad \diamond$$

**Ejemplo 3.32** (Teorema de Green). Sea  $R$  una región abierta del plano  $\mathbb{R}^2$  cuya frontera  $C$  es suave por trozos. Si  $P, Q: V \rightarrow \mathbb{R}$  son dos funciones de clase  $C^1$  definidos en un abierto  $V$  tal que  $\bar{R} \subset V \subseteq \mathbb{R}^2$ , entonces

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy. \quad (3.24)$$

En efecto, si  $\alpha := P dx + Q dy \in \mathcal{A}^1(V)$ , entonces

$$d\alpha = \frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy = \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy,$$

así que el lado derecho de (3.24) es  $\int_R d\alpha$ .

Ahora bien, la clausura  $\bar{R}$  admite una *triangulación*:  $\bar{R} = \sigma_1(\Delta^2) \cup \dots \cup \sigma_r(\Delta^2)$  es una unión finita de conjuntos difeomorfos a triángulos que no traslapan.<sup>11</sup> La 2-cadena singular  $c = \sigma_1 + \dots + \sigma_r$  tiene borde  $\partial c = \partial\sigma_1 + \dots + \partial\sigma_r$  que cumple  $\partial c(\Delta^1) = C$ . En la suma orientada de los  $\partial\sigma_i(\Delta^1)$ , hay arcos de “fronteras internas” que se cancelan en pares mientras los restantes arcos constituyen la frontera  $C$  de  $R$  con recorrido positivo.

El lado izquierdo de (3.24) entonces es  $\int_{\partial c} \alpha$ ; la igualdad de los dos lados es un caso del teorema de Stokes. El 1-borde  $\partial c$  es también un 1-ciclo singular: su imagen  $\partial c(\Delta^1) = C$  es la unión de una o varias *curvas cerradas* en  $V$ . Véase la Figura 3.3.  $\diamond$

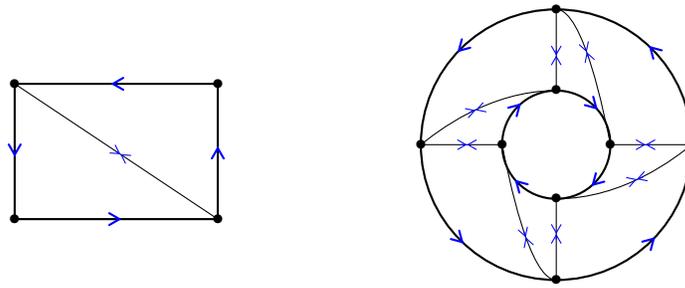


Figura 3.3: Triangulaciones de regiones del plano

► El complejo  $(S_\bullet(M, \mathbb{R}), \partial)$  de (3.19), determinado por las cadenas singulares reales y su operación de borde, puede compararse con el siguiente complejo, determinado por las formas diferenciales sobre  $M$  y la derivada exterior:

$$0 \xrightarrow{d} \mathcal{A}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{k-1}(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^k(M) \xrightarrow{d} \mathcal{A}^{k+1}(M) \xrightarrow{d} \dots \quad (3.25)$$

en vista de la propiedad  $d \circ d = 0$  del Teorema 2.27. Desde luego, este complejo es *finito*, pues  $\mathcal{A}^k(M) = \{0\}$  para  $k < 0$  o  $k > \dim M$ .

[[ Un complejo de  $R$ -módulos se puede reenumerar al poner  $C^k := C_{-k}$  y renombrar  $\partial$  por  $d: C^k \rightarrow C^{k+1}$ , con  $d \circ d = 0: C^k \rightarrow C^{k+2}$ . En el complejo  $C^\bullet = \{C^k : k \in \mathbb{Z}\}$  de  **$k$ -cocadenas** (a veces con  $C^k = 0$  para  $k < 0$ ), se identifican dos submódulos de cada  $C^k$ : los  **$k$ -cociclos**  $Z^k := \ker(d: C^k \rightarrow C^{k+1})$  y los  **$k$ -cobordes**  $B^k := \text{im}(d: C^{k-1} \rightarrow C^k)$ , siempre con  $B^k \subseteq Z^k$ . Los  $R$ -módulos cocientes  $H^k := Z^k/B^k$  forman la **cohomología** del complejo  $C^\bullet$ . ]]

**Definición 3.33.** Conviene introducir las siguientes notaciones para las  $k$ -formas cerradas y exactas, respectivamente:<sup>12</sup>

$$\underline{Z}_{\text{dR}}^k(M) := \{ \omega \in \mathcal{A}^k(M) : d\omega = 0 \}, \quad \underline{B}_{\text{dR}}^k(M) := \{ d\eta : \eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M) \}.$$

La relación  $d(d\eta) = 0$  dice que  $\underline{B}_{\text{dR}}^k(M)$  es un subespacio  $\mathbb{R}$ -vectorial de  $\underline{Z}_{\text{dR}}^k(M)$ . Los espacios vectoriales cocientes:

$$\boxed{H_{\text{dR}}^k(M) := \underline{Z}_{\text{dR}}^k(M) / \underline{B}_{\text{dR}}^k(M)} \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, \dim M \quad (3.26)$$

son los “grupos” de la **cohomología de de Rham** de la variedad  $M$ . ◇

<sup>11</sup>Dos regiones de  $\mathbb{R}^n$  no *traslapan* si su intersección bien es vacía o bien es parte de su frontera común.

<sup>12</sup>El subíndice ‘dR’ hace referencia al matemático suizo *Georges de Rham*, quien mostró en 1931 un isomorfismo canónico entre cada  $H_{\text{dR}}^k(M)$  y el espacio vectorial dual  $H_k(M, \mathbb{R})^*$ .

**Ejemplo 3.34.** El lema de Poincaré (Teorema 2.46) muestra que  $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n) = 0$  para todo  $k \geq 1$ . En efecto, para  $k \geq 1$ , toda  $k$ -forma cerrada es exacta, esto es:  $Z_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n) = B_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n)$ .

En cambio,  $Z_{\text{dR}}^0(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : df = 0\}$  consta de las *funciones constantes* (porque  $\mathbb{R}^n$  es conexo), así que  $Z_{\text{dR}}^0(\mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}$ . Como  $B_{\text{dR}}^0(\mathbb{R}^n) = \{0\}$  por definición, se obtiene

$$H_{\text{dR}}^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0, \\ \{0\} & \text{si } k \geq 1. \end{cases} \quad \diamond$$

**Definición 3.35.** Sea  $M$  una variedad diferencial. La integración sobre cadenas singulares define una forma  $\mathbb{R}$ -bilineal

$$(c, \omega) \mapsto \int_c \omega : S_k(M, \mathbb{R}) \times \mathcal{A}^k(M) \rightarrow \mathbb{R}.$$

El teorema de Stokes demuestra que el resultado es cero en estos dos casos:

- (a) Si  $\omega \in Z_{\text{dR}}^k(M)$ , entonces  $\int_{\partial b} \omega = \int_b d\omega = 0$ , para todo  $b \in S_{k+1}(M, \mathbb{R})$ . Por eso,  $\int_c \omega = 0$  toda vez que  $\omega \in Z_{\text{dR}}^k(M)$  y  $c \in B_k(M, \mathbb{R})$ .
- (b) Si  $c \in Z_k(M, \mathbb{R})$ , entonces  $\int_c d\eta = \int_{\partial c} \eta = 0$  para todo  $\eta \in \mathcal{A}^{k-1}(M)$ . Por lo tanto,  $\int_c \omega = 0$  toda vez que  $\omega \in B_{\text{dR}}^k(M)$  y  $c \in Z_k(M, \mathbb{R})$ .

En consecuencia, si  $(c, \omega) \in Z_k(M, \mathbb{R}) \times Z_{\text{dR}}^k(M)$ , el valor  $\int_c \omega$  depende solamente de las clases  $[c] \in H_k(M, \mathbb{R})$  y  $[\omega] \in H_{\text{dR}}^k(M)$ . Esto define bien una forma bilineal:

$$([c], [\omega]) \mapsto \int_c \omega : H_k(M, \mathbb{R}) \times H_{\text{dR}}^k(M) \rightarrow \mathbb{R} \quad (3.27)$$

que expresa un apareamiento entre la homología singular real de  $M$  y la cohomología de de Rham de  $M$ , mediante la integración de formas diferenciales cerradas sobre ciclos singulares del mismo grado. \(\diamond\)

El teorema de de Rham asegura que esta forma bilineal es no degenerada. Por lo tanto, induce un *isomorfismo lineal*<sup>13</sup> entre  $H_{\text{dR}}^k(M)$  y el espacio dual  $H_k(M, \mathbb{R})^*$ , para

<sup>13</sup>Estos isomorfismos (y su expresión mediante el teorema de Stokes) fueron demostrados en la tesis doctoral de Georges de Rham en 1933. Para los detalles de este teorema y su prueba, consúltese el capítulo 8 del libro de Conlon.

cada  $k \in \{0, 1, \dots, \dim M\}$ . En particular, vale  $\dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^k(M) = \dim_{\mathbb{R}} H_k(M, \mathbb{R})$  para cada  $k$  y además  $H_r(M, \mathbb{R}) = \{0\}$  para  $r > \dim M$ .

El teorema de de Rham tiene varias consecuencias. En primer lugar, la homología singular real de  $M$  solo depende de la topología de  $M$ : la generalización de  $k$ -símplices singulares a funciones *continuas*  $\sigma: \Delta^k \rightarrow M$  (no necesariamente suaves, ni definidas fuera de  $\Delta^k$ ) no cambia los espacios vectoriales  $H_k(M, \mathbb{R})$ . Los isomorfismos  $H_k(M, \mathbb{R}) \simeq H_{\text{dR}}^k(M)$  dados por (3.27) indican que los  $H_{\text{dR}}^k(M)$  son *invariantes topológicos* de  $M$ ; por ende, no depende de la estructura diferencial de  $M$ .

En muchos casos – entre ellos, las variedades compactas o contractibles – la homología singular de  $M$  es *finita*: es decir, todos los espacios vectoriales  $H_k(M, \mathbb{R})$  son finitodimensionales. En consecuencia, los espacios vectoriales  $H_{\text{dR}}^k(M)$  son *finitodimensionales*. (Por lo general, los espacios  $Z_{\text{dR}}^k(M)$  y  $B_{\text{dR}}^k(M)$  son infinitodimensionales.)

Las dimensiones

$$b_k = b_k(M) := \dim_{\mathbb{R}} H_{\text{dR}}^k(M), \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, n, \quad (3.28)$$

se llaman los **números de Betti** de  $M$ . Ellos son invariantes topológicos de  $M$ .

**Ejemplo 3.36.** El círculo  $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  tiene dimensión 1, así que  $H_{\text{dR}}^k(\mathbb{S}^1) = \{0\}$  para  $k \geq 2$ .

Nótese que  $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) = Z_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1)$  porque  $B_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) = \{0\}$ . Una 0-forma cerrada es una función suave  $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $df = 0$ ; en una carta local  $(U, \phi)$  con coordenada local  $\theta$ , vale  $df|_U = f'(\theta) d\theta = 0$ , así que  $f'(\theta) \equiv 0$  para  $\theta \in \phi(U)$ . Se deduce que la función  $f$  es localmente constante; y de hecho, por ser  $\mathbb{S}^1$  conexo,  $f$  es una función *constante*:  $f \equiv c$  para algún  $c \in \mathbb{R}$ . Se sigue que  $H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$ .

Por otro lado,  $\mathbb{S}^1$  es orientable y posee una 1-forma que no se anula. En efecto, si  $U := \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x \neq 0\}$  y  $V := \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : y \neq 0\}$ , defínase  $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^1)$  por

$$\alpha|_U := \frac{1}{x} dy, \quad \alpha|_V := -\frac{1}{y} dx,$$

al notar que  $dy/x + dx/y = d(x^2 + y^2)/(2xy) = 0$  en  $U \cap V$ . Esto dice que  $\alpha|_{U \cap V}$  no es ambiguo; y se ve que  $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^1) = Z_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1)$  no se anula. Por otro lado, cualquier 1-forma exacta sí se anula en algún punto: cada función suave  $g \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$  alcanza un valor máximo en cierto punto  $p \in \mathbb{S}^1$  porque el círculo es compacto, lo cual implica que  $(dg)_p = 0$ . Luego  $\alpha$  no puede ser exacta, así que  $[\alpha] \neq 0$  en  $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1)$ .

En las dos cartas locales del Ejemplo 1.12, se puede escribir  $(x, y) = (\cos \theta, \sin \theta)$  y se ve que  $\alpha = d\theta$  en ambas cartas. Sin embargo, esta 1-forma  $d\theta$  no es exacta, por cuanto

$\theta$  no es una función bien definida de  $\mathbb{S}^1$  en  $\mathbb{R}$ . [ Una función  $h \in C^\infty(\mathbb{R})$  define un elemento de  $C^\infty(\mathbb{S}^1)$  si y solo si  $h$  es *periódica*:  $h(t + 2\pi) \equiv h(t)$ . ] En  $U_+ = \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$ , la función  $\theta: U_+ \rightarrow (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$  sí está definida como coordenada local, y cualquier  $\beta \in \mathcal{A}^1(\mathbb{S}^1)$  cumple  $\beta|_{U_+} = g(\theta) d\theta$  para alguna función suave  $g$ . Como  $d\theta$  no se anula en  $\mathbb{S}^1$ , se obtiene  $\beta = g(\theta) d\theta$  donde  $g \in C^\infty(\mathbb{R})$  es suave y periódica, con período  $2\pi$ .

Una integral sobre  $\mathbb{S}^1$  no cambia si se quita un punto de su dominio, así que

$$\int_{\mathbb{S}^1} \alpha = \int_{\mathbb{S}^1} d\theta = \int_{U_+} d\theta = \int_{U_+} \theta^*(dt) = \int_{-\pi}^{\pi} dt = 2\pi.$$

Luego, la aplicación lineal  $I: Z_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{R} : \beta \mapsto \int_{\mathbb{S}^1} \beta$  es sobreyectiva. Si  $\beta \in \ker I$ , entonces  $\beta = g(\theta) d\theta$  donde  $\int_{-\pi}^{\pi} g(\theta) d\theta = 0$ . Considérese la integral indefinida de  $g$ ,

$$f(\theta) := \int_{-\pi}^{\theta} g(t) dt,$$

la cual es otra función periódica:

$$f(\theta + 2\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt + \int_{\pi}^{\theta+2\pi} g(t) dt = 0 + \int_{-\pi}^{\theta} g(t) dt = f(\theta),$$

de modo que  $\beta = f'(\theta) d\theta = df$  con  $f \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ . Se ha comprobado que  $\ker I = B_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1)$ .

Al pasar al cociente, se obtiene un *isomorfismo* lineal  $\bar{I}: H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{R}$ . Esto muestra que  $H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}$ , y el isomorfismo (3.27) está dado por un 1-ciclo  $c$  tal que  $c(\Delta^1) = \mathbb{S}^1$ . En resumen:

$$H_{\text{dR}}^0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}, \quad H_{\text{dR}}^1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{R}, \quad H_{\text{dR}}^k(\mathbb{S}^1) = \{0\} \quad \text{para } k \geq 2.$$

Los números de Betti del círculo  $\mathbb{S}^1$  son  $b_0 = b_1 = 1$ . ◇

► La versión clásica del teorema de Stokes no hace referencia directa a integrales sobre cadenas o ciclos, sino que relaciona la integral de una forma diferencial sobre una porción de una superficie en  $\mathbb{R}^3$  con otra integral sobre su curva de frontera. Para plantear esta versión en un contexto más general, conviene ampliar un poco la definición de una variedad diferencial, para incorporar variedades con frontera.

**Definición 3.37.** El conjunto siguiente es un semiespacio cerrado en  $\mathbb{R}^n$ :

$$\underline{\mathbb{H}}^n := \{x = (x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n : x^n \geq 0\}. \tag{3.29}$$

La topología de  $\mathbb{H}^n$  es su topología relativa como parte de  $\mathbb{R}^n$ . Se identifica  $\mathbb{R}^{n-1}$  con el *hiperplano*  $\{x \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\}$ , el cual es la frontera de  $\mathbb{H}^n$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Una **variedad diferencial con borde** de dimensión  $n$  es un espacio topológico  $M$ , junto con un atlas de cartas locales  $\mathfrak{A} = \{ (U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A \}$  que cumple las Definiciones 1.6 y 1.7 de un atlas, con las siguientes dos modificaciones:

- ◊ cada  $\phi_\alpha(U_\alpha)$  es un abierto de  $\mathbb{H}^n$ ;
- ◊ cada  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$  es un abierto de  $\mathbb{H}^n$ .

Si  $A$  y  $B$  son abiertos en  $\mathbb{H}^n$ , hay abiertos  $U, V$  en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $A = U \cap \mathbb{H}^n, B = V \cap \mathbb{H}^n$ , por la definición de la topología relativa. Una aplicación  $f: A \rightarrow B$  es **suave** si es posible elegir  $U$  y  $V$  tales que  $f = \tilde{f}|_A$  para alguna función suave  $\tilde{f}: U \rightarrow V$ . La modificación apropiada de la Definición 1.25 define el concepto de *aplicación suave entre dos variedades con borde*.

Tómese  $q \in M$  con  $q \in U_\alpha \cap U_\beta$  tal que  $\phi_\alpha(q) \in \mathbb{R}^{n-1}$  es un punto fronterizo; entonces  $\phi_\beta(q) \in \mathbb{R}^{n-1}$  también, porque el difeomorfismo  $\phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$  lleva el abierto  $\phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \setminus \mathbb{R}^{n-1}$  de  $\mathbb{R}^n$  en el interior de  $\phi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ , y vice versa. Luego, la condición de que  $\phi_\alpha(q) \in \mathbb{R}^{n-1}$  no depende de la carta local  $(U_\alpha, \phi_\alpha)$ ; la totalidad de tales puntos  $q$  constituye el **borde** de  $M$ , el cual se denota por  $\partial M$ .

Ahora  $\phi_\alpha(U_\alpha \setminus \partial M) = \phi_\alpha(U_\alpha) \setminus \mathbb{R}^{n-1}$  es abierto en  $\phi_\alpha(U_\alpha)$  para cada  $\alpha \in A$ , y por lo tanto el **interior**  $M \setminus \partial M$  es abierto en  $M$ ; y por ende,  $\partial M$  es cerrado en  $M$ . El abierto  $M \setminus \partial M$  es una variedad diferencial  $n$ -dimensional del tipo original; y el borde  $\partial M$ , dotado con el atlas  $\mathfrak{A}' = \{ (U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M}) : \alpha \in A \}$ , es una variedad diferencial (ordinaria, sin borde) de dimensión  $(n - 1)$ . ◊

**Ejemplo 3.38.** La *bola unitaria cerrada*  $\underline{\mathbb{B}}^n := \{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1 \}$  es una variedad con borde; su borde es  $\partial \underline{\mathbb{B}}^n = \mathbb{S}^{n-1}$ . ◊

**Definición 3.39.** Una variedad con borde  $M$  es **orientable** si  $M$  posee un atlas cuyas funciones de transición (entre dos abiertos de  $\mathbb{H}^n$ ) tienen jacobianos positivos. (Tales jacobianos no se anulan en la intersección de sus dominios con  $\mathbb{R}^{n-1}$ .) ◊

**Proposición 3.40.** Si  $M$  es una variedad con borde orientable, entonces  $\partial M$  es también orientable; y una orientación de  $M$  induce una orientación en la variedad ordinaria  $\partial M$ .

*Demostración.* Tómese dos cartas de  $M$ :  $(U, \phi)$  con coordenadas locales  $(x^1, \dots, x^n)$  y  $(V, \psi)$  con coordenadas locales  $(y^1, \dots, y^n)$ , donde  $x^n = 0$  en  $U \cap \partial M, x^n > 0$  en  $U \setminus \partial M$ ;  $y^n = 0$  en  $V \cap \partial M, y^n > 0$  en  $V \setminus \partial M$ . Por hipótesis, el jacobiano de transición es positivo en  $U \cap V$ :

$$J(\psi \circ \phi^{-1}) = \det \left[ \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \right] > 0.$$

Si  $U \cap V \cap \partial M \neq \emptyset$ , la aplicación  $\psi \circ \phi^{-1}$  lleva  $B := \phi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^{n-1}$  en  $\psi(U \cap V) \cap \mathbb{R}^{n-1}$ . Esto implica que  $y^n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) \equiv 0$ . La derivada de  $\psi \circ \phi^{-1}$  en puntos de  $B$  tiene la matriz

$$D((\psi \circ \phi^{-1})|_B) = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^{n-1}} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^{n-1}} & 0 \\ \frac{\partial y^1}{\partial x^n} & \cdots & \frac{\partial y^{n-1}}{\partial x^n} & \frac{\partial y^n}{\partial x^n} \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

La última entrada de esta matriz obedece

$$\frac{\partial y^n}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{y^n(x^1, \dots, x^{n-1}, h) - y^n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0)}{h} \geq 0.$$

Esta derivada parcial no puede anularse en  $B$ , porque también se anularía el determinante de la matriz (3.30). Resulta entonces que  $\frac{\partial y^n}{\partial x^n}(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) > 0$ . La submatriz de las primeras  $(n-1)$  filas y columnas tiene jacobiano, en puntos de  $B$ , dado por

$$J(\psi \circ \phi^{-1}) \Big| \frac{\partial y^n}{\partial x^n} > 0.$$

Este es el jacobiano de una función de transición del atlas  $\mathfrak{A}'$  de  $\partial M$  cuyas cartas locales son  $(U_\alpha \cap \partial M, \phi_\alpha|_{U_\alpha \cap \partial M})$ , obtenido por restricción del atlas orientado de  $M$ . Se concluye que  $\partial M$  tiene un atlas con todos sus jacobiano de transición positivos; y la Proposición 3.6 asegura que  $\partial M$  es orientable.  $\square$

Para evitar ciertos problemas de signo en el teorema de Stokes, conviene modificar la orientación sobre el borde  $\partial M$  de la siguiente manera.

**Definición 3.41.** Sea  $M$  una variedad con borde orientable. Un atlas  $\mathfrak{A}$  sobre  $M$  con jacobianos de transición positivos determina una orientación sobre  $M$ . Si  $\dim M = 2m$  es *par*, la **orientación inducida** sobre  $\partial M$  es la que está determinada por el atlas restringido  $\mathfrak{A}'$ . En cambio, si  $\dim M = 2m + 1$  es *impar*, la orientación inducida sobre  $\partial M$  es la *opuesta* a aquella dada por el atlas restringido  $\mathfrak{A}'$ .  $\diamond$

Los conceptos de *vectores tangentes*, *campos vectoriales* y *formas diferenciales* se extienden a las variedades con borde. Si  $(x^1, \dots, x^n)$  es un sistema de coordenadas locales en un vecindario de  $q \in \partial M$ , el vector tangente  $\frac{\partial}{\partial x^n}|_q$  se define como antes, así que  $T_q M$  es un espacio vectorial  $n$ -dimensional. Un campo vectorial puede definirse como una sección suave del fibrado vectorial  $TM \xrightarrow{\tau} M$ ; el espacio total  $TM$  es también una variedad con borde. Una  $k$ -forma diferencial puede definirse como una sección suave del fibrado vectorial  $\Lambda^k T^*M \xrightarrow{\pi} M$ . Si  $j: \partial M \rightarrow M$  es la inclusión, y si  $\eta \in \mathcal{A}^k(M)$ , el pullback  $j^*\eta$  está definido y resulta ser una  $k$ -forma diferencial (ordinaria) sobre el borde  $\partial M$ .

**Ejemplo 3.42.** La variedad con borde  $\mathbb{H}^n$  tiene un atlas de una sola carta: sus coordenadas locales son las coordenadas cartesianas  $(x^1, \dots, x^n)$  de  $\mathbb{R}^n$ . Su orientación usual, heredada de  $\mathbb{R}^n$ , está dada por la forma de volumen  $\nu = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ . Su borde es  $\mathbb{R}^{n-1}$ , con la sola carta de coordenadas cartesianas  $(x^1, \dots, x^{n-1})$ . Por la regla de la Definición 3.41, la forma de volumen que da la orientación inducida es  $\underline{\nu}_0 := (-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$ .  $\diamond$

Si  $M$  es una variedad con borde orientada, de dimensión  $n$ , se puede definir la integral  $\int_M \omega$  de una  $n$ -forma  $\omega$  como en la Definición 3.15, con el uso de una partición de la unidad apropiada. Si  $(U, \phi)$  es una carta local de  $M$ , la fórmula local (3.7) dado como  $\int_U \phi^* \omega_0 := \int_{\phi(U)} \omega_0$  sigue válida para variedades con borde, con la única modificación de que la región de integración múltiple  $\phi(U)$  es ahora un abierto en  $\mathbb{H}^n$ .

**Teorema 3.43** (Stokes, bis). *Sea  $M$  una variedad con borde, orientada y compacta; tómesese la orientación inducida sobre el borde  $\partial M$ . Si  $\omega \in \mathcal{A}^{n-1}(M)$  y si  $j: \partial M \rightarrow M$  es la inclusión, entonces*

$$\int_{\partial M} j^* \omega = \int_M d\omega. \tag{3.31}$$

*Demostración (bosquejo).* Con el uso de una partición de la unidad si fuera necesario, se puede suponer que  $\omega$  se anula fuera del dominio  $U$  de una carta local  $(U, \phi)$  del atlas que determina la orientación de  $M$ .

Entonces se puede suponer que  $M = V \cap \mathbb{H}^n$  y  $\partial M = V \cap \mathbb{R}^{n-1}$  para algún abierto  $V$  de  $\mathbb{R}^n$ ; y que hay un compacto  $K$  con  $K \subset V \cap \mathbb{H}^n$  tal que  $\omega$  se anula fuera de  $K$ .

Resulta posible cubrir el compacto  $K$  con una cantidad finita de imágenes de unos  $n$ -símplices singulares suaves  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  con las siguientes propiedades:

- (a) Si  $\sigma_i(\Delta^n) \cap \sigma_j(\Delta^n) \neq \emptyset$ , esta intersección es una *faceta común* de  $\sigma_i$  y  $\sigma_j$ :  

$$\sigma_i(\Delta^n) \cap \sigma_j(\Delta^n) = \sigma_i(\pm s_k^n(\Delta^{n-1})) = \sigma_j(\mp s_k^n(\Delta^{n-1})) \equiv \rho_{ij}(\Delta^{n-1}).$$
- (b) Esta  $\rho_{ij}(\Delta^{n-1})$  no es una faceta de otro  $\sigma_r$  y ocurre con signos opuestos en las cadenas singulares  $\partial\sigma_i$  y  $\partial\sigma_j$ .
- (c) Si  $c := \sigma_1 + \dots + \sigma_m$ , los símplices de  $\partial c$  que no se cancelan en la suma tienen sus imágenes en  $V \cap \mathbb{R}^{n-1}$ , o bien en la parte de  $V \cap \mathbb{H}^n$  donde  $\omega$  se anula.

Entonces la igualdad (3.31) sigue del Teorema 3.30, porque las integrales del enunciado se reducen a

$$\int_{\partial M} j^* \omega = \int_{\partial c} \omega \quad \text{y} \quad \int_M d\omega = \int_c d\omega. \quad \square$$

**Corolario 3.44.** *Sea  $M$  una variedad orientada y compacta (sin borde). Si  $\omega \in \mathcal{A}^{n-1}(M)$ , entonces  $\int_M d\omega = 0$ .*  $\square$

### 3.5. Ejercicios sobre integración en variedades

**Ejercicio 3.1.** Si  $G$  es un grupo de Lie, demostrar que la variedad diferencial  $G$  es orientable.  $\llbracket$  Indicación: si  $n = \dim G$ , tómesese  $\xi \neq 0$  en  $\Lambda^n T_1^*G$ . Mostrar que existe  $\nu \in \mathcal{A}^n(G)$  tal que  $\nu_1 = \xi$  y  $\lambda_g^* \nu = \nu$  para todo  $g \in G$ .  $\rrbracket$

**Ejercicio 3.2.** Si  $TM \xrightarrow{\tau} M$  es el fibrado tangente de una variedad diferenciable  $M$ , demostrar que el espacio total  $TM$  es orientable (sea  $M$  orientable o no).

**Ejercicio 3.3.** El espacio proyectivo real  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  es el cociente<sup>14</sup> de la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  bajo la identificación de puntos antipodales:  $x \sim y$  si y solo si  $x = \pm y$  en  $\mathbb{R}^n$ .

Sea  $\rho: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  la simetría  $x \mapsto -x$ ; y sea  $\eta: \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  la aplicación cociente  $x \mapsto \{x, -x\}$ . Si  $\omega \in \mathcal{A}^{n-1}(\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1})$ , comprobar que  $\rho^* \eta^* \omega = \eta^* \omega$ .

Sea  $\sigma$  la forma de volumen sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$ , así que  $\eta^* \omega = f\sigma$  para algún  $f \in C^\infty(\mathbb{S}^{n-1})$ . Demostrar que  $\rho^* \sigma = (-1)^n \sigma$  y que  $f(-p) = (-1)^n f(p)$  para todo  $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Concluir que  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  es orientable si y solo si  $(n-1)$  es impar.

**Ejercicio 3.4.** Sea  $(M, \nu)$  una variedad compacta orientada y sea  $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$  donde  $n = \dim M$ . Sean  $\mathfrak{A} = \{(U_\alpha, \phi_\alpha) : \alpha \in A\}$  y  $\mathfrak{B} = \{(V_\beta, \psi_\beta) : \beta \in B\}$  dos atlas compatibles de  $M$ . Una partición de la unidad  $\{h_\alpha : \alpha \in A\}$  está **subordinada** a  $\mathfrak{A}$  si  $\text{sop } h_\alpha \subset U_\alpha$  para cada  $\alpha \in A$ . Si  $\{k_\beta : \beta \in B\}$  es otra partición de la unidad subordinada a  $\mathfrak{B}$ , entonces  $\omega = \sum_\alpha h_\alpha \omega = \sum_\beta k_\beta \omega$ . Demostrar que

$$\sum_\alpha \int_{U_\alpha} (h_\alpha \omega) = \sum_\beta \int_{V_\beta} (k_\beta \omega),$$

para poder concluir que la integral  $\int_M \omega$  de la Definición 3.15 está bien definida.

**Ejercicio 3.5.** Sea  $(M, \nu)$  una variedad orientada y conexa. Escríbase  $-M$  para denotar la misma variedad con la orientación opuesta, es decir,  $-M := (M, -\nu)$ . Si  $\omega \in \mathcal{A}^n(M)$  con  $n = \dim M$ , comprobar que

$$\int_{-M} \omega = - \int_M \omega.$$

Un difeomorfismo  $\rho: M \rightarrow M$  *preserva* o *revierte* la orientación según sea  $\rho^* \nu \sim \nu$  o bien  $\rho^* \nu \sim -\nu$ . En el caso de que  $\rho$  revierte la orientación, verificar la igualdad

$$\int_M \rho^* \omega = - \int_M \omega \quad \text{para todo } \omega \in \mathcal{A}^n(M).$$

<sup>14</sup>La esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  está cubierta por  $n$  pares antipodales de hemisferios abiertos  $V_k^\pm$ , véase el Ejercicio 1.2. Al pasar al cociente,  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  posee un atlas de  $n$  cartas locales  $(V_k, \psi_k)$ , donde  $V_k := \eta(V_k^\pm)$ . Luego  $\mathbb{R}\mathbb{P}^{n-1}$  es una variedad diferencial compacta de dimensión  $(n-1)$ .

**Ejercicio 3.6.** Sea  $R$  una región (un conjunto abierto y conexo) de  $\mathbb{R}^2$ . Supóngase que  $R$  es acotada y que su frontera  $\partial R$  es una curva suave, cerrada y simple (es decir, sin autointersecciones). Sea  $V$  un abierto de  $\mathbb{R}^2$  tal que  $R \cup \partial R \subset V$ .

- (a) Si  $f, g: V \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones suaves, verificar que la siguiente **fórmula de Green** es un corolario del teorema de Stokes:

$$\oint_{\partial R} f dx + g dy = \iint_R \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx \wedge dy.$$

- (b) Concluir que el área de la región  $R$  está dada por la fórmula siguiente, donde se recorre la curva  $C = \partial R$  una vez contrario a reloj:

$$\text{Area}(R) = \frac{1}{2} \oint_C x dy - y dx.$$

- (c) Usar esta última fórmula para hallar el área de una elipse de semiejes  $a$  y  $b$ .

**Ejercicio 3.7.** La parametrización del Ejercicio 1.11, para  $0 \leq t < \infty$ , encierra un área finita (la hoja de Descartes). Usar la fórmula del Ejercicio 3.6(b) para hallar esa área.

**Ejercicio 3.8.** Con la misma notación del Ejercicio 3.6, sea  $f \in C^\infty(V)$  tal que  $f(x, y) = 0$  para todo  $(x, y) \in \partial R$ . Usar el teorema de Stokes para verificar esta fórmula:

$$\iint_R \left( f \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) dx \wedge dy = - \iint_R \left( \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) dx \wedge dy.$$

Si  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \equiv 0$  en  $R$ , concluir que  $f$  se anula idénticamente en  $R$ .

**Ejercicio 3.9.** Sea  $M$  una variedad diferencial compacta (sin borde) y sean  $\omega \in \mathcal{A}^k(M)$  y  $\eta \in \mathcal{A}^r(M)$ , donde  $k + r + 1 = \dim M$ . Comprobar que la siguiente fórmula es válida:

$$\int_M \omega \wedge d\eta = \pm \int_M d\omega \wedge \eta$$

y determinar este signo.

El ejercicio que sigue involucra la *función gamma* de Euler. Entre sus propiedades conocidas, se requieren:

$$\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x) \text{ si } x > 0; \quad \Gamma(n + 1) = n! \text{ si } n \in \mathbb{N}; \quad \text{y} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

**Ejercicio 3.10.** Si  $\sigma$  es la  $(n-1)$ -forma sobre  $\mathbb{S}^{n-1}$  del Ejercicio 2.6, la medida  $\Omega_n$  de la esfera  $\mathbb{S}^{n-1}$  y el volumen  $V_n$  de la bola unitaria  $\mathbb{B}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$  se definen por

$$\Omega_n := \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \sigma, \quad V_n := \int_{\mathbb{B}^n} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

- (a) Usar el teorema de Stokes para verificar que  $V_n = \Omega_n/n$ .
- (b) Comprobar la relación siguiente [Indicación: integración por partes]:

$$\frac{V_n}{V_{n-1}} = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{(n-1)/2} dt.$$

Deducir los valores de

$$\Omega_1 = \#(\mathbb{S}^0), \quad \Omega_2 = \ell(\mathbb{S}^1), \quad \Omega_3 = \text{Area}(\mathbb{S}^2), \quad \Omega_4 = \text{Vol}(\mathbb{S}^3).$$

- (c) Demostrar por inducción las fórmulas generales para  $V_n$  y  $\Omega_n$ :

$$V_n = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(\frac{1}{2}n)}, \quad \Omega_n = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n)} = \begin{cases} \frac{2\pi^m}{(m-1)!} & \text{si } n = 2m, \\ \frac{2^{m+1}\pi^m}{(2m-1)!!} & \text{si } n = 2m+1. \end{cases}$$

## 4 Conexiones y Curvatura

*Galileo's principle of inertia is sufficient in itself to prove conclusively that the world is affine in character.*

— Hermann Weyl

*As parallel transport, in general, is not given in a canonical way, an explicit rule is necessary.*

— Florian Scheck<sup>1</sup>

Se puede concebir un campo vectorial  $f \mapsto Xf$  como una *derivada direccional* de funciones en  $C^\infty(M)$ . En el caso  $M = \mathbb{R}^n$ , con  $X = a^j \partial/\partial x^j$  en coordenadas locales, se obtiene  $Xf = a^j \partial f/\partial x^j$ , esto es, la receta conocida para una derivada direccional “en la dirección del campo vectorial  $X$ ”.

Ahora bien, qué debería ser la derivada direccional de otro campo vectorial  $Y$  en la dirección de  $X$ ? En  $\mathbb{R}^n$ , con  $Y = b^k \partial/\partial x^k$ , se puede ensayar la receta:

$$D_X Y := X(b^k) \frac{\partial}{\partial x^k} = a^j \frac{\partial b^k}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (4.1)$$

Esta receta se puede llamar la *derivada direccional* del campo vectorial  $Y$  en la dirección del otro campo  $X$ . Es obvio que (4.1) es aditiva tanto en  $X$  como en  $Y$ . Pero el efecto de multiplicar por una función suave  $f$  marca una diferencia:

$$D_{fX} Y = f D_X Y \quad \text{pero} \quad D_X (fY) = (Xf)Y + f D_X Y.$$

Entonces  $X \mapsto D_X Y$  es  $C^\infty(M)$ -lineal, pero  $Y \mapsto D_X Y$  no lo es: en la segunda igualdad hay un término “extra”  $(Xf)Y$ . En consecuencia,  $(X, Y) \mapsto D_X Y$  no es un tensor. Por eso, la prescripción (4.1) no es independiente del sistema de coordenadas locales.

### 4.1. Transporte paralelo y conexiones afines

Para derivar un campo vectorial  $Y$ , es necesario comparar su valor  $Y_p$  en un punto  $p \in M$  con su valor  $Y_q$  en otro punto cercano  $q$ ; pero no hay una manera *canónica* de identificar los espacios vectoriales  $T_p M$  y  $T_q M$ . (Esta dificultad queda oculta cuando  $M = \mathbb{R}^n$  porque cada espacio tangente se identifica con el propio  $\mathbb{R}^n$  mediante el uso de coordenadas cartesianas.) Sin embargo, siempre es posible imponer esa identificación, como sigue.

---

<sup>1</sup>En el libro *Mechanics*, 6th edition, Springer, Berlin, 2018; p. 374.

**Definición 4.1.** Sea  $\gamma: I \rightarrow M$  una curva suave. Una **regla de transporte paralelo sobre  $\gamma$**  es una familia de aplicaciones lineales invertibles

$$\{ \underline{\Psi}_{q,p}: T_p M \rightarrow T_q M : p, q \in \gamma(I) \}$$

que dependen suavemente de  $p$  y  $q$ , tales que

$$\Psi_{r,p} = \Psi_{r,q} \circ \Psi_{q,p} \quad \text{para todo } p, q, r \in \gamma(I).$$

En particular,  $\Psi_{p,p} = 1$  sobre  $T_p M$ ; y  $\Psi_{p,q} = \Psi_{q,p}^{-1}$ .

Un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  se dice **paralelo a lo largo de  $\gamma$**  si  $X_q = \Psi_{q,p}(X_p)$  para todo  $p, q \in \gamma(I)$ . ◇

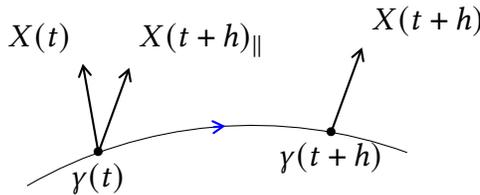


Figura 4.1: Transporte paralelo de vectores

**Definición 4.2.** Sea  $\Psi$  una regla de transporte paralelo a lo largo de  $\gamma: I \rightarrow M$ . Si  $X \in \mathfrak{X}(M)$  y si  $t, t+h \in I$ , escribáse  $X(t) := X_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)} M$  y sea  $X(t+h)_{||} \in T_{\gamma(t)} M$  el traslado de  $X(t+h)$  al primer espacio tangente  $T_{\gamma(t)} M$ , esto es:

$$X(t+h)_{||} := \Psi_{\gamma(t), \gamma(t+h)}(X(t+h)).$$

La **derivada absoluta** de la función  $t \mapsto X(t)$  en el punto  $\gamma(t)$  se define así:

$$\frac{DX}{Dt}(t) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (X(t+h)_{||} - X(t)) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} \Psi_{\gamma(t), \gamma(s)}(X(s)) \in T_{\gamma(t)} M. \quad (4.2)$$

La diferencia  $X(t+h) - X(t)$  no está definida, porque los vectores  $X(t+h)$  y  $X(t)$  pertenecen a espacios vectoriales disjuntos (partes del espacio total  $TM$ ). Es necesario transportar el vector  $X(t+h)$  al espacio  $T_{\gamma(t)} M$  antes de calcular el límite de diferencias de vectores. Véase la Figura 4.1. ◇

La utilidad de la derivada absoluta reside en el siguiente criterio de paralelismo: si  $DX/Dt \equiv 0$  en el intervalo  $I$ , entonces el campo vectorial  $X$  es paralelo a lo largo de la curva  $\gamma$ . En efecto, si  $p = \gamma(t_0)$ , entonces

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} \Psi_{p, \gamma(s)}(X(s)) = \Psi_{p, \gamma(t)} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=t} \Psi_{\gamma(t), \gamma(s)}(X(s)) = \Psi_{p, \gamma(t)} \left( \frac{DX}{Dt}(t) \right).$$

Luego, si  $DX/Dt(t) = 0$  para  $t \in I$ , entonces la función  $t \mapsto \Psi_{p,\gamma(t)}(X(t)) : I \rightarrow T_pM$  es constante, con  $\Psi_{p,\gamma(t)}(X(t)) \equiv X_p$ . Esto dice que  $X$  es paralelo a lo largo de  $\gamma$ .

► Para poder seguir, se requiere una *prescripción concreta* para la regla de transporte paralela  $\Psi$ , que cumple dos requisitos. En primer lugar, el vector  $(DY/Dt)|_p \in T_pM$  debe depender (suavemente) solamente del vector inicial  $Y_p$  y no de la curva  $\gamma$ . En segundo lugar, la correspondencia  $Y_p \mapsto (DY/Dt)|_p$  debe ser un operador *lineal* sobre  $T_pM$ .

Entonces, dado  $X_p \in T_pM$ , la derivada absoluta

$$\nabla_{X_p} Y := (DY/Dt)(0) \in T_pM$$

debe ser el mismo para cualquier curva  $\gamma$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\dot{\gamma}(0) = X_p$ . Esto da lugar a un nuevo campo vectorial  $\nabla_X Y$  sobre la variedad  $M$ , mediante la definición siguiente.

**Definición 4.3.** Una **conexión afín** sobre una variedad diferencial  $M$  es una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

que es  $C^\infty(M)$ -lineal en  $X$  y cumple una *regla de Leibniz* en  $Y$ :

$$\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y, \quad (4.3a)$$

$$\nabla_X (fY) = (Xf) Y + f \nabla_X Y, \quad (4.3b)$$

para todo  $f \in C^\infty(M)$ .

El campo vectorial  $\nabla_X Y$  se llama la **derivada direccional** de  $Y$  en la dirección de  $X$  (determinada por la conexión afín  $\nabla$ ).  $\diamond$

La naturaleza tensorial de (4.3a) implica que el valor  $(\nabla_X Y)_p \in T_pM$ , para un campo vectorial fijo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , depende solo del vector  $X_p \in T_pM$ . Por eso, se puede escribir

$$\underline{\nabla_{X_p} Y} \equiv (\nabla_X Y)_p \quad \text{para cada } p \in M.$$

Fíjese que  $\nabla_{X_p} : \mathfrak{X}(M) \rightarrow T_pM$  es  $\mathbb{R}$ -lineal.

**Ejemplo 4.4.** En el caso  $M = \mathbb{R}^n$ , las derivadas direccionales (4.1) cumplen las condiciones (4.3) y por ende definen una conexión afín  $(X, Y) \mapsto D_X Y$  sobre  $\mathbb{R}^n$ , a veces llamada su *conexión euclidiana*.  $\diamond$

Dada una conexión afín, es posible simplificar el concepto de derivada absoluta (4.2), como sigue.

**Definición 4.5.** Dada una conexión afín  $\nabla$  sobre  $M$  y una curva suave  $\gamma: I \rightarrow M$ , la **derivada covariante** de un campo vectorial  $X \in \mathfrak{X}(M)$  **a lo largo de  $\gamma$**  es

$$\frac{DX}{Dt}(t) := \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X. \quad (4.4)$$

Si el campo restringido  $\dot{\gamma} \in \mathfrak{X}(M)|_{\gamma(I)}$  es paralelo a lo largo de la propia  $\gamma$ , esto es, si

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0, \quad (4.5)$$

se dice que la curva  $\gamma$  es una **geodésica** con respecto a la conexión afín  $\nabla$ .  $\diamond$

► La *existencia* de conexiones afines se ve más claramente si se considera sus expresiones en coordenadas locales. Sean  $(U, \phi)$  y  $(V, \psi)$  dos cartas locales de  $M$ , con coordenadas locales respectivas  $(x^1, \dots, x^n)$  en  $U$  y  $(y^1, \dots, y^n)$  en  $V$ . Las abreviaturas

$$\partial_j \equiv \frac{\partial}{\partial x^j}, \quad \tilde{\partial}_r \equiv \frac{\partial}{\partial y^r}$$

ayudarán para aliviar los cálculos que siguen. El conjunto de campos locales  $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$  es una base del  $C^\infty(U)$ -módulo  $\mathfrak{X}(M)|_U$ ; y  $\{\tilde{\partial}_1, \dots, \tilde{\partial}_n\}$  es una base de  $\mathfrak{X}(M)|_V$ .

Por las propiedades (4.3), basta considerar el caso en donde  $X, Y \in \{\partial_1, \dots, \partial_n\}$ . Entonces

$$\boxed{\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k} \quad \text{para } i, j = 1, \dots, n \quad (4.6)$$

para ciertos funciones suaves  $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(U)$ : estas se llaman **símbolos de Christoffel** de la conexión afín  $\nabla$ .

Análogamente, en  $C^\infty(V)$ , hay otros símbolos de Christoffel  $\tilde{\Gamma}_{rs}^t$  dados por

$$\nabla_{\tilde{\partial}_r} \tilde{\partial}_s = \tilde{\Gamma}_{rs}^t \tilde{\partial}_t$$

y es fácil verificar la siguiente regla de cambio de variables, cuando  $U \cap V \neq \emptyset$ :

$$\tilde{\Gamma}_{rs}^t = \frac{\partial x^i}{\partial y^r} \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^r \partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^l}. \quad (4.7)$$

La presencia de unas derivadas de segundo orden en el segundo sumando indica que *los  $\Gamma_{ij}^k$  no son componentes de un tensor*.

Una conexión afín está determinada por juegos de  $n^3$  funciones  $\Gamma_{ij}^k$  definidas en cada carta local, si ellas cumplen la regla de cambio (4.7) en las intersecciones de cartas.

Ahora bien: si  $\nabla'$  es otra conexión afín sobre  $M$  con símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^{\prime k} \in C^\infty(U)$ , las *diferencias*  $C_{ij}^k := \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ij}^{\prime k}$  obedecen una regla de cambio más sencilla:

$$\tilde{C}_{rs}^t = \frac{\partial x^i}{\partial y^r} \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^k} C_{ij}^k,$$

lo cual implica que  $\nabla - \nabla'$  es un *tensor mixto*, de bigrado  $(2, 1)$ .

De hecho, si  $S(X, Y, \alpha) := \langle \alpha, \nabla_X Y - \nabla'_X Y \rangle$  para  $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$ , es una consecuencia directa de la Definición 4.3 que  $S$  es  $C^\infty(M)$ -trilineal.

Basta, entonces, *hallar una sola conexión*  $\nabla'$  sobre una determinada variedad  $M$ ; las otras  $\nabla$  difieren de la primera por ciertos tensores.

**Proposición 4.6.** *Dada una conexión afín sobre  $M$ , una curva suave  $\gamma: I \rightarrow M$  resulta ser una geodésica con respecto a  $\nabla$  si y solo si sus componentes  $\gamma^k := x^k \circ \gamma$  en cada carta local cumplen este sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden:*

$$\boxed{\frac{d^2 \gamma^k}{dt^2} + \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma^i}{dt} \frac{d\gamma^j}{dt} = 0.} \quad (4.8)$$

En consecuencia, para cada punto inicial  $p = \gamma(0)$  y velocidad inicial  $v = \dot{\gamma}(0)$ , existe una única geodésica con respecto a  $\nabla$ , definida en un intervalo  $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I$ .

*Demostración.* Una solución de las ecuaciones diferenciales (4.8) determina un arco de curva en un vecindario del punto  $p$ . Basta, entonces, examinar la cuestión en una carta local  $(U, \phi)$  con  $\phi(p) = 0$ ; equivalentemente, se puede suponer que  $M$  posee una sola carta local. Para  $f \in C^\infty(M)$ , vale

$$\langle \dot{\gamma}(t), f \rangle \equiv (f \circ \gamma)'(t) = \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{d\gamma^i}{dt}(t), \quad \text{así que} \quad \dot{\gamma}(t) = \dot{\gamma}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

En vista de (4.3a) y (4.6), esto implica que

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \partial_j = \dot{\gamma}^i(t) \nabla_{\partial_i} \partial_j = \dot{\gamma}^i(t) \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \partial_k.$$

Denotando por  $\dot{\gamma} \in \mathfrak{X}(M)|_{\gamma(I)}$  la función  $t \mapsto \dot{\gamma}(t)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} (\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma})(t) &= \nabla_{\dot{\gamma}}(\dot{\gamma}^j(t) \partial_j) = \langle \dot{\gamma}(t), \dot{\gamma}^j \rangle \partial_j + \dot{\gamma}^j(t) \nabla_{\dot{\gamma}} \partial_j \\ &= \frac{d}{dt}(\dot{\gamma}^j)(t) \partial_j + \dot{\gamma}^j(t) \dot{\gamma}^i(t) \Gamma_{ij}^k(t) \partial_k = \frac{d}{dt}(\dot{\gamma}^k)(t) \partial_k + \Gamma_{ij}^k(t) \dot{\gamma}^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \partial_k \\ &= (\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j)(t) \partial_k. \end{aligned}$$

El coeficiente de  $\partial_k$  es el lado izquierdo de la ecuación (4.8).

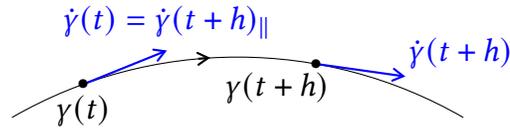


Figura 4.2: Una geodésica: los vectores tangentes  $\dot{\gamma}(t)$  son paralelos a lo largo de  $\gamma$

La curva  $\gamma$  es una geodésica con respecto a  $\nabla$  si y solo si  $\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$ , véase (4.5) y la Figura 4.2; si y solo si  $\ddot{\gamma}^k + \Gamma_{ij}^k \dot{\gamma}^i \dot{\gamma}^j = 0$  para cada  $k$ .

Ahora bien, las ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden (4.8) poseen solución única – definida en algún intervalo abierto  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  centrado en  $t = 0$  – si las condiciones iniciales para los  $\gamma^j(0)$  y sus derivadas  $\dot{\gamma}^j(0)$  están dadas; en otras palabras, si se asignan el punto  $p = \gamma(0) \in M$  y el vector tangente  $\dot{\gamma}(0) \in T_p M$ .  $\square$

► El concepto de conexión afín admite una generalización importante. Habida cuenta de que los campos vectoriales  $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(M, TM)$  son secciones suaves del fibrado tangente  $TM \xrightarrow{\tau} M$ , se puede reemplazar el  $C^\infty(M)$ -módulo de la segunda variable por las secciones suaves de un fibrado vectorial cualquiera.

**Definición 4.7.** Sea  $E \xrightarrow{\pi} M$  un fibrado vectorial. Una **conexión de Koszul** (o simplemente, una *conexión*)<sup>2</sup> sobre  $E$  es una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(M, E) \rightarrow \Gamma(M, E) : (X, s) \mapsto \nabla_X s$$

que es  $C^\infty(M)$ -lineal en  $X$  y cumple una *regla de Leibniz* en  $s$ :

$$\nabla_{fX} s = f \nabla_X s, \tag{4.9a}$$

$$\nabla_X (fs) = (Xf) s + f \nabla_X s, \tag{4.9b}$$

para todo  $f \in C^\infty(M)$ ,  $X \in \mathfrak{X}(M)$ ,  $s \in \Gamma(M, E)$ .

Nótese que cada  $\nabla_X : s \mapsto \nabla_X s$  es un operador  $\mathbb{R}$ -lineal sobre  $\Gamma(M, E)$ .  $\diamond$

**Ejemplo 4.8.** Dada una conexión afín  $\nabla$  sobre  $M$ , se puede definir su **conexión dual**  $\nabla'$  sobre el *fibrado cotangente*  $T^*M \xrightarrow{\pi} M$ . Esta es una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal

$$\nabla' : \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{A}^1(M) \rightarrow \mathcal{A}^1(M)$$

que se define simplemente al demandar la siguiente *regla de Leibniz* sobre evaluaciones:

$$X(\langle \alpha, Y \rangle) =: \langle \nabla'_X \alpha, Y \rangle + \langle \alpha, \nabla_X Y \rangle. \tag{4.10}$$

<sup>2</sup>Las conexiones en fibrados vectoriales vienen de la tesis doctoral: Jean-Louis Koszul, “Homologie et cohomologie des algèbres de Lie”, *Bulletin de la Société Mathématique de France* 78 (1950), 65–127.

Fíjese que esta definición “implícita” cumple la relación (4.9b):

$$\begin{aligned} X(\langle f\alpha, Y \rangle) - \langle f\alpha, \nabla_X Y \rangle &= X(f \langle \alpha, Y \rangle) - f \langle \alpha, \nabla_X Y \rangle \\ &= (Xf) \langle \alpha, Y \rangle + f X(\langle \alpha, Y \rangle) - f \langle \alpha, \nabla_X Y \rangle \end{aligned}$$

para cada  $Y \in \mathfrak{X}(M)$ , así que  $\nabla'_X(f\alpha) = (Xf)\alpha + f\nabla'_X\alpha$  en  $\mathcal{A}^1(M)$ .

En una carta local de  $M$ , la fórmula local (4.6) para  $\nabla$  implica una fórmula local correspondiente para  $\nabla'$ :

$$\nabla'_{\partial_i} dx^k = -\Gamma_{ij}^k dx^j \quad \text{para } i, k = 1, \dots, n. \tag{4.11}$$

debido a la igualdad  $\langle dx^k, \partial_j \rangle \equiv \llbracket j = k \rrbracket$ . ◇

A veces conviene “eliminar la  $X$ ” de las fórmulas (4.9), con el siguiente artificio. Si  $E \xrightarrow{\pi} M$  es un fibrado vectorial, se denota

$$\underline{\mathcal{A}^k(M, E)} \equiv \mathcal{A}^k(M) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(M, E). \tag{4.12}$$

Este es un  $C^\infty(M)$ -módulo cuyos elementos se llaman  **$k$ -formas con valores en  $E$** .  $\llbracket$  La notación  $\otimes_{C^\infty(M)}$  entre dos  $C^\infty(M)$ -módulos indica<sup>3</sup> un *producto tensorial sobre  $C^\infty(M)$* , esto es, el  $C^\infty(M)$ -módulo generado por tensores simples  $\omega \otimes s$  sujeto a las relaciones  $f\omega \otimes s = \omega \otimes fs$  para  $f \in C^\infty(M)$ .  $\rrbracket$

Si  $\nabla$  es una conexión sobre  $E$  y si  $s \in \Gamma(M, E)$ , se define  $\nabla s \in \underline{\mathcal{A}^1(M, E)}$  por la relación  $\langle \nabla s, X \rangle = \nabla_X s$  para  $X \in \mathfrak{X}(M)$ . Esto es consistente porque  $\nabla_X s$  es  $C^\infty(M)$ -lineal en  $X$ . De este modo se obtiene una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal

$$\boxed{\nabla : \Gamma(M, E) \rightarrow \underline{\mathcal{A}^1(M, E)} : s \mapsto \nabla s.} \tag{4.13}$$

La regla de Leibniz (4.9b) para  $\nabla$  ahora toma el siguiente aspecto:

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f \nabla s \quad \text{para todo } f \in C^\infty(M), s \in \Gamma(M, E).$$

## 4.2. Métricas riemannianas

Una *métrica*, en contextos de topología, es una función simétrica y positiva de dos variables que cumple la desigualdad triangular. En geometría diferencial, es palabra tiene una segunda acepción: se reservará el término *distancia* para el concepto topológico.

<sup>3</sup>Más generalmente, si  $A$  es un anillo conmutativo y si  $E, F$  son  $A$ -módulos, su “producto tensorial sobre  $A$ ” es el  $A$ -módulo  $\underline{E \otimes_A F}$  generado por elementos  $e \otimes f$  con  $e \in E, f \in F$  sujeto a las relaciones  $ae \otimes f = e \otimes af$  para  $a \in A$ .

**Definición 4.9.** Una **métrica riemanniana** sobre una variedad diferencial  $M$  es un 2-tensor covariante

$$g: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

que es *simétrica y definida positiva*:

$$g(X, Y) = g(Y, X), \quad \text{con } g(X, X) \geq 0 \quad \text{para } X \in \mathfrak{X}(M)$$

donde  $g(X, X) \equiv 0$  como función en  $C^\infty(M)$  solo si  $X = 0$  es el campo vectorial nulo.

En consonancia con la Proposición 2.2, el valor  $g(X, Y)(p)$  depende solamente de los vectores  $X_p, Y_p \in T_pM$ ; y las evaluaciones

$$\underline{g}_p(X_p, Y_p) := g(X, Y)(p) \tag{4.14}$$

definen formas  $\mathbb{R}$ -bilineales simétricas y definidas positivas  $g_p$  sobre cada espacio tangente  $T_pM$ . Esto dice que cada  $g_p$  es un *producto escalar real* sobre  $T_pM$ , que depende suavemente del punto  $p$ . ◇

Es oportuno recordar que un producto escalar  $(- | -)$  sobre un espacio vectorial  $E$  de dimensión finita – real o complejo<sup>4</sup> – define un par de isomorfismos entre  $E$  y su espacio vectorial dual  $E^*$ . Si  $u \in E$ ,  $\xi \in E^*$ , se identifica  $u$  con la forma lineal  $v \mapsto (u | v)$  en  $E^*$ ; y se identifica  $\xi \in E^*$  con el vector  $x \in E$  tal que  $\xi(v) \equiv (x | v)$ . De esta manera, una métrica riemanniana define isomorfismos  $T_pM \simeq T_p^*M$  para cada  $p \in M$ ; su efecto sobre las secciones de los fibrados vectoriales  $TM$  y  $T^*M$  permite asociar campos vectoriales con 1-formas y viceversa, como sigue.

**Definición 4.10.** Una **variedad riemanniana** es un par  $(M, g)$  formado por una variedad diferencial  $M$  y una métrica riemanniana  $g$  sobre  $M$ . Se define un par de **isomorfismos musicales**<sup>5</sup> de  $C^\infty(M)$ -módulos:  $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathcal{A}^1(M) : \underline{X} \mapsto \underline{X}^b$  y la aplicación inversa  $\mathcal{A}^1(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) : \alpha \mapsto \alpha^\sharp$ , dados por:

$$\underline{X}^b(Y) := g(X, Y), \quad g(\alpha^\sharp, Y) := \alpha(Y). \tag{4.15}$$

Entonces se puede expresar la métrica como un apareamiento de 1-formas, así:

$$\underline{g}^{-1}(\alpha, \beta) := g(\alpha^\sharp, \beta^\sharp), \quad \text{para todo } \alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(M). \quad \diamond$$

<sup>4</sup>En este curso se emplean espacios vectoriales reales; pero todos los conceptos se adaptan directamente al casi de escalares complejos, con esta excepción: un producto escalar real es *bilineal*, pero un producto escalar complejo es *sesquilineal*, esto es, lineal en una variable pero antilineal en la otra. La opción preferible es que  $(- | -)$  sea lineal en la *segunda* variable, como indica la llamada “notación de Dirac”.

<sup>5</sup>En el Ejercicio 2.27 se ha empleado esta misma notación para un par de isomorfismos *diferentes* entre  $\mathfrak{X}(M)$  y  $\mathcal{A}^1(M)$ . En la literatura de geometría diferencial, se usan las notaciones musicales en los dos sentidos. En este curso, aparte del citado Ejercicio, los símbolos  $\flat$  y  $\sharp$  se refieren a la versión riemanniana.

En términos de coordenadas locales en una carta  $(U, \phi)$  de  $M$ , se puede identificar  $g|_U$  con la *matriz invertible de funciones*  $[g_{ij}] \in M_n(C^\infty(U))$  y  $g^{-1}|_U$  con su *matriz inversa*  $[g^{rs}]$ , cuyas entradas se definen por

$$\boxed{g_{ij} := g(\partial_i, \partial_j); \quad g^{rs} := g^{-1}(dx^r, dx^s).} \quad (4.16)$$

De este modo, si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}^1(M)$  tienen las siguientes versiones locales:  $X|_U = f^i \partial_i$ ,  $Y|_U = h^j \partial_j$ ,  $\alpha|_U = a_r dx^r$ ,  $\beta|_U = b_s dx^s$ , se evalúan  $g$  y  $g^{-1}$  en  $C^\infty(U)$  así:

$$g(X, Y) = g_{ij} f^i h^j \quad \text{y} \quad g^{-1}(\alpha, \beta) = g^{rs} a_r b_s.$$

**Definición 4.11.** Una **isometría** entre dos variedades riemannianas  $(M, g)$  y  $(N, h)$  es un difeomorfismo  $\tau: M \rightarrow N$  tal que  $\tau^*h = g$ . Esto es equivalente a la condición:

$$h(\tau_*X, \tau_*Y) = g(X, Y) \quad \text{para todo} \quad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \quad \diamond$$

**Definición 4.12.** Una *conexión afín*  $\nabla$  sobre  $M$  es **compatible con la métrica**  $g$  si su transporte paralelo es isométrico. Esto significa que si  $\gamma: I \rightarrow M$  es una curva suave y si  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  son paralelos a lo largo de  $\gamma$ , entonces  $g(X, Y)(\gamma(t)) = g_{\gamma(t)}(X_{\gamma(t)}, Y_{\gamma(t)})$  es una función constante de  $t \in I$ .

Alternativamente,  $\frac{d}{dt} g(X, Y)(\gamma(t)) \equiv 0$  cuando  $X$  y  $Y$  son paralelos a lo largo de  $\gamma$ . Con la ayuda de las fórmulas (4.2) y (4.4), se puede mostrar que eso es equivalente a que

$$\dot{\gamma}(t)(g(X, Y)) = g(\nabla_{\dot{\gamma}(t)}X, Y) + g(X, \nabla_{\dot{\gamma}(t)}Y) \quad \text{para} \quad t \in I$$

con  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  cualesquiera. Además, como la curva  $\gamma$  es arbitrario, se puede reemplazar  $\dot{\gamma}(t)$  por cualquier vector tangente en  $Z_{\gamma(t)} \in T_{\gamma(t)}M$ . La condición de compatibilidad entre  $\nabla$  y  $g$  se reduce a la siguiente *regla de Leibniz*: si  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces

$$\boxed{Z(g(X, Y)) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y).} \quad (4.17)$$

O bien:  $d(g(X, Y)) = g(\nabla X, Y) + g(X, \nabla Y)$ , en términos del operador  $\nabla$  de (4.13).  $\diamond$

**Lema 4.13.** Sea  $\nabla$  una *conexión* sobre una variedad diferencial  $M$ . La fórmula

$$\boxed{T_\nabla(X, Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]} \quad (4.18)$$

define un 2-tensor  $T_\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , llamado la **torsión** de la *conexión*  $\nabla$ . En otros términos,  $(X, Y, \alpha) \mapsto \langle \alpha, T_\nabla(X, Y) \rangle$  es un tensor de bigrado  $(2, 1)$  sobre  $M$ .

*Demostración.* Se debe mostrar que  $T_{\nabla}$  es  $C^{\infty}(M)$ -bilineal. Como  $T_{\nabla}$  es  $\mathbb{R}$ -bilineal y anti-simétrico en sus argumentos, basta verificar que  $T_{\nabla}(fX, Y) = f T_{\nabla}(X, Y)$  para  $f \in C^{\infty}(M)$ .

Al recordar la fórmula (2.32), que dice que  $[fX, Y] = f[X, Y] - (Yf)X$ , se obtiene

$$\begin{aligned} T_{\nabla}(fX, Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX, Y] \\ &= f \nabla_X Y - (Yf)X - f \nabla_Y X - f[X, Y] + (Yf)X \\ &= f T_{\nabla}(X, Y). \end{aligned} \quad \square$$

Ahora, este  $T_{\nabla}$ , como cualquier tensor, está determinada por sus expresiones (compatibles) en coordenadas locales. En una carta  $(U, \phi)$  de  $M$ , usando la base local  $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$  de  $\mathfrak{X}(U)$ , se obtiene

$$T_{\nabla}(\partial_i, \partial_j) = \nabla_{\partial_i} \partial_j - \nabla_{\partial_j} \partial_i - [\partial_i, \partial_j] = (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \partial_k$$

ya que  $[\partial_i, \partial_j] = 0$ . Por lo tanto, la conexión afín  $\nabla$  es **libre de torsión** (es decir,  $T_{\nabla} = 0$ ) si y solo si los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  de cada carta local son *simétricos* en los índices inferiores  $i, j$ ; esto es,  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ .

**Proposición 4.14.** *Sobre una variedad riemanniana  $(M, g)$ , existe una única conexión afín  $\nabla^g$  que es compatible con la métrica  $g$  y libre de torsión: esto es, cumple (4.17) y además satisface  $\nabla_X^g Y - \nabla_Y^g X = [X, Y]$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ .*

*Demostración.* Para comprobar la unicidad, nótese que una conexión  $\nabla^g$  compatible con la métrica  $g$  debe cumplir, por (4.17):

$$\begin{aligned} Z g(X, Y) &= g(\nabla_Z^g X, Y) + g(X, \nabla_Z^g Y), \\ Y g(Z, X) &= g(\nabla_Y^g Z, X) + g(Z, \nabla_Y^g X), \\ X g(Y, Z) &= g(\nabla_X^g Y, Z) + g(Y, \nabla_X^g Z). \end{aligned}$$

Si además  $\nabla^g$  es libre de torsión, se obtiene

$$\begin{aligned} X g(Y, Z) + Y g(Z, X) - Z g(X, Y) \\ &= g(\nabla_Y^g Z - \nabla_Z^g Y, X) + g(\nabla_X^g Z - \nabla_Z^g X, Y) + g(\nabla_X^g Y + \nabla_Y^g X, Z) \\ &= g([Y, Z], X) + g([X, Z], Y) - g([X, Y], Z) + 2g(\nabla_X^g Y, Z). \end{aligned} \quad (4.19)$$

En consecuencia, la cantidad  $g(\nabla_X^g Y, Z)$  está determinada por la métrica y el corchete de  $\mathfrak{X}(M)$ . Como  $g$  es definida positiva (así que cada forma bilineal  $g_p$  es definida positiva sobre  $T_p M$ ), el campo vectorial  $\nabla_X^g Y$  queda determinado para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ . Se ha comprobado la *unicidad* de la conexión  $\nabla^g$ .

Para comprobar su *existencia*, es obligatorio usar la receta sugerida por (4.19):

$$g(\nabla_X^g Y, Z) := \tag{4.20}$$

$$\frac{1}{2} \{X g(Y, Z) + Y g(Z, X) - Z g(X, Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Z], Y) + g([X, Y], Z)\}.$$

Es fácil verificar que el lado derecho de (4.20) es  $C^\infty(M)$ -lineal en  $X$  y en  $Z$ . Como tal, esta fórmula define una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal  $(X, Y) \mapsto \nabla_X^g Y$  que es  $C^\infty(M)$ -lineal en  $X$ . También se puede constatar que esta operación cumple la regla de Leibniz en  $Y$ , y por lo tanto,  $\nabla^g$  es una conexión afín. En vista de (4.19), unos cálculos rutinarios comprueban que  $\nabla^g$  es efectivamente compatible con  $g$  y libre de torsión.  $\square$

**Definición 4.15.** La conexión afín  $\nabla^g$  sobre  $(M, g)$  determinada por la fórmula (4.20) se llama la **conexión de Levi-Civita** sobre  $M$  asociada con la métrica  $g$ .  $\diamond$

**Lema 4.16.** En una carta local de una variedad riemanniana  $(M, g)$ , los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita están dados por la fórmula explícita:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}). \tag{4.21}$$

*Demostración.* Como  $g$  es un tensor, está determinada por sus restricciones  $g|_U$  a los dominios de cartas locales  $(U, \phi)$  de  $M$ ; y además, cada  $g|_U$  es una métrica sobre la subvariedad  $U$  de  $M$ . La condición de compatibilidad (4.17), aplicada a los campos locales  $X|_U = \partial_i, Y|_U = \partial_j, Z|_U = \partial_l$  da la fórmula

$$\partial_l g_{ij} = g_{jm} \Gamma_{li}^m + g_{im} \Gamma_{lj}^m.$$

Como  $[\partial_i, \partial_j] = [\partial_i, \partial_l] = [\partial_j, \partial_l] = 0$ , la fórmula (4.19) se reduce a

$$\partial_i (g(\partial_j, \partial_l)) + \partial_j (g(\partial_i, \partial_l)) - \partial_l (g(\partial_i, \partial_j)) = 2 g(\partial_l, \nabla_{\partial_i}^g \partial_j);$$

y por ser  $\nabla_{\partial_i}^g \partial_j = \Gamma_{ij}^m \partial_m$ , esto es

$$\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij} = 2 g_{lm} \Gamma_{ij}^m.$$

Para  $i, j$  fijos, esta fórmula expresa una igualdad entre dos vectores de columna con índice  $l$ . Al multiplicar ambos lados por la matriz  $\frac{1}{2} [g^{kl}]$ , donde  $\underline{g^{kl} g_{lm}} = \delta_m^k \equiv \llbracket k = m \rrbracket$ , se obtiene la igualdad deseada (4.21).  $\square$

**Ejemplo 4.17.** Considérese la esfera  $\mathbb{S}^2$  con el atlas de dos cartas locales definido en el Ejemplo 1.13:  $U := \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathbf{e}_3\}$  y  $V := \mathbb{S}^2 \setminus \{-\mathbf{e}_3\}$ . Se puede usar las coordenadas locales<sup>6</sup>

$$(x, y) := \left( \frac{x^1}{1-x^3}, \frac{-x^2}{1-x^3} \right) \text{ en } U, \quad (u, v) := \left( \frac{x^1}{1+x^3}, \frac{x^2}{1+x^3} \right) \text{ en } V.$$

¶ Si se introduce *coordenadas complejas*<sup>7</sup>  $z := x + iy$ , de modo que  $z = (x^1 - ix^2)/(1 - x^3)$  en  $U$ ; y  $w := u + iv$ , con  $w = (x^1 + ix^2)/(1 + x^3)$  en  $V$ ; su relación con las coordenadas esféricas usuales es  $z = e^{-i\phi} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$  en  $U$ , mientras  $w = e^{+i\phi} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$  en  $V$ . Nótese que  $w = 1/z$  en  $U \cap V$ . ¶

La **métrica redonda** (llamada así porque es invariante bajo el grupo  $\text{SO}(3)$  de rotaciones de la esfera) se define como el siguiente 2-tensor covariante simétrica:

$$g = d\theta^2 + \operatorname{sen}^2 \theta d\phi^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{4(du^2 + dv^2)}{(1 + u^2 + v^2)^2}. \quad (4.22)$$

(La primera fórmula es singular en los polos  $\pm \mathbf{e}_3$ , pero se puede usar la invariancia rotacional para extender el dominio de  $g$  para incluirlos.)

Es conveniente usar la abreviatura  $q := 1 + x^2 + y^2$ , de modo que  $g = 4q^{-2}(dx^2 + dy^2)$ . Los componentes de  $g$  y de la métrica dual  $g^{-1}$  en el dominio  $U$  son

$$g_{ij} = 4q^{-2} \delta_{ij} \quad \text{y} \quad g^{kl} = \frac{1}{4}q^2 \delta^{kl}.$$

Si ahora se redefine  $(x^1, x^2) \equiv (x, y)$  como coordenadas locales (en vez de coordenadas cartesianas en  $\mathbb{R}^3$ ), se calcula enseguida que  $\partial_l g_{ij} = -16x^l q^{-3} \delta_{ij}$ . Los símbolos de Christoffel en  $U$  son

$$\Gamma_{ij}^k = -\frac{2}{q} (x^i \delta_j^k + x^j \delta_i^k - x^k \delta_{ij}). \quad (4.23)$$

como consecuencia directa de (4.21). ◇

► Una métrica riemanniana  $g$  sobre una variedad  $M$  define productos escalares reales  $g_p$  en  $T_p M$  y  $g_p^{-1}$  en  $T_p^* M$ , para cada  $p \in M$ . Dos vectores  $u, v \in T_p M$  son *ortogonales* si  $g_p(u, v) = 0$ ; dos covectores  $\xi, \eta \in T_p^* M$  son ortogonales si  $g_p^{-1}(\xi, \eta) = 0$ . En general, no es posible “globalizar” estos conceptos a toda la variedad  $M$ , pero sí definen estructuras euclidianas en cada carta local.

<sup>6</sup>Los signos de  $x^2$  están elegidos para que el jacobiano de transición sea positivo en  $U \cap V$ .

<sup>7</sup>Al considerar el codominio  $\mathbb{R}^2$  de las cartas locales como el plano complejo  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{S}^2$  se ve como la **esfera de Riemann**  $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ , la compactificación de un punto de  $\mathbb{C}$ . El punto excluido del dominio de la carta local es  $z = \infty$  para  $U$ ,  $w = \infty$  para  $V$ .

**Definición 4.18.** Sea  $(U, \phi)$  una carta local de una variedad riemanniana  $(M, g)$ . Dos campos vectoriales locales  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$  se llaman **ortogonales** si  $g(X, Y) \equiv 0$  sobre  $U$ ; el campo local  $X$  está **normalizado** si  $g(X, X) \equiv 1$  sobre  $U$ .

Si  $n = \dim M$ , una **base ortonormal local** (o *vielbein*)<sup>8</sup> de campos vectoriales es una familia  $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathfrak{X}(U)$ , tal que  $g(E_\mu, E_\nu) \equiv \delta_{\mu\nu}$  sobre  $U$  para  $\mu, \nu = 1, \dots, n$ .

Una **base ortonormal local de 1-formas** es otra familia  $\{\theta^1, \dots, \theta^n\} \subset \mathcal{A}^1(U)$  tal que  $g^{-1}(\theta^\mu, \theta^\nu) \equiv \delta^{\mu\nu}$  sobre  $U$  para  $\mu, \nu = 1, \dots, n$ .  $\diamond$

Para comprobar la existencia de estas bases ortonormales locales, se podría aplicar el algoritmo de Gram y Schmidt a las bases locales respectivas  $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$  de  $\mathfrak{X}(U)$  y  $\{dx^1, \dots, dx^n\}$  de  $\mathcal{A}^1(U)$ . Alternativamente, se puede ensayar una construcción directa, tomando en cuenta que la matriz  $G = [g_{ij}]$  es una función suave  $G: U \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$  cuyos valores son matrices definidas positivas. Supóngase que hay una función suave  $H: U \rightarrow \text{GL}(n, \mathbb{R})$  tal que  $\underline{H^t} = \underline{H}$  y  $\underline{H^2} = \underline{G}$  (y luego  $H^{-2} = G^{-1}$  también). Si sus entradas se denotan por  $H = [h_j^\beta]$  y  $H^{-1} = [\tilde{h}_\alpha^r]$ , estas condiciones se expresan mediante las fórmulas:

$$h_i^\alpha \delta_{\alpha\beta} h_j^\beta = g_{ij}, \quad \tilde{h}_\alpha^r \delta^{\alpha\beta} \tilde{h}_\beta^s = g^{rs}.$$

Inversamente, las identidades  $H^{-1}GH^{-1} = 1$  y  $HG^{-1}H = 1$  se traducen en:

$$\tilde{h}_\mu^i g_{ij} \tilde{h}_\nu^j = \delta_{\mu\nu}, \quad h_r^\mu g^{rs} h_s^\nu = \delta^{\mu\nu}.$$

Las bases ortonormales locales entonces se definen por:

$$\underline{E_\mu} := \tilde{h}_\mu^i \partial_i, \quad \underline{\theta^\nu} := h_s^\nu dx^s, \quad (4.24)$$

en vista de los cálculos:

$$g(E_\mu, E_\nu) = g(\tilde{h}_\mu^i \partial_i, \tilde{h}_\nu^j \partial_j) = \tilde{h}_\mu^i g(\partial_i, \partial_j) \tilde{h}_\nu^j = \delta_{\mu\nu};$$

$$g^{-1}(\theta^\mu, \theta^\nu) = g^{-1}(h_r^\mu dx^r, h_s^\nu dx^s) = h_r^\mu g^{-1}(dx^r, dx^s) h_s^\nu = \delta^{\mu\nu}.$$

[[ Siempre hay una solución simétrica *continua* de la ecuación  $H^2 = G$ , porque una matriz definida positiva  $G_0$  posee una única “raíz cuadrada”  $H_0 = H_0^t$  que es también definida positiva, y la receta  $G_0 \mapsto H_0$  está dada por un límite  $p_n(G_0) \rightarrow H_0$  donde los  $p_n$  son polinomios tales que  $p_n(t) \rightarrow \sqrt{t}$  uniformemente sobre un intervalo  $[0, t_0]$ . Una solución *suave* no está garantizada, pero existe en muchos casos. ]]

<sup>8</sup>Por convenio, los campos y las 1-formas locales llevan índices latinos:  $\partial_j, dx^k$ , etc., y los vielbein se denotan con índices griegos:  $E_\mu, \theta^\nu$ , etc. La palabra alemana *vielbein* (plural *vielbeine*) significa “muchas patas”; si  $n = 4$  se habla de *vierbein*; y si  $n = 2$ , de *zweibein*.

**Ejemplo 4.19.** En el dominio de carta  $U := \mathbb{S}^2 \setminus \{e_3\}$  de la esfera  $\mathbb{S}^2$ , la matriz de la métrica  $g$  es diagonal,  $g_{ij} = 4q^{-2} \delta_{ij}$ , por (4.22). Esta matriz tiene la raíz cuadrada diagonal (definida positiva y suave en  $U$ ) dada por

$$h_j^\beta := 2q^{-1} \delta_j^\beta, \quad \text{con inverso} \quad \tilde{h}_\alpha^r := \frac{1}{2}q \delta_\alpha^r.$$

Entonces las bases ortonormales locales en  $U$  son:

$$E_1 := \frac{q}{2} \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 := \frac{q}{2} \frac{\partial}{\partial y}, \quad \text{y} \quad \theta^1 := \frac{2}{q} dx, \quad \theta^2 := \frac{2}{q} dy. \quad \diamond$$

► Si la variedad riemannana  $(M, g)$  es *orientable*, tiene una forma de volumen  $v_g$  dada localmente por

$$v_g|_U := \theta^1 \wedge \theta^2 \wedge \cdots \wedge \theta^n.$$

Esta forma de volumen cumple  $v_g(E_1, E_2, \dots, E_n) \equiv 1$  en  $U$  toda vez que el orden de la base ortonormal local  $(E_1, \dots, E_n)$  sea compatible con la orientación. Obsérvese que  $\det g \equiv \det[g_{ij}] > 0$ , puesto que la matriz  $[g_{ij}(p)]$  es definida positiva en cada punto  $p \in M$ . Si esta base local está dada por una fórmula de tipo (4.24), entonces la expresión local para esta **forma de volumen riemanniana**  $v_g$  es:

$$v_g|_U = \det[h_s^v] dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n = \boxed{\sqrt{\det g} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n}. \quad (4.25)$$

En particular, la *forma de área* sobre  $\mathbb{S}^2$ , en coordenadas locales o esféricas, es:

$$\sigma = \theta^1 \wedge \theta^2 = 4q^{-2} dx \wedge dy = \sin \theta d\theta \wedge d\phi.$$

### 4.3. Tensores de curvatura

Dada una conexión afín sobre una variedad diferencial  $M$  y tres campos vectoriales  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ , la derivada direccional  $\nabla_Y Z$  es otro campo vectorial, el cual a su vez admite una segunda derivada direccional  $\nabla_X \nabla_Y Z \in \mathfrak{X}(M)$ . La expresión local de esta última incluye derivadas parciales de segundo orden; de donde es evidente que este proceso no es tensorial. Sin embargo, es posible formar un tensor con una modificación astuta de esta segunda derivada, como se verá en seguida.

**Definición 4.20.** Sea  $E \xrightarrow{\pi} M$  un fibrado vectorial. Sea  $\text{End } E \xrightarrow{\Pi} M$  el fibrado vectorial cuya fibra en  $p \in M$  es la  $\mathbb{R}$ -álgebra  $(\text{End } E)_p := \text{End}_{\mathbb{R}}(E_p)$  de **endomorfismos  $\mathbb{R}$ -lineales** del espacio vectorial  $E_p$ . Si la fibra típica de  $E$  es  $F \simeq \mathbb{R}^k$ , entonces la fibra típica de  $\text{End } E$  es  $\text{End}_{\mathbb{R}} F \simeq M_k(\mathbb{R})$ .

A cada trivialización local  $\psi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  del fibrado  $E \xrightarrow{\pi} M$ , le corresponde una trivialización local  $\Psi: \Pi^{-1}(U) \rightarrow U \times M_k(\mathbb{R})$  de  $\text{End } E \xrightarrow{\Pi} M$ , dada por:

$$\Psi^{-1}(p, A) [\psi^{-1}(p, v)] := \psi^{-1}(p, Av).$$

El álgebra de secciones suaves  $\Gamma(M, \text{End } E)$  actúa fibra por fibra sobre  $\Gamma(M, E)$ , el módulo de las secciones suaves de  $E \xrightarrow{\pi} M$ . Es decir, si  $A \in \Gamma(M, \text{End } E)$  y  $s \in \Gamma(M, E)$ , entonces  $As \in \Gamma(M, E)$  se define por  $(As)_p := A_p(s_p)$ .

En particular,  $\text{End}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M)) \equiv \Gamma(M, \text{End } TM)$  es el álgebra de todos los operadores  $C^\infty(M)$ -lineales sobre los campos vectoriales  $\mathfrak{X}(M) = \Gamma(M, TM)$ .  $\diamond$

**Definición 4.21.** Sea  $\nabla$  una conexión afín sobre una variedad  $M$ . Defínase una aplicación  $\mathbb{R}$ -bilineal  $R = R_\nabla: \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{End}_{C^\infty(M)}(\mathfrak{X}(M))$  por la fórmula:

$$R(X, Y)Z := \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z \quad (4.26)$$

para  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ . Este  $R$  es el **operador de curvatura** de la conexión  $\nabla$ .  $\diamond$

**Lema 4.22.** La expresión  $R(X, Y)Z$  es  $C^\infty(M)$ -trilineal en las tres variables  $X, Y, Z$ .

*Demostración.* Es evidente que  $R(Y, X)Z = -R(X, Y)Z$ ; por lo tanto, basta verificar la  $C^\infty(M)$ -linealidad en  $X$  y en  $Z$ . Si  $f, h \in C^\infty(M)$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} R(fX, Y)Z &= f \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f \nabla_X Z) - \nabla_{[fX, Y]} Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - (Yf) \nabla_X Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{f[X, Y]} Z + \nabla_{(Yf)X} Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - (Yf) \nabla_X Z - f \nabla_Y \nabla_X Z - f \nabla_{[X, Y]} Z + (Yf) \nabla_X Z \\ &= f R(X, Y)Z; \end{aligned}$$

y también,

$$\begin{aligned} R(X, Y)(hZ) &= \nabla_X((Yh)Z + h \nabla_Y Z) - \nabla_Y((Xh)Z + h \nabla_X Z) - [X, Y](h)Z - h \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= X(Yh)Z + (Yh) \nabla_X Z + (Xh) \nabla_Y Z + h \nabla_X \nabla_Y Z - [X, Y](h)Z \\ &\quad - Y(Xh)Z - (Xh) \nabla_Y Z - (Yh) \nabla_X Z - h \nabla_Y \nabla_X Z - h \nabla_{[X, Y]} Z \\ &= h \nabla_X \nabla_Y Z - h \nabla_Y \nabla_X Z - h \nabla_{[X, Y]} Z + \{X(Yh) - Y(Xh) - [X, Y](h)\}Z \\ &= h R(X, Y)Z. \end{aligned} \quad \square$$

**Corolario 4.23.** Para  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  y  $\alpha \in \mathcal{A}^1(M)$ , la correspondencia

$$(X, Y, Z, \alpha) \mapsto \langle \alpha, R(X, Y)Z \rangle \quad (4.27)$$

es un tensor mixto de bigrado  $(3, 1)$ , llamado el **tensor de curvatura** de la conexión  $\nabla$ .  $\square$

Para conexiones más generales sobre fibrados vectoriales  $E \xrightarrow{\pi} M$  (no necesariamente el fibrado tangente) se puede definir un operador de curvatura de  $\nabla$ , con valores en  $\Gamma(M, \text{End } E)$ , por la generalización directa de (4.26):

$$\underline{R(X, Y)} s := \nabla_X \nabla_Y s - \nabla_Y \nabla_X s - \nabla_{[X, Y]} s \quad \text{para } s \in \Gamma(M, E). \quad (4.28)$$

La demostración del Lema 4.22, con la única modificación  $Z \mapsto s$ , comprueba la fórmula  $R(X, Y)(hs) = h R(X, Y) s$  para todo  $h \in C^\infty(M)$ , así que  $R(X, Y)$  es un operador  $C^\infty(M)$ -lineal sobre  $\Gamma(M, E)$ . La antisimetría y la  $C^\infty(M)$ -bilinealidad en  $(X, Y)$  muestran que  $R$  es una 2-forma con valores en  $\text{End } E$ , o sea:  $R \in \mathcal{A}^2(M, \text{End } E)$ .

► El tensor (4.27) es antisimétrica en  $X \leftrightarrow Y$ , pero no en  $X \leftrightarrow Z$  ni en  $Y \leftrightarrow Z$ . Entonces este tensor *no define una 3-forma* con valores en  $TM$ . Sin embargo, el caso especial  $\nabla = \nabla^g$ , la conexión de Levi-Civita para una métrica  $g$ , sí posee una amplia gama de simetrías.

**Definición 4.24.** La curvatura de la conexión de Levi-Civita  $\nabla^g$  de una variedad riemanniana  $(M, g)$ , que es una 2-forma con valores matriciales,  $R \in \mathcal{A}^2(M, \text{End } TM)$ , se llama la **curvatura riemanniana** de  $(M, g)$ .  $\diamond$

**Proposición 4.25.** La curvatura riemanniana de una variedad riemanniana  $(M, g)$  cumple las cuatro relaciones de simetría siguientes: si  $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces

- (a)  $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$ ;
- (b)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$ : esta es la **identidad de Bianchi**;
- (c)  $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(X, Y)W, Z)$ ;
- (d)  $g(R(X, Y)W, Z) = g(R(W, Z)X, Y)$ .

*Demostración.* Ad (a): Esta la mencionada antisimetría en  $X \leftrightarrow Y$ , evidente de (4.26).

Ad (b): La identidad de Bianchi es válida para cualquier conexión afín *libre de torsión*. En efecto, nótese que

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_X [Y, Z] = \nabla_X (T_\nabla(Y, Z)) = 0.$$

Al permutar  $X, Y, Z$  cíclicamente (y sumar), se obtiene:

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_Y \nabla_Z X + \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_Z \nabla_Y X \\ - \nabla_X [Y, Z] - \nabla_Y [Z, X] - \nabla_Z [X, Y] = 0. \end{aligned} \quad (4.29a)$$

Al usar (4.26), la identidad (4.29a) queda reformulada así:

$$R(X, Y)Z + \nabla_{[X, Y]}Z + R(Y, Z)X + \nabla_{[Y, Z]}X + R(Z, X)Y + \nabla_{[Z, X]}Y \\ - \nabla_X [Y, Z] - \nabla_Y [Z, X] - \nabla_Z [X, Y] = 0. \quad (4.29b)$$

La libertad de torsión  $T_{\nabla} = 0$  da  $\nabla_{[X, Y]}Z - \nabla_Z [X, Y] = [[X, Y], Z]$  y dos expresiones similares; entonces (4.29b) se simplifica en:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y + [[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0.$$

La identidad de Jacobi cancela los últimos tres términos al lado izquierdo, dejando la identidad de Bianchi:

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0. \quad (4.29c)$$

Ad (c): Basta mostrar que  $g(R(X, Y)Z, Z) = 0$  en general; la identidad (c) se deduce de ésta al polarizarla con las sustituciones  $Z \mapsto Z + W$  y  $Z \mapsto Z - W$ . Escríbase  $h := g(Z, Z) \in C^\infty(M)$ ; la compatibilidad de  $\nabla^g$  con  $g$  y la fórmula (4.20) implican

$$2g(\nabla_X^g Z, Z) = Xg(Z, Z) = Xh.$$

La compatibilidad con  $g$  también muestra que

$$g(R(X, Y)Z, Z) = g(\nabla_X^g \nabla_Y^g Z, Z) - g(\nabla_Y^g \nabla_X^g Z, Z) - g(\nabla_{[X, Y]}^g Z, Z) \\ = Xg(\nabla_Y^g Z, Z) - g(\nabla_Y^g Z, \nabla_X^g Z) - Yg(\nabla_X^g Z, Z) + g(\nabla_X^g Z, \nabla_Y^g Z) - \frac{1}{2}[X, Y](h) \\ = Xg(\nabla_Y^g Z, Z) - Yg(\nabla_X^g Z, Z) - \frac{1}{2}[X, Y](h) \\ = \frac{1}{2}X(Yh) - \frac{1}{2}Y(Xh) - \frac{1}{2}[X, Y](h) = 0.$$

Ad (d): Si  $W \in \mathfrak{X}(M)$ , entonces  $g(R(X, Y)Z, W) = -g(R(Y, X)Z, W)$  por la parte (a). Además, se verifican las siguientes identidades:

$$g(R(X, Y)Z, W) + g(R(Y, Z)X, W) + g(R(Z, X)Y, W) = 0, \\ g(R(W, Y)Z, X) + g(R(Y, Z)W, X) + g(R(Z, W)Y, X) = 0, \\ g(R(X, W)Z, Y) + g(R(W, Z)X, Y) + g(R(Z, X)W, Y) = 0, \\ g(R(X, Y)W, Z) + g(R(Y, W)X, Z) + g(R(W, X)Y, Z) = 0. \quad (4.30a)$$

En efecto, la primera de estas ecuaciones sigue de (4.29c). Las otras se obtienen al intercambiar  $W$  con  $X, Y, Z$  respectivamente.

Al sumar los cuatro lados izquierdos de (4.30a), la condición (c) implica que tres pares de términos se cancelan. Los otros términos forman tres pares repetidos: por ejemplo,  $g(R(Z, W)Y, X) = g(R(W, Z)X, Y)$  por (a) y (c). De ahí resulta que

$$g(R(W, Y)Z, X) + g(R(W, Z)X, Y) + g(R(W, X)Y, Z) = 0. \quad (4.30b)$$

Entonces, al aplicar las condiciones (b) y luego (a) y (c) se obtiene:

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)W, Z) &= -g(R(W, X)Y, Z) - g(R(Y, W)X, Z) \\ &= -g(R(W, X)Y, Z) - g(R(W, Y)Z, X). \end{aligned} \quad (4.30c)$$

De (4.30b) y (4.30c) se deduce que  $g(R(X, Y)W, Z) = g(R(W, Z)X, Y)$ .  $\square$

► Para calcular tensores de curvatura, es necesario expresar sus componentes en las coordenadas locales de una carta  $(U, \phi)$  de  $M$ . Dada una conexión afín cualquiera sobre  $M$ , el tensor de curvatura (4.27), de bigrado  $(3, 1)$ , tiene las componentes

$$R^i_{jkl} := \langle dx^i, R(\partial_k, \partial_l) \partial_j \rangle. \quad (4.31)$$

La fórmula (4.26) para el operador de curvatura se escribe así:

$$R^i_{jkl} \partial_i = R(\partial_k, \partial_l) \partial_j = \nabla_{\partial_k} \nabla_{\partial_l} \partial_j - \nabla_{\partial_l} \nabla_{\partial_k} \partial_j.$$

En vista de (4.6), la curvatura de  $\nabla$  está determinada por los símbolos de Christoffel y sus derivadas:

$$\begin{aligned} R^i_{jkl} &= \langle dx^i, \nabla_{\partial_k} (\Gamma^m_{jl} \partial_m) \rangle - \langle dx^i, \nabla_{\partial_l} (\Gamma^m_{jk} \partial_m) \rangle \\ &= \langle dx^i, (\partial_k \Gamma^m_{jl}) \partial_m + \Gamma^m_{jl} \Gamma^r_{mk} \partial_r \rangle - \langle dx^i, (\partial_l \Gamma^m_{jk}) \partial_m + \Gamma^m_{jk} \Gamma^r_{ml} \partial_r \rangle, \end{aligned}$$

y esta expresión se simplifica en la siguiente fórmula local:

$$R^i_{jkl} = \partial_k \Gamma^i_{jl} - \partial_l \Gamma^i_{jk} + \Gamma^m_{jl} \Gamma^i_{mk} - \Gamma^m_{jk} \Gamma^i_{ml}. \quad (4.32)$$

En el caso de que  $\nabla = \nabla^g$  es la conexión de Levi-Civita para una métrica Riemanniana  $g$  sobre  $m$ , los componentes (4.31) dan lugar a un 4-tensor covariante, también denotado por  $R$  pero con cuatro subíndices:

$$R_{ijkl} := g(\partial_i, R(\partial_k, \partial_l) \partial_j) = g_{im} R^m_{jkl}. \quad (4.33)$$

Las simetrías de la Proposición 4.25 ahora se manifiestan así:

$$R_{ijkl} = -R_{jikl} = -R_{ijlk}; \quad R_{ijkl} + R_{iljk} + R_{iklj} = 0; \quad R_{ijkl} = R_{klij}. \quad (4.34)$$

**Definición 4.26.** La curvatura riemanniana  $R$  sobre  $(M, g)$  da lugar a otros tensores, por contracción de índices. El **tensor de Ricci** es la traza de la aplicación  $C^\infty(M)$ -lineal  $Y \mapsto R(-, Y)$ , la cual es un 2-tensor covariante Ric, con componentes locales:

$$R_{jl} \equiv \text{Ric}_{jl} := \text{tr}(R_{j\bullet l}) = R_{jkl}^k. \quad (4.35)$$

En vista de las simetrías de  $R$ , el tensor de Ricci es *simétrico*:

$$R_{lj} = R_{lmj}^m = g^{mk} R_{klmj} = g^{km} R_{mjkl} = R_{jkl}^k = R_{jl}.$$

La contracción total del tensor de Ricci con la métrica inversa  $g^{-1}$  es una función  $S \in C^\infty(M)$  definida por

$$S := g^{jl} R_{jl} = g^{jl} g^{km} R_{mjkl}. \quad (4.36)$$

Esta  $S$  es la **curvatura escalar**  $S$  de la variedad riemanniana  $(M, g)$ .  $\diamond$

En una variedad riemanniana  $(M, g)$  de dimensión 2, los componentes locales  $R_{ijkl}$  del tensor de curvatura obedecen las relaciones de simetría (4.34), donde  $i, j, k, l = 1, 2$ . De las primeras dos relaciones, se ve que  $R_{ijkl} = 0$  si  $i = j$  o bien  $k = l$ . Los otros coeficientes son  $R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121}$ ; y para ellos, las relaciones tercera (de Bianchi) y cuarta son automáticas. Por lo tanto,  $R$  queda determinado por el coeficiente  $R_{1212}$  solamente.

Si  $\dim M = 4$ , las relaciones de simetría reducen las 256 componentes de  $R$  a unos 20 componentes independientes. En dimensión  $n$ , el número de componentes independientes es  $n^2(n^2 - 1)/12$ .

**Proposición 4.27.** La esfera  $\mathbb{S}^2$  tiene curvatura escalar constante  $S \equiv 2$ .

*Demostración.* En el caso de la esfera  $\mathbb{S}^2$ , basta hacer el cálculo en el dominio de carta local  $U = \mathbb{S}^2 \setminus \{\mathbf{e}_3\}$ ; hay un cálculo análogo en  $V = \mathbb{S}^2 \setminus \{-\mathbf{e}_3\}$ . (Como  $U \cap V \neq \emptyset$ , los valores constantes de  $S$  en  $U$  y en  $V$  deben ser – y son – iguales.)

Con la notación del Ejemplo 4.17, se usa coordenadas locales  $(x, y)$  en  $U$  y se escribe  $q := 1 + x^2 + y^2$ . Los símbolos de Christoffel fueron calculados en (4.23):

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= -\frac{2x}{q}, & \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = -\frac{2y}{q}, & \Gamma_{22}^1 &= +\frac{2x}{q}, \\ \Gamma_{11}^2 &= +\frac{2y}{q}, & \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = -\frac{2x}{q}, & \Gamma_{22}^2 &= -\frac{2y}{q}. \end{aligned}$$

Como las matrices  $[g_{ij}]$  y  $[g^{rs}]$  son diagonales, las sumatorias en (4.33) tienen un solo término cada uno; por ejemplo,  $R_{1212} = g_{11} R_{212}^1$  y luego  $R_{212}^1 = g^{11} R_{1212}$ .

En seguida, a partir de (4.31) se calcula:

$$\begin{aligned} R_{212}^1 &= \partial_1 \Gamma_{22}^1 - \partial_2 \Gamma_{12}^1 + \Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^1 - \Gamma_{21}^m \Gamma_{m2}^1 \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{2x}{q} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{2y}{q} \right) - \frac{4x^2}{q^2} + \frac{4y^2}{q^2} - \frac{4y^2}{q^2} + \frac{4x^2}{q^2} \\ &= \frac{2q - 4x^2}{q^2} + \frac{2q - 4y^2}{q^2} = \frac{4}{q^2}, \end{aligned}$$

y en consecuencia

$$R_{1212} = g_{11} R_{212}^1 = \frac{4}{q^2} \cdot \frac{4}{q^2} = \frac{16}{q^4}.$$

Los componentes del tensor de Ricci son:

$$\begin{aligned} R_{22} &= R_{212}^1 + R_{222}^2 = R_{212}^1 + g^{22} R_{2222} = R_{212}^1 = \frac{4}{q^2}, \\ R_{11} &= R_{111}^1 + R_{121}^2 = g^{11} R_{1111} + g^{22} R_{2121} = g^{22} R_{1212} = \frac{q^2}{4} \cdot \frac{16}{q^4} = \frac{4}{q^2}, \end{aligned}$$

y de modo similar  $R_{12} = R_{21} = 0$ . Luego las matrices  $[g^{rs}]$  y  $[R_{jl}]$  son diagonales en este caso; la curvatura escalar es una suma de dos términos:

$$S = g^{jl} R_{jl} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \frac{q^2}{4} \cdot \frac{4}{q^2} + \frac{q^2}{4} \cdot \frac{4}{q^2} \equiv 2.$$

Un cálculo similar muestra que  $S \equiv 2$  en  $V$ ; luego vale  $S \equiv 2$  en todo  $\mathbb{S}^2$ . □

La métrica estándar en  $M = \mathbb{R}^n$  es constante,  $g_{ij} = \delta_{ij}$ ; y su curvatura escalar es  $S \equiv 0$ . Existen otras superficies de curvatura constante negativa, llamadas *seuoesferas*.

#### 4.4. Fibrados principales y formas de conexión

La teoría de conexiones y curvatura puede ser reformulada en términos de ciertas formas diferenciales locales. Para abordarlas, es necesario introducir el *fibrado de marcos* (locales) sobre una variedad diferencial, definido a continuación.

**Definición 4.28.** Sea  $M$  es una variedad diferencial de dimensión  $n$ , sea  $\mathcal{F}M \xrightarrow{\sigma} M$  el fibrado cuya fibra  $\mathcal{F}_p M$  en el punto  $p$  es la totalidad de bases  $\{v_1, \dots, v_n\}$  del espacio tangente  $T_p M$ . Al elegir una base, se define<sup>9</sup> un isomorfismo lineal  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$ ; el

<sup>9</sup>El isomorfismo lineal  $u$  queda determinado por sus valores en la base estándar de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u(\mathbf{e}_i) := v_i$ , que deben ser vectores linealmente independientes.

conjunto  $\mathcal{F}_p M$  es la totalidad de tales isomorfismos. El grupo de Lie  $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$  de los *automorfismos lineales* de  $\mathbb{R}^n$  actúa (libre y transitivamente) sobre  $\mathcal{F}_p M$  por composición a la derecha:

$$u \mapsto u \circ A: \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{u} T_p M.$$

Si  $\{(U, \phi)\}$  es una carta de un atlas que trivializa el fibrado tangente  $TM \xrightarrow{\tau} M$ , se puede hallar un **marco local**  $\{X_1, \dots, X_n\}$  en  $\mathfrak{X}(U)$  cuyos valores puntuales  $(X_i)_p$  forman una base de  $T_p M$ , para  $p \in U_j$ . El marco local  $\{\partial/\partial x^1, \dots, \partial/\partial x^n\}$  es un ejemplo particular de eso. Entonces  $\bigcup_{p \in U_j} \mathcal{F}_p M \equiv \sigma^{-1}(U_j) \approx U_j \times G$ . Así se define un *fibrado principal*  $\mathcal{F}M \xrightarrow{\sigma} M$ , el **fibrado de marcos** de  $M$ , cuya fibra típica es  $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ .  $\diamond$

El uso de un marco local da lugar a una manera alternativa de estudiar conexiones afines, que generaliza los símbolos de Christoffel. Este punto de vista fue introducido por Élie Cartan con su **método del marco móvil**.<sup>10</sup>

**Definición 4.29.** Sea  $(U, \phi)$  una carta local de una variedad diferencial  $M$ , que trivializa el fibrado tangente  $TM \xrightarrow{\tau} M$ . Sea  $\{X_1, \dots, X_n\}$  un marco local de  $\mathfrak{X}(U)$ . Cada  $X \in \mathfrak{X}(M)$  tiene la siguiente expansión sobre  $U$ :

$$X|_U =: \underline{\theta^i(X)} X_i \quad \text{con} \quad \theta^1, \dots, \theta^n \in \mathcal{A}^1(U). \quad (4.37a)$$

Si  $\nabla$  es una conexión afín sobre  $M$ , cada  $\nabla_X(X_j) \in \mathfrak{X}(U)$  posee una expansión similar:

$$\nabla_X(X_j) =: \underline{\omega_j^i(X)} X_i \quad \text{con cada} \quad \omega_j^i \in \mathcal{A}^1(U). \quad (4.37b)$$

Los lados izquierdos de estas ecuaciones dependen tensorialmente de  $X$ , así que los coeficientes  $\theta^i(X)$  y  $\omega_j^i(X)$  dependen  $C^\infty(M)$ -linealmente de  $X$ . En otras palabras, estas  $\theta^i$  y  $\omega_j^i$  son *1-formas locales* sobre  $U$ .  $\diamond$

**Definición 4.30.** La torsión  $T_\nabla$  y la curvatura  $R_\nabla$  de una conexión  $\nabla$ , definidas por las fórmulas respectivas (4.18) y (4.26), permiten introducir ciertas *2-formas locales* en términos de un marco local  $\{X_1, \dots, X_n\}$  sobre  $U$ :

$$T_\nabla(X, Y)|_U =: \underline{\tau^i(X, Y)} X_i \quad \text{con} \quad \tau^1, \dots, \tau^n \in \mathcal{A}^2(U), \quad (4.38a)$$

$$R_\nabla(X, Y) X_j =: \underline{\Omega_j^i(X, Y)} X_i \quad \text{con cada} \quad \Omega_j^i \in \mathcal{A}^2(U). \quad (4.38b)$$

Cabe recordar que  $T_\nabla(X, Y)$  y  $R_\nabla(X, Y)$  son antisimétricos y tensoriales en  $X, Y$ , así que estas  $\tau^i$  y  $\Omega_j^i$  son efectivamente *2-formas* sobre  $U$ .  $\diamond$

<sup>10</sup>El método de la **repère mobile** (el marco móvil) fue expuesto en el libro: Élie Cartan, *La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus, et les espaces généralisés*, Actualités Scientifiques et Industrielles 194, Hermann, Paris, 1935.

Estas 1-formas y 2-formas locales no son independientes, sino que están ligadas por las **ecuaciones estructurales de Cartan**, como demuestra el teorema siguiente.

**Teorema 4.31** (Cartan). *Dado un marco local  $\{X_1, \dots, X_n\}$  de  $\mathfrak{X}(U)$ , las formas locales (4.37) y (4.38) obedecen estas **ecuaciones de estructura**:*

$$\begin{aligned} \tau^i &= d\theta^i + \omega_j^i \wedge \theta^j, \\ \Omega_j^i &= d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k. \end{aligned} \quad (4.39)$$

*Demostración.* El siguiente cálculo en  $\mathfrak{X}(U)$  sigue directamente de la definición de torsión y las fórmulas (4.37):

$$\begin{aligned} \tau^i(X, Y) X_i &= T_{\nabla}(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \\ &= \nabla_X(\theta^j(Y) X_j) - \nabla_Y(\theta^j(X) X_j) - \theta^j([X, Y]) X_j \\ &= \{X(\theta^j(Y)) - Y(\theta^j(X)) - \theta^j([X, Y])\} X_j + \theta^j(Y) \nabla_X(X_j) - \theta^j(X) \nabla_Y(X_j) \\ &= d\theta^j(X, Y) X_j + \theta^j(Y) \omega_j^i(X) X_i - \theta^j(X) \omega_j^i(Y) X_i \\ &= \{d\theta^i(X, Y) + \omega_j^i(X) \theta^j(Y) - \omega_j^i(Y) \theta^j(X)\} X_i \\ &= \{d\theta^i(X, Y) + \omega_j^i \wedge \theta^j(X, Y)\} X_i \end{aligned}$$

al usar la fórmula  $\omega_j^i \wedge \theta^j = \omega_j^i \otimes \theta^j - \theta^j \otimes \omega_j^i$ . La independencia lineal de los  $X_i$  produce la primera ecuación de (4.39).

De modo similar, de la definición de curvatura y las fórmulas (4.37) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Omega_j^i(X, Y) X_i &= R_{\nabla}(X, Y) X_j = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}) X_j \\ &= \nabla_X(\omega_j^i(Y) X_i) - \nabla_Y(\omega_j^i(X) X_i) - \omega_j^i([X, Y]) X_i \\ &= \{X(\omega_j^i(Y)) - Y(\omega_j^i(X)) - \omega_j^i([X, Y])\} X_i + \omega_j^i(Y) \nabla_X(X_k) - \omega_j^i(X) \nabla_Y(X_k) \\ &= d\omega_j^i(X, Y) X_i + \omega_k^i(X) \omega_j^k(Y) X_i - \omega_k^i(Y) \omega_j^k(X) X_i \\ &= \{d\omega_j^i(X, Y) + \omega_k^i \wedge \omega_j^k(X, Y)\} X_i \end{aligned}$$

así que  $\Omega_j^i(X, Y) = (d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k)(X, Y)$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{X}(U)$ .  $\square$

Es posible escribir las ecuaciones estructurales de Cartan en una forma más compacta al notar que los productos cuña en (4.39) aparecen en el formato de productos matriciales (habida cuenta del convenio de Einstein). Conviene introducir ciertos vectores columna

$$\theta := [\theta^i] \in \mathcal{A}^1(U, \mathbb{R}^n), \quad \tau := [\tau^i] \in \mathcal{A}^2(U, \mathbb{R}^n);$$

usando  $\underline{\mathcal{A}^k(U, \mathbb{R}^n)} := \mathcal{A}^k(U) \otimes_{C^\infty(M)} \Gamma(U, M \times \mathbb{R}^n)$ , una variante de la notación (4.12) apropiada para fibrados vectoriales triviales.

También se puede introducir ciertas matrices cuadradas

$$\omega := [\omega_j^i] \in \mathcal{A}^1(U, \mathfrak{g}), \quad \Omega := [\Omega_j^i] \in \mathcal{A}^2(U, \mathfrak{g}),$$

donde  $\mathfrak{g} = M_n(\mathbb{R})$  es el álgebra de Lie del grupo de Lie  $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ . Se definen los “productos cuña matriciales”  $\omega \wedge \theta$  y  $\omega \wedge \omega$  entrada por entrada. Entonces las ecuaciones de estructura se resumen en estas fórmulas:

$$\tau = d\theta + \omega \wedge \theta, \quad \Omega = d\omega + \omega \wedge \omega. \quad (4.40)$$

► A esta altura, es un poco insatisfactorio trabajar solamente con formas diferenciales locales. Es deseable obtener una reformulación “global” de tales formas  $\theta^i$  y  $\omega_j^i$ , reemplazándolas por objetos que no dependen de cartas locales. El concepto que permite sentar ese contexto global es el de un fibrado principal, que obtuvo una mención breve en la sección 1.9.

**Definición 4.32.** Un **fibrado principal**  $(P, M, \sigma; G)$ , también denotado por  $P \xrightarrow{\sigma} M$ , es un fibrado cuya fibra típica es un grupo de Lie  $G$ , que actúa libre y transitivamente a la derecha sobre cada fibra  $P_q$ . (La acción del grupo  $G$  es **libre** si el subgrupo de isotropía de cada  $u \in P$  es  $\{1\}$ ; es **transitiva** sobre  $P_q$  si la acción permuta todos los puntos de  $P_q$ .) De esta manera, existe una función suave  $R: P \times G \rightarrow P$  denotado por  $R(u, g) := u \triangleleft g$  tal que, en contraste con la acción a izquierda (1.50):

$$(u \triangleleft g) \triangleleft h = u \triangleleft (gh), \quad u \triangleleft 1 = u \quad \text{para todo } u \in P; g, h \in G.$$

El fibrado y la acción del grupo de estructura  $G$  deben ser compatibles, como sigue:

- Se requiere que  $\sigma(u \triangleleft g) = \sigma(u)$  para todo  $u \in P, g \in G$ , y que  $G \rightarrow P_{\sigma(u)} : g \mapsto u \triangleleft g$  sea biyectiva. Así, las fibras  $P_{\sigma(u)}$  son las órbitas de la acción de  $G$  sobre  $P$ .
- Las trivializaciones locales  $\psi_j: \pi^{-1}(U_j) \rightarrow U_j \times G$  de (1.52) deben ser *equivariantes* para las acciones de  $G$  sobre  $P$  y sobre  $M \times G$  mediante  $(p, g) \triangleleft h := (p, gh)$ . Esta condición dice que  $\psi_j(u \triangleleft h) = \psi_j(u) \triangleleft h$  para  $u \in U_j, h \in G$ .  $\diamond$

En la sección 1.9, ya se notó que cuando  $H$  un subgrupo cerrado de un grupo de Lie  $G$ , la aplicación cociente  $G \xrightarrow{\eta} G/H$  determina un fibrado principal con fibra típica  $H$ .

El fibrado de marcos  $\mathcal{F}M \xrightarrow{\sigma} M$  de la Definición 4.28 es también un fibrado principal, cuyo grupo de estructura es  $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$ . Se puede generalizar este ejemplo, como sigue, al reemplazar el fibrado tangente por cualquier otro fibrado vectorial.

**Definición 4.33.** Sea  $E \rightarrow M$  un fibrado vectorial de rango  $k$ . Defínase un fibrado principal  $\mathcal{F}(E) \xrightarrow{\sigma} M$  como sigue. Para  $p \in M$ , sea  $\mathcal{F}(E)_p \equiv \mathcal{F}(E_p)$  la totalidad de isomorfismos lineales  $u_p: \mathbb{R}^k \rightarrow E_p$ . El espacio total es la unión disjunta de estos  $\mathcal{F}(E_p)$ :

$$\mathcal{F}(E) := \{ u = (p, u_p) : p \in M, u_p \in \mathcal{F}(E_p) \}, \quad \sigma(u) := p. \quad (4.41)$$

Si  $\psi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$  es una trivialización local de  $E \xrightarrow{\pi} M$ , entonces la aplicación  $u \mapsto \text{pr}_2(\psi(u))$  define isomorfismos lineales  $\psi_p: E_p \rightarrow \mathbb{R}^k$ , con  $g_p := \psi_p \circ u_p \in \text{GL}(k, \mathbb{R})$ . Al definir  $\varphi(u) := (p, g_p)$ , se obtiene una trivialización local  $\varphi: \sigma^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{GL}(k, \mathbb{R})$  que es equivariante para las acciones a derecha de  $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ . El fibrado principal así definido es el **fibrado de marcos** de  $E$ . Su grupo de estructura es  $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ .  $\diamond$

En la dirección contraria, es posible recuperar un fibrado vectorial a partir de su fibrado de marcos, como sigue.

**Definición 4.34.** Hay una acción a izquierda de  $G = \text{GL}(k, \mathbb{R})$  sobre  $\mathcal{F}(E) \times \mathbb{R}^k$  por la fórmula “diagonal”:

$$A \triangleright (u, x) := (u \circ A^{-1}, Ax) \quad \text{para } A \in \text{GL}(k, \mathbb{R}). \quad (4.42)$$

El espacio cociente de  $\mathcal{F}(E) \times \mathbb{R}^k$  bajo esta acción (esto es, el conjunto de las órbitas) se llama el **producto fibrado** de  $\mathcal{F}(E)$  y  $\mathbb{R}^k$ , denotado por

$$\underline{\mathcal{F}(E) \times_G \mathbb{R}^k}.$$

Sus elementos son las clases de equivalencia  $[u, x]$  de  $(u, x)$  bajo la acción (4.42). Para  $u \in \mathcal{F}(E)$  fijo, estas clases forman un espacio  $\mathbb{R}$ -vectorial, al poner  $a[u, x] + b[u, y] := [u, ax + by]$ . Fíjese que

$$[u \circ A, x] = [u, Ax] \quad \text{para cada } A \in \text{GL}(k, \mathbb{R}),$$

así que este espacio vectorial depende solo del punto de la base  $p = \sigma(u) \in M$ . Entonces  $\mathcal{F}(E) \times_G \mathbb{R}^k \xrightarrow{\bar{\sigma}} M$  es un fibrado vectorial, con proyección  $\bar{\sigma}([u, x]) := \sigma(u)$ .

Al definir  $\theta([u, x]) := u(x) \in E_{\sigma(u)}$ , se obtiene un isomorfismo de fibrados vectoriales  $\theta: \mathcal{F}(E) \times_G \mathbb{R}^k \rightarrow E$ ; se ve que  $\pi \circ \theta = \bar{\sigma}$  por su definición.  $\diamond$

¶ La fórmula (4.42) aprovecha la acción (matriz por columna) de  $\text{GL}(k, \mathbb{R})$  sobre  $\mathbb{R}^k$ . A veces conviene generalizarla, al reemplazar  $\text{GL}(k, \mathbb{R})$  por un grupo de Lie  $G$  cualquiera y  $\mathbb{R}^k$  por un espacio vectorial  $V$ , junto con una *representación* de  $G$  sobre  $V$ , esto es, un

homomorfismo de grupos  $\rho: G \rightarrow \text{GL}(V)$ . Dado un fibrado principal  $P \xrightarrow{\sigma} M$  con grupo de estructura  $G$ , se usa la acción  $g \triangleright (u, x) := (u \circ g^{-1}, \rho(g)x)$  de  $G$  sobre  $P \times V$  para definir el producto fibrado  $\underline{E} := P \times_G V$  como antes. Se obtiene así un fibrado  $E \xrightarrow{\pi} M$  que se llama el **fibrado vectorial asociado** a  $P \xrightarrow{\sigma} M$  mediante la representación  $\rho$ .  $\square$

**Ejemplo 4.35.** Si  $(M, g)$  es una variedad riemanniana, cada espacio tangente  $T_p M$  posee un producto escalar real  $g_p$ . Sea  $\mathcal{O}_p M$  la totalidad de *bases ortonormales*  $\{v_1, \dots, v_n\}$  de  $T_p M$ . La base estándar  $\{e_1, \dots, e_n\}$  de  $\mathbb{R}^n$  es una base ortonormal para el producto escalar usual; luego, se puede identificar  $\mathcal{O}_p M$  con las **isometrías lineales**  $v: \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$  entre estos dos espacios euclidianos, al tomar  $v_j := v(e_j)$  en cada caso.

El grupo de Lie  $O(n)$  – las isometrías lineales de  $\mathbb{R}^n$  – actúa a la derecha  $\mathcal{O}_p M$  por composición:  $v \mapsto v \circ A: \mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^n \xrightarrow{v} T_p M$ .

Por analogía con la Definición 4.28, estas  $\mathcal{O}_p(M)$  son fibras de un fibrado principal  $\mathcal{O}(M) \xrightarrow{\sigma} M$ , cuyo grupo de estructura es  $O(n)$ . Este es el **fibrado de marcos ortonormales** de  $(M, g)$ .  $\diamond$

**Definición 4.36.** Sea  $P \xrightarrow{\sigma} M$  un fibrado principal con grupo de estructura  $G$  y sea  $\mathfrak{g}$  el álgebra de Lie de  $G$ . Para cada  $X \in \mathfrak{g}$ , se define un **campo vectorial fundamental**  $\tilde{X}$  sobre  $P$  por:

$$\tilde{X}_u := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (u \triangleleft \exp tX). \tag{4.43}$$

Esta fórmula verifica la relación

$$\tilde{X}f(u) \equiv \tilde{X}_u(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} f(u \triangleleft \exp tX), \quad \text{para } f \in C^\infty(P),$$

al notar que  $(u, t) \mapsto f(u \triangleleft \exp tX)$  es suave sobre  $P \times \mathbb{R}$ . Luego  $\tilde{X}f \in C^\infty(P)$ , y por ende  $\tilde{X}$  es un campo vectorial sobre  $P$ ; su regla de Leibniz es inmediato.

De esta manera, se obtiene una aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal

$$j: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{X}(P) : X \mapsto \tilde{X}, \tag{4.44}$$

que de hecho es un homomorfismo de álgebras de Lie:<sup>11</sup> o sea,  $j([X, Y]) = [\tilde{X}, \tilde{Y}]$ . La curva integral de  $\tilde{X}$  que pasa por  $u$  es  $\gamma(t) := u \triangleleft \exp tX$ .  $\diamond$

<sup>11</sup>Esto puede mostrarse usando la fórmula (1.44) de Campbell Baker y Hausdorff, en el caso de grupos de Lie matriciales.

La aplicación  $j$  resulta ser equivariante bajo dos acciones a derecha del grupo de Lie  $G$ . Sobre  $\mathfrak{g}$  se usa la acción adjunta del Ejercicio 1.35. Esta es una acción a izquierda; para obtener una acción a derecha, basta cambiar  $g \leftrightarrow g^{-1}$ :

$$\text{Ad}(g^{-1})X := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^{-1}(\exp tX)g.$$

Para obtener la acción de  $G$  sobre los campos vectoriales fundamentales, conviene usar las notaciones:

$$\underline{\theta}_u : G \rightarrow P : g \mapsto u \triangleleft g, \quad \underline{r}_g : P \rightarrow P : u \mapsto u \triangleleft g,$$

observando que  $g \mapsto r_g$  es la acción libre de  $G$  sobre  $P$ .

**Lema 4.37.** *La aplicación  $j$  de (4.44) es equivariante bajo las dos acciones a derecha de  $G$ :*

$$(r_g)_* \tilde{X} = (\text{Ad}(g^{-1})X)^\sim. \quad (4.45)$$

*Demostración.* Fíjese que  $\gamma(t) := u \triangleleft \exp tX = \theta_u(\exp tX)$ . Entonces  $\tilde{X}_u = \dot{\gamma}(0) = T_1\theta_u(X)$ . Además,

$$r_g\theta_u(h) = (u \triangleleft h) \triangleleft g = u \triangleleft hg = u \triangleleft g(g^{-1}hg) \quad \text{para } h \in G.$$

Al sustituir  $h = \exp tX$ , la derivada de esta relación en  $t = 0$  produce

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} r_g(u \triangleright \exp tX) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \theta_{u \triangleleft g}(g^{-1}(\exp tX)g).$$

Con regla de la cadena (1.16) se deduce que

$$T_u r_g(\tilde{X}_u) = T_u r_g \circ T_1 \theta_u(X) = T_1 \theta_{u \triangleleft g}(\text{Ad}(g^{-1})X) = ((\text{Ad}(g^{-1})X)^\sim)_{u \triangleleft g}$$

y esto coincide con la igualdad (4.43) evaluada en el punto arbitrario  $(u \triangleright g) \in P$ .  $\square$

**Definición 4.38.** Si  $u \in P$  y  $q := \sigma(u) \in M$ , sea  $T_u\sigma : T_uP \rightarrow T_qM$  la aplicación tangente en  $u$  de la sumersión sobreyectiva  $\sigma : P \rightarrow M$ . El subespacio vectorial

$$\underline{V}_u := \ker T_u\sigma \leq T_uP$$

se conoce como el **espacio tangente vertical** en  $u$ .  $\diamond$

**Lema 4.39.** *Los campos vectoriales fundamentales  $\tilde{X}_u$  de (4.43) son verticales.*

*Demostración.* Como  $T_u\sigma$  es sobreyectiva (porque  $\sigma$  es una sumersión), hay una *sucesión exacta corta* de espacios vectoriales:

$$\boxed{0 \longrightarrow V_u \longrightarrow T_uP \xrightarrow{T_u\sigma} T_{\sigma(u)}M \longrightarrow 0.} \tag{4.46}$$

Fíjese que  $\sigma \circ \theta_u(g) = \sigma(u \triangleleft g) = \sigma(u)$  para todo  $g \in G$ , así que  $\sigma \circ \theta_u: G \rightarrow M$  es una función constante. Al combinar eso con la regla de la cadena, se obtiene

$$T_u\sigma(\tilde{X}_u) = T_u\sigma(T_1\theta_u(X)) = T_u(\sigma \circ \theta_u)(X) = 0 \quad \text{para } X \in \mathfrak{g}.$$

Se concluye  $\tilde{X}_u \in V_u$  para cada  $u \in P$  y cada  $X \in \mathfrak{g}$ . □

Si algún  $\tilde{X}_u = 0$  en  $V_u$ , entonces la curva integral  $\gamma(t) := u \triangleleft \exp tX$  cumple  $\gamma(0) = u$  y  $\dot{\gamma}(0) = 0$ ; por su unicidad se obtiene  $\gamma(t) \equiv u$  para  $t \in \mathbb{R}$ . Esto dice que el subgrupo uniparamétrico  $\{\exp tX : t \in \mathbb{R}\} \leq G$  deja fijo el punto  $u \in P$ . Como la acción de  $G$  sobre  $P$  es *libre* por hipótesis, se deduce que  $\exp tX \equiv 1$  en  $G$  y que  $X = 0$  en  $\mathfrak{g}$ . Como resultado, la aplicación  $\mathbb{R}$ -lineal  $X \mapsto X_u : \mathfrak{g} \rightarrow V_u$  es inyectiva.

Al contar dimensiones, en vista de que

$$\dim_{\mathbb{R}} V_u = \dim P - \dim M = \dim G = \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{g}$$

se deduce que  $V_u = \{\tilde{X}_u : X \in \mathfrak{g}\}$ .

Es posible comprobar que los  $V_u$  son fibras de un fibrado vectorial trivial  $V \xrightarrow{\tau} P$ , de rango  $n = \dim M$ , que es un *subfibrado* del fibrado tangente  $TP \xrightarrow{\tau} P$ .

► La estructura de fibrados principales expuesta hasta este momento solamente ha empleado las herramientas generales introducidos en el capítulo 1, sin referencia alguna a conexiones ni curvaturas. Ya es hora de vincular las dos sectores de la teoría.

**Definición 4.40.** Dado un fibrado principal  $P \xrightarrow{\sigma} M$  con grupo de estructura  $G$ , un subfibrado  $H \xrightarrow{\tau} P$  del fibrado tangente  $TP \xrightarrow{\tau} P$  es un **subfibrado horizontal** de  $TP$  si  $T_uP = V_u \oplus H_u$  para todo  $u \in P$ .

¶ Se escribe  $TP = V \oplus H$ : la *suma de Whitney* de dos fibrados vectoriales. ¶ ◇

Un subfibrado horizontal, si existe, proporciona un espacio vectorial suplementario  $H_u \leq T_uP$  al espacio tangente vertical (de ahí su nombre). Resulta que no hay una manera canónica de elegir estos subespacios suplementarios: el subfibrado horizontal no es único. Se verá a continuación cómo una *conexión afín* sobre  $M$  puede dar lugar a un subfibrado horizontal.

► Sea  $M$  una variedad diferencial y sea  $(U, \phi)$  una carta local de  $M$ . Un marco local definido en  $U$ , dada por campos vectoriales locales  $\{X_1, \dots, X_n\} \subset \mathfrak{X}(U)$ , define una sección local del fibrado de marcos  $\mathcal{FM} \xrightarrow{\sigma} M$ , esto es, un elemento de  $\Gamma(U, \mathcal{FM})$ . Tómese un punto  $p \in U$ ; hay un único isomorfismo lineal  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow T_p M$  tal que  $u(e_j) := X_j|_p$  para  $j = 1, \dots, n$ . Obviamente,  $\sigma(u) = p$ . Considérese también una curva suave  $\gamma: I \rightarrow U$  tal que  $\gamma(0) = p$  y  $\dot{\gamma}(0) \neq 0$ .

Tómese ahora una conexión afín  $\nabla$  sobre  $M$ . Se ha visto que, para cada  $j \in \{1, \dots, n\}$ , esta  $\nabla$  determina el transporte paralelo a lo largo de  $\gamma$  del vector tangente  $X_j|_p \in T_p M$ , en vectores tangentes  $Y_j(t) \in T_{\gamma(t)} M$ , dados por la solución única del problema de valor inicial

$$\nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y_j(t) = 0; \quad Y_j(0) = X_j|_p \in T_p M. \quad (4.47)$$

De este modo, se obtiene  $n$  curvas  $t \mapsto Y_j(t)$  en  $TM$ , definidos en un subintervalo  $J \subset I$  con  $0 \in J$  (en donde se garantiza la existencia única de las soluciones de (4.47)), que son linealmente independientes en  $t = 0$ . Si fueran linealmente dependientes en  $t_1 \in J$ , habría una combinación lineal no trivial  $c^j Y_j(t_1) = 0$ ; pero del mismo modo se podría trasladar ese vector tangente nulo en  $T_{\gamma(t_1)} M$  “para atrás”, a lo largo de la curva reversa  $s \mapsto \gamma(t_1 - s)$ , y por unicidad de las soluciones se obtendría  $c^j Y_j(0) = 0$  cuando  $s = t_1$ , contrario a hipótesis.<sup>12</sup>

Estos  $n$  curvas en el espacio total  $TM$  del fibrado tangente determinan una curva<sup>13</sup>

$$\underline{\Gamma}(t) \equiv \{Y_1(t), \dots, Y_n(t)\}$$

en el espacio total  $P := \mathcal{FM}$  del fibrado de marcos, con valor inicial  $\Gamma(0) = u$ .

Fíjese que  $\sigma(\Gamma(t)) = \gamma(t)$ . Ahora bien, el marco local dado también define una segunda curva  $\underline{u}(t) := \{X_1|_{\gamma(t)}, \dots, X_n|_{\gamma(t)}\}$  en  $P$  con  $u(0) = u$  y  $\sigma(u(t)) = \gamma(t)$  para  $t \in I$ . Como el grupo  $G = \text{GL}(n, \mathbb{R})$  actúa libre y transitivamente sobre las fibras de  $P$ , se obtiene

$$u(t) = \Gamma(t) \triangleleft g(t) \quad \text{para } t \in I, \quad (4.48)$$

donde los  $g(t)$  definen una curva suave  $t \mapsto g(t) \in G$ , con  $g(0) = 1$ .

La derivada de esta relación en  $t = 0$  tiene la forma

$$\dot{u}(0) = \dot{\Gamma}(0) \triangleleft g(0) + \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\Gamma(0) \triangleleft g(t)) = \dot{\Gamma}(0) + \tilde{A}_u \quad (4.49)$$

donde  $A := \dot{g}(0)$ , usando la definición (4.43) del campo vectorial fundamental  $\tilde{A}$  en el punto  $\Gamma(0) = u$ .

<sup>12</sup>Este argumento verifica que la traslación paralela  $\Psi_{\gamma(t_1), p}: T_p M \rightarrow T_{\gamma(t_1)} M$  es un isomorfismo lineal.

<sup>13</sup>No es problema que  $\Gamma$  esté definido inicialmente solo en un subintervalo  $J$  de  $I$ , porque en cada  $t_1$  en  $J$  se podría reiniciar la traslación paralela, con unicidad. Al cubrir un subintervalo compacto de  $I$  por un número finito de tales intervalos  $J$ , se ve que el marco  $\Gamma(t) \in \mathcal{F}_{\gamma(t)} M$  está bien definido para todo  $t \in I$ .

**Lema 4.41.** Si  $\omega = [\omega_j^i] \in \mathcal{A}^1(U; M_n(\mathbb{R}))$  es la matriz de 1-formas (4.37b) asociada al marco local  $\{X_1, \dots, X_n\}$ , entonces  $A = \omega(\dot{\gamma}(0))$ .

*Demostración.* La fórmula (4.37b), evaluada en el punto  $p \in U$ , dice que

$$\nabla_{\dot{\gamma}(0)} X_j = \omega_j^i(\dot{\gamma}(0)) X_i|_p.$$

Esto es el valor en  $t = 0$  de la derivada absoluta a lo largo de  $\gamma$ :

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}(t)} X_j(\gamma(t)) &= \frac{D}{dt}(X_j|_{\gamma(t)}) \equiv \frac{D}{dt} u_j(t) = \frac{D}{dt}(g_j^i(t) Y_i(t)) \\ &= (g_j^i)'(t) Y_i(t) + (g_j^i)(t) \frac{DY_i}{dt}(t) \\ &= (g_j^i)'(t) Y_i(t), \end{aligned}$$

al notar que  $DY_i/dt(t) = 0$  porque los  $Y_i(t)$  son paralelos a lo largo de  $\gamma$ . La evaluación en  $t = 0$  produce

$$\nabla_{\dot{\gamma}(0)} X_j = (g_j^i)'(0) X_i|_p = a_j^i X_i|_p.$$

Como los  $X_i|_p$  son linealmente independientes, se deduce que  $a_j^i = \omega_j^i(\dot{\gamma}(0))$ ; o bien, en notación matricial,  $A = \omega(\dot{\gamma}(0))$ .  $\square$

De la igualdad (4.49) se obtiene  $\dot{\Gamma}(0) = \dot{u}(0) - \tilde{A}_u$ . El término  $\dot{u}(0)$  depende linealmente de  $\dot{\gamma}(0)$  por la definición de  $u(t)$ , mientras  $\tilde{A}_u$  también depende linealmente de  $\dot{\gamma}(0)$  porque los  $\omega_j^i$  son 1-formas y  $A \mapsto \tilde{A}$  es  $\mathbb{R}$ -lineal. Esto implica que

$$l_u: T_p M \rightarrow T_u P: \dot{\gamma}(0) \mapsto \dot{\Gamma}(0) \quad \text{es } \mathbb{R}\text{-lineal.}$$

Nótese que  $T_u \sigma(\dot{\Gamma}(0)) = \dot{\gamma}(0)$ . Se ha estipulado que  $\dot{\gamma}(0) \neq 0$ , así que  $\dot{\Gamma}(0) \notin \ker T_u \sigma = V_u$ . Sea  $H_u$  la totalidad de posibles  $\dot{\Gamma}(0)$ , junto con  $0 \in T_u P$ ; este es entonces un *subespacio vectorial* de  $T_u P$ . Se acaba de notar que  $T_u \sigma \circ l_u = 1$  sobre  $T_p M$  y por ende  $l_u$  es inyectiva. Se concluye que  $\dim_{\mathbb{R}} H_u = \dim_{\mathbb{R}} l_u(T_p M) = \dim_{\mathbb{R}} T_p M = \dim M$ ; por conteo de dimensiones y la observación de que  $H_u \cap V_u = \{0\}$ , se obtiene la descomposición deseada:

$$\boxed{T_u P = V_u \oplus H_u} \quad \text{para todo } u \in P. \quad (4.50)$$

Si se cambia el marco local  $u \in \mathcal{F}_p M$  por otro marco  $u \triangleleft g \in \mathcal{F}_p M$ , la curva  $\Gamma(t) \triangleleft g$  es la que se obtiene por transporte paralelo a lo largo de  $\gamma$  con el nuevo marco inicial  $\Gamma(0) \triangleleft g = u \triangleleft g$ . Al repetir la construcción anterior con este curva, el subespacio horizontal obtenido es  $H_{u \triangleleft g} = (r_g)_* H_u$ : la familia de los subespacios horizontales  $H_u$  es invariante bajo la acción a derecha de  $G$  sobre  $TP$ .

En resumen: la conexión afín  $\nabla$  determina un **subfibrado horizontal**  $H \xrightarrow{\tau} P$  del fibrado tangente  $TP \xrightarrow{\tau} P$  tal que  $T_u P = V_u \oplus H_u$  para todo  $u \in P = \mathcal{F}M$ .

**Definición 4.42.** Sea  $\nabla$  una conexión afín sobre  $M$  y sea  $P = \mathcal{F}M$  el espacio total del fibrado de marcos sobre  $M$ ; denótese  $G := \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$  y  $\mathfrak{g} := M_n(\mathbb{R})$  su álgebra de Lie.

Si  $u \in P$ ,  $T_1\theta_u: \mathfrak{g} \rightarrow V_u: X \mapsto \tilde{X}_u$  es un isomorfismo lineal. Sea  $\eta_u: T_uP \rightarrow V_u$  la proyección lineal que anula el subespacio horizontal  $H_u$  determinado por  $\nabla$ . La composición

$$\omega_u := (T_1\theta_u)^{-1} \circ \eta_u: T_uP \rightarrow \mathfrak{g} \quad (4.51)$$

es  $\mathbb{R}$ -lineal. Luego,  $u \mapsto \omega_u$  define una 1-forma con valores en  $\mathfrak{g}$ , esto es,  $\omega \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g})$ .  $\diamond$

Resulta que toda la construcción anterior del subfibrado horizontal a partir de una conexión afín admite una generalización directa al reemplazar el fibrado de marcos  $\mathcal{F}M \xrightarrow{\sigma} M$  por un fibrado principal cualquiera. El papel de la conexión afín recae en una conexión de Koszul en un fibrado vectorial asociado. Pero sucede que este último paso no es necesario, *a priori*: se puede definir el subfibrado horizontal directamente en términos de una 1-forma  $\omega \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g})$ , que cumple los dos requisitos de la definición siguiente.

**Definición 4.43.** Sea  $P \xrightarrow{\sigma} M$  un fibrado principal con grupo de estructura  $G$ , cuya álgebra de Lie es  $\mathfrak{g}$ . Una **1-forma de conexión** sobre  $P$ , también conocida como una *conexión de Ehresmann*, es un elemento  $\omega \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g})$  que satisface estas dos condiciones:

- (a)  $\omega_u(\tilde{X}_u) = X$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $u \in P$ ;
- (b)  $r_g^*\omega = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega$  para todo  $g \in G$ .

Para cada  $u \in P$ , se define  $H_u := \ker \omega_u \leq T_uP$ . Así se determina una descomposición (4.50) de cada  $T_uP$ .  $\diamond$

La condición (a) muestra que  $\omega_u$  es inyectiva sobre el subespacio  $V_u$  de  $T_uP$ ; el teorema de rango y nulidad implica que  $T_uP = V_u \oplus H_u$  como suma directa de espacios vectoriales. La condición (b) garantiza que  $H_{u \leftarrow g} = (r_g)_*H_u$ .

Es necesario comprobar que la 1-forma  $\omega$  de (4.51) cumple las condiciones de la Definición 4.43. La proyección  $\eta_u: T_uP \rightarrow V_u$  actúa como la identidad sobre el subespacio  $V_u$ , mientras  $\ker \eta_u = H_u$  por definición. Entonces  $\ker \omega_u = H_u$  y además  $\eta_u(\tilde{X}_u) = \tilde{X}_u = T_1\theta_u(X)$ . Por lo tanto,  $\omega_u(\tilde{X}_u) = X$  si  $X \in \mathfrak{g}$ : esto es la condición (a).

Además, cada vector tangente  $Z_u \in T_uP$  es una suma  $Z_u = \tilde{X}_u + Y_u$ , de modo único, con  $X \in \mathfrak{g}$ ,  $Y_u \in H_u$ . Si  $g \in G$ , se sabe que  $(r_g)_*Y_u \in H_{u \leftarrow g}$ , así que  $\omega_u(Y_u) = 0$  y a la vez  $r_g^*\omega(Y_u) = \omega_{u \leftarrow g}((r_g)_*Y_u) = 0$ . La condición (b) entonces sigue con el uso del Lema 4.37:

$$\begin{aligned} (r_g^*\omega)_u(Z_u) &= \omega_{u \leftarrow g}((r_g)_*Z_u) = \omega_{u \leftarrow g}((r_g)_*\tilde{X}_u) \\ &= \omega_{u \leftarrow g}((\mathrm{Ad}(g^{-1})X)^\sim)_{u \leftarrow g} = \mathrm{Ad}(g^{-1})X \\ &= \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_u(\tilde{X}_u) = \mathrm{Ad}(g^{-1})\omega_u(Z_u). \end{aligned}$$

**Definición 4.44.** Cada 1-forma de conexión  $\omega \in \mathcal{A}^1(P, \mathfrak{g})$  sobre un fibrado principal  $P \xrightarrow{\sigma} M$  determina una **2-forma de curvatura**  $\Omega \in \mathcal{A}^2(P, \mathfrak{g})$ , definido por

$$\boxed{\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega.} \quad (4.52)$$

Esta es la versión global de la segunda ecuación de Cartan en (4.40).  $\diamond$

En el caso particular del fibrado de marcos  $P = \mathcal{F}M$ , con  $\mathfrak{g} = M_n(\mathbb{R})$ , hace falta determinar la relación entre la 1-forma  $\omega \in \mathcal{A}^1(\mathcal{F}M, \mathfrak{g})$  y la matriz  $[\omega_j^i]$  de 1-formas locales en  $\mathcal{A}^1(U, \mathfrak{g})$ . Para eso, basta notar que un marco local  $\{X_1, \dots, X_n\}$  definido en una carta  $(U, \phi)$  de  $M$  no es otra cosa que una sección local  $\chi \in \Gamma(U, \mathcal{F}M)$  del fibrado de marcos. Es cuestión de chequear que  $[\omega_j^i] = \chi^*\omega$ : la matriz de las 1-formas locales  $\omega_j^i$  se obtiene de la 1-forma de conexión por un pullback por  $\chi^*$  a través del marco local dado.

Como  $\chi^*$  conmuta con la derivada exterior  $d$  y con productos exteriores, la definición (4.52) y las ecuaciones de estructura (4.39) muestran que  $[\Omega_j^i] = \chi^*\Omega \in \mathcal{A}^2(U, \mathfrak{g})$ . Esto indica por qué la  $\Omega$  de (4.52) se llama una 2-forma de curvatura.

Por un procedimiento similar, se puede determinar una 1-forma  $\theta \in \mathcal{A}^1(P, \mathbb{R}^n)$  tal que la columna de 1-formas locales  $[\theta^i] \in \mathcal{A}^1(U, \mathbb{R}^n)$  es un pullback a través del marco local:  $[\theta^i] = \chi^*\theta$ . Entonces se define la 2-forma de torsión  $\tau$  por la fórmula

$$\tau := d\theta + \omega \wedge \theta \in \mathcal{A}^2(\mathcal{F}M, \mathbb{R}^n)$$

cuyo pullback  $[\tau^i] = \chi^*\tau \in \mathcal{A}^2(U, \mathbb{R}^n)$  ofrece las 2-formas locales que cumplen la primera ecuación de estructura de Cartan.

Es natural preguntar por qué no se podría hacer un pullback de  $\theta$ ,  $\omega$ ,  $\tau$  y  $\Omega$  para obtener formas globales  $\theta^i \in \mathcal{A}^1(M)$ , etcétera, mediante una sección global  $\chi: M \rightarrow \mathcal{F}M$  del fibrado de marcos? Pues resulta que en muchos casos tales secciones globales no existen. El Ejercicio 4.17 muestra que un fibrado *principal* admite secciones globales *solo si es trivial*, en marcado contraste con los fibrados vectoriales, cuyas secciones globales abundan.

► En el caso de una variedad riemanniana  $(M, g)$ , se puede emplear el fibrado principal  $\mathcal{O}M \xrightarrow{\sigma} M$  de marcos ortonormales y repetir la construcción anterior del subfibrado horizontal con la conexión de Levi-Civita  $\nabla = \nabla^g$ . Cabe preguntar, entonces, cuál sería la relación entre la 2-forma de curvatura  $\Omega \in \mathcal{A}^2(\mathcal{O}M, \mathfrak{so}(n))$  y el tensor de curvatura riemanniana  $R$ ? En el Ejercicio 4.12, se exhibe esta relación en coordenadas locales:

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l.$$

### 4.5. Ejercicios sobre conexiones y curvatura

**Ejercicio 4.1.** Sea  $\nabla$  una conexión afín sobre una variedad diferencial  $M$ . Un campo vectorial  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  es **paralelo a lo largo de una curva**  $\gamma: I \rightarrow M$  si  $\nabla_{\dot{\gamma}(t)} Y = 0 \in T_{\gamma(t)}M$  para todo  $t \in I$ .

Si  $Y|_U = f^j \partial_j$  en las coordenadas locales de una carta  $(U, \phi)$  de  $M$ , demostrar que  $Y$  es paralelo a lo largo de  $\gamma$  si y solo si

$$\frac{d}{dt}(f^k \circ \gamma(t)) + \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \dot{\gamma}^i(t) f^j \circ \gamma(t) = 0 \quad (k = 1, \dots, n)$$

para todo  $t \in I$ . Deducir que existe algún  $\varepsilon > 0$  con  $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq I$  tal que los vectores  $\{Y_q \in T_qM : q \in \gamma((-\varepsilon, \varepsilon))\}$  están determinados por  $Y_p$ ; y que la correspondencia  $Y_p \mapsto Y_q$  determina un isomorfismo lineal  $\Psi_{q,p}: T_pM \rightarrow T_qM$  para tales puntos  $q$ . Concluir que  $\nabla$  determina una regla de transporte paralelo a lo largo de cada curva suave en  $M$ .

**Ejercicio 4.2.** Verificar la regla de cambio de variables (4.7) para los símbolos de Christoffel de una conexión afín:

$$\tilde{\Gamma}_{rs}^t = \frac{\partial x^i}{\partial y^r} \frac{\partial x^j}{\partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^k + \frac{\partial^2 x^l}{\partial y^r \partial y^s} \frac{\partial y^t}{\partial x^l}.$$

**Ejercicio 4.3.** Sea  $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ , la cual es una variedad unidimensional con coordenada local  $r > 0$  y campo vectorial básico  $\frac{d}{dr} \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^+)$ . Sea  $Z := r \frac{d}{dr}$  el campo de Euler en  $\mathbb{R}^+$ . Demostrar que  $Z$  es paralelo a lo largo de  $\mathbb{R}^+$  con respecto a la conexión afín  $\nabla$  sobre  $\mathbb{R}^+$  dada por

$$\nabla_{d/dr} \left( \frac{d}{dr} \right) = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr}.$$

Demostrar que la (única) *geodésica*  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  determinada por las condiciones iniciales  $\gamma(0) = 1, \dot{\gamma}(0) = a \frac{d}{dr}|_1$  está dada por la función exponencial  $\gamma(t) \equiv e^{at}$ .

**Ejercicio 4.4.** Sea  $S \subset \mathbb{R}^3$  una *superficie regular*, esto es,  $\{p \in \mathbb{R}^3 : f(p) = a\}$  donde  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  es suave y  $a$  es un valor regular de  $f$  (Corolario 1.46). El gradiente  $\vec{\nabla} f$  es un “campo normal” (que no se anula) sobre  $S$ . Se identifica  $T_p\mathbb{R}^3$  con  $\mathbb{R}^3$  y el *plano tangente* a la superficie  $T_pS$  con el subespacio vectorial  $\{v \in \mathbb{R}^3 : \vec{\nabla} f(p) \cdot v = 0\}$ . Sea  $\pi_p: T_p\mathbb{R}^3 \rightarrow T_pS$  la proyección ortogonal; y sea  $D$  la derivada direccional en  $\mathbb{R}^3$  dada por (4.1). Si  $X, Y \in \mathfrak{X}(S)$ , defínase  $\underline{\nabla_X Y} := \pi(D_X Y)$ . Demostrar que esta  $\nabla$  es una conexión afín sobre  $S$ .

**Ejercicio 4.5.** Demostrar que las *geodésicas* que pasan por el punto  $(1, 0, 0)$  del cilindro  $x^2 + y^2 = 1$  en  $\mathbb{R}^3$  son: (a) la *recta*  $x = 1, y = 0$ ; (b) el *círculo*  $x^2 + y^2 = 1, z = 0$ ; y (c) las *hélices*  $t \mapsto (\cos t, \sin t, ct)$ , con  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  $\llbracket$  Indicación: coordenadas cilíndricas.  $\rrbracket$

**Ejercicio 4.6.** Completar la demostración de la Proposición 4.14, como sigue.

Sea  $A(X, Y, Z)$

$$:= Xg(Y, Z) + Yg(Z, X) - Zg(X, Y) - g([Y, Z], X) - g([X, Z], Y) + g([X, Y], Z).$$

- (a) Verificar que  $A(X, Y, Z)$  es  $C^\infty(M)$ -lineal en  $X$  y en  $Z$ . Esto muestra que el campo vectorial  $B(X, Y) \in \mathfrak{X}(M)$  dado por  $g(B(X, Y), Z) := \frac{1}{2}A(X, Y, Z)$  es tensorial en  $X$  y  $\mathbb{R}$ -lineal en  $Y$ .
- (b) Chequear que  $B(X, hY) = (Xh)Y + hB(X, Y)$  para todo  $h \in C^\infty(M)$ .
- (c) Verificar que la conexión  $\nabla^g$  dada por  $\nabla_X^g Y := B(X, Y)$  es libre de torsión.
- (d) Verificar que esta conexión  $\nabla^g$  es compatible con la métrica  $g$ .

**Ejercicio 4.7.** Si  $\nabla^g$  es la conexión de Levi-Civita sobre la esfera  $\mathbb{S}^2$  con la métrica

$$g := d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad \text{así que } g_{\theta\theta} = 1, \quad g_{\theta\phi} = g_{\phi\theta} = 0, \quad g_{\phi\phi} = \sin^2 \theta,$$

hallar los 8 coeficientes de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k(\theta, \phi)$  en  $U \cap V = \mathbb{S}^2 \setminus \{\pm e_3\}$  en términos de las coordenadas esféricas.

**Ejercicio 4.8.** Si  $(M, g)$  es una variedad riemanniana orientada, su **forma de volumen riemanniana** se define localmente por

$$v_g := \rho dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n, \quad \text{con } \rho := \sqrt{\det[g_{ij}]}.$$

Si  $\Gamma_{ij}^k$  son los símbolos de Christoffel de la conexión de Levi-Civita  $\nabla^g$ , comprobar esta fórmula local para su *traza parcial*  $\Gamma_{jk}^j$ :

$$\Gamma_{jk}^j = \frac{1}{2} g^{jl} \partial_k g_{jl} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x^k} = \partial_k(\log \rho).$$

**Ejercicio 4.9.** Considérese el **semiplano superior**  $\mathbb{H}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$  con la métrica riemanniana  $g = y^{-2}(dx^2 + dy^2) \equiv y^{-2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ . Calcular sus coeficientes de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  y el componente  $R_{1212}$  del tensor de curvatura riemanniana. Demostrar que su curvatura escalar es constante:  $S \equiv -2$ .

**Ejercicio 4.10.** Sea  $M$  una subvariedad de  $\mathbb{R}^m$  mediante un encaje  $j: M \hookrightarrow \mathbb{R}^m$ . Se puede identificar  $T_p \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{R}^m$  por  $A_p = a^i(p) \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p \leftrightarrow \mathbf{a}_p = (a^1(p), \dots, a^m(p)) \in \mathbb{R}^m$ . La **métrica euclidiana** en  $\mathbb{R}^m$  es  $\tilde{g}(A, B) := \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ .

La **métrica inducida**  $g$  sobre  $M$  se define como el pullback  $g := j^*(\tilde{g})$ ; en otras palabras,  $g(X, Y)(p) := \mathbf{x}_p \cdot \mathbf{y}_p$  para todo  $p \in M$ .

- (a) Si  $\vec{F} \equiv \phi^{-1}: \phi(U) \rightarrow U \subset \mathbb{R}^m$  parametriza el dominio de una carta local  $(U, \phi)$  de  $M$ , verificar que  $g_{ij} = \partial_i \vec{F} \cdot \partial_j \vec{F}$  son los componentes de la métrica inducida.
- (b) En particular, usando las coordenadas esféricas

$$\vec{F}(\theta, \phi) := (a \sen \theta \cos \phi, a \sen \theta \sen \phi, a \cos \theta)$$

de la esfera  $M = a \mathbb{S}^2$  de radio  $a$  en  $\mathbb{R}^3$ , calcular los  $g_{ij}$  como funciones de  $(\theta, \phi)$ .

- (c) Calcular los coeficientes de Christoffel para  $a \mathbb{S}^2$  en coordenadas esféricas.

**Ejercicio 4.11.** Considérese la esfera  $\mathbb{S}^3$  como la subvariedad de  $\mathbb{R}^4$  dado por  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$ , donde  $\mathbf{x} = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^4$  denotan las coordenadas cartesianas.

- (a) Bajo la métrica inducida del Ejercicio 4.10, mostrar que las tres<sup>14</sup> campos vectoriales:

$$E_1 := -x^1 \partial_0 + x^0 \partial_1 + x^3 \partial_2 - x^2 \partial_3$$

$$E_2 := -x^2 \partial_0 - x^3 \partial_1 + x^0 \partial_2 + x^1 \partial_3$$

$$E_3 := -x^3 \partial_0 + x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2 + x^0 \partial_3$$

son *ortonormales* en  $\mathfrak{X}(\mathbb{S}^3)$ , esto es,  $g(E_a, E_a) = 1$ ; y  $g(E_a, E_b) = 0$  para  $a \neq b$ .

- (b) En vista de que  $\nabla_{\partial_i} \partial_j = 0$  en  $\mathbb{R}^4$ , se obtiene  $\nabla_{f^i \partial_i} (h^j \partial_j) = f^i \partial_i (h^j) \partial_j$ . Demostrar que  $\nabla_{E_a} E_a = 0$  para  $a = 1, 2, 3$ ; y que

$$\nabla_{E_1} E_2 = E_3 = -\nabla_{E_2} E_1, \quad \nabla_{E_2} E_3 = E_1 = -\nabla_{E_3} E_2, \quad \nabla_{E_3} E_1 = E_2 = -\nabla_{E_1} E_3.$$

- (c) Concluir que la conexión de Levi-Civita para  $\mathbb{S}^3$  obedece

$$\nabla_{E_a} E_b = \varepsilon_{ab}^c E_c,$$

donde  $\varepsilon_{12}^3 = \varepsilon_{23}^1 = \varepsilon_{31}^2 = +1$ ;  $\varepsilon_{13}^2 = \varepsilon_{21}^3 = \varepsilon_{32}^1 = -1$ ; y los otros  $\varepsilon_{ab}^c = 0$ .

- (d) Comprobar que  $[E_a, E_b] = 2 \varepsilon_{ab}^c E_c$  para  $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$ .

- (e) Obtener una expresión para  $g(R(E_a, E_b) E_c, E_d)$  donde  $a, b, c, d \in \{1, 2, 3\}$ .

<sup>14</sup>El **campo de Euler**  $E_0 := x^0 \partial_0 + x^1 \partial_1 + x^2 \partial_2 + x^3 \partial_3$  en  $\mathfrak{X}(\mathbb{R}^4)$  es ortogonal a estos tres:  $\tilde{g}(E_0, E_a) = 0$  para  $a = 1, 2, 3$ . Este es el *campo normal* a  $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$ , en la terminología del Ejercicio 4.4.

**Ejercicio 4.12.** Dado un marco local  $\{X_1, \dots, X_n\}$  de  $\mathfrak{X}(U)$ , sean  $\theta^1, \dots, \theta^n$  las 1-formas locales duales, definidos por (4.37a). Si  $\nabla = \nabla^g$  es la conexión de Levi-Civita para una métrica  $g$  sobre  $M$ , comprobar que las 2-formas locales de curvatura  $\Omega_j^i$  están dadas por:

$$\Omega_j^i = \frac{1}{2} R_{jkl}^i \theta^k \wedge \theta^l.$$

**Ejercicio 4.13.** Sea  $\omega = [\omega_j^i] \in \mathcal{A}^1(U; M_n(\mathbb{R}))$  la matriz de 1-formas locales asociada a una conexión afín. Si  $\Omega = [\Omega_j^i] \in \mathcal{A}^2(U; M_n(\mathbb{R}))$  es la matriz de 2-formas locales de curvatura, demostrar la **segunda identidad de Bianchi**:

$$d\Omega = \Omega \wedge \omega - \omega \wedge \Omega.$$

**Ejercicio 4.14.** Si  $\{X'_1, \dots, X'_n\}$  es un segundo marco local de  $\mathfrak{X}(U)$ , relacionado con el marco local  $\{X_1, \dots, X_n\}$  del Ejercicio 4.12 por una *matriz de cambio de base*  $g = [g_j^i]$ :

$$X'_j := g_j^i X_i,$$

sean  $\theta' = [\theta'^i]$ ,  $\omega' = [\omega_j'^i]$ ,  $\Omega' = [\Omega_j'^i]$  las colecciones de formas locales correspondientes.

(a) Demostrar que  $\theta'$  y  $\omega'$  están relacionadas con  $\theta$  y  $\omega$  a través de estas *fórmulas de cambio de base*:

$$\theta' = g^{-1}\theta, \quad \omega' = g^{-1}\omega g + g^{-1} dg.$$

(b) Demostrar que  $\Omega'$  y  $\Omega$  están relacionadas por una conjugación matricial:

$$\Omega' = g^{-1} \Omega g.$$

**Ejercicio 4.15.** Considérese el **semiplano superior**  $\mathbb{H}^2$  del Ejercicio 4.9, con la métrica riemanniana  $g = y^{-2}(dx^2 + dy^2)$ . Mostrar que el marco (global!)  $\{X_1, X_2\}$  dado por  $X_1 := y \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $X_2 := y \frac{\partial}{\partial y}$  es ortonormal y que  $\theta^1 = y^{-1} dx$ ,  $\theta^2 = y^{-1} dy$ .

Usar las ecuaciones de estructura de Cartan para hallar las matrices de 1-formas  $\omega = [\omega_j^i]$  y  $\Omega = [\Omega_j^i]$ . Calcular su **curvatura gaussiana**  $K := \Omega_2^1(X_1, X_2)$ .

**Ejercicio 4.16.** El círculo  $\mathbb{T}$  actúa sobre  $\mathbb{S}^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 : |z|^2 + |w|^2 = 1\}$  por  $(z, w) \leftarrow e^{i\theta} := (e^{i\theta}z, e^{i\theta}w)$ . Comprobar que se puede identificar el espacio cociente  $\mathbb{S}^3/\mathbb{T}$  con la esfera  $\mathbb{S}^2$ . Demostrar que así se obtiene un *fibrado principal*  $\mathbb{S}^3 \xrightarrow{\sigma} \mathbb{S}^2$  con grupo de estructura  $\mathbb{T}$ . [ Este es el **fibrado de Hopf**. ]

**Ejercicio 4.17.** Dos fibrados principales  $Q \xrightarrow{\rho} M$  y  $P \xrightarrow{\sigma} M$  con la misma base  $M$  y el mismo grupo de estructura  $G$  son *isomorfos* si hay un difeomorfismo  $f: Q \rightarrow P$  tal que  $\sigma \circ f = \rho$  y además  $f(v \triangleleft g) = f(v) \triangleleft g$  para todo  $v \in Q, g \in G$ .

Si  $s: M \rightarrow P$  es una *sección global*, esto es, una función suave tal que  $\sigma \circ s = 1_M$ , demostrar que el fibrado principal  $P \xrightarrow{\sigma} M$  es *trivial*, es decir, isomorfo al fibrado principal trivial  $M \times G \xrightarrow{\text{pr}_1} M$  con la acción  $(p, g) \triangleleft h := (p, gh)$ .