Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2012 **19**(1) : 1–6
cimpa – ucr issn: 1409-2433

OBJETOS K-FINITOS DECIDIBLES Y CARDINALES FINITOS EN UN TOPOS ARBITRARIO

K-FINITE DECIDABLE OBJECTS AND FINITE CARDINALS IN AN ARBITRARY TOPOS

Osvaldo Acuña Ortega*

Received: 8-Feb-2011; Revised: 7-Nov-2011; Accepted: 30-Nov-2011

Resumen

Probamos en un topo arbitrario que la clase de los objetos K-finitos decidibles es igual a la clase de los cardinales finitos de E si y solo si todo X K-finito decidible tal que $X \to 1$ un epimorfismo si y solo si $X \to 1$ es tal que tiene una sección $1 \to X$.

Palabras clave: Teoría de topos, objetos K-finitos, objetos decidibles.

Abstract

In an elemetary topos ε, we prove that the class of K-finite decidable objects is the same to the class of finite cardinals in E if and only if every K-finite decidable object X such that $X \to 1$ is epic, then $1 \to X$ is split epic.

Keywords: Topoi, K-finite objects, decidable objects.

Mathematics Subject Classification: 03G30, 18B25.

*Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica.

1 Introducción

Sea ε un topos elemental. Dado X un objeto de ε, recuérdese que el objeto $K(X)$ de los subobjetos K-finitos de X se define como el subobjeto más pequeño de Ω^X que es cerrado bajo uniones binarias y que contiene a $\ulcorner\phi\urcorner : 1 \to \Omega^X$ y $\{\cdot\}_X : X \to \Omega^X$; y decimos que X es K-finito si $\ulcorner X\urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factoriza a través de $K(X) \to \Omega^X$. $K^+(X)$ es el subobjeto de Ω^X más pequeño, cerrado bajo uniones binarias y que contiene a $\{\cdot\}_X : X \to \Omega^X$. Recuérdese que:

$$K^+(X) \subseteq K(X) \overset{\ulcorner\phi\urcorner}{\leftarrow} 1,$$

es un diagrama coproducto ([4], pag. 206, lema 1.5).

Definición 1 *Dado un objeto X en ε, $f : K^+(X) \to X$ es una función de elección si $\forall X' \in K^+(X), f(X') \in X'$.*

Los cardinales finitos en ε son exactamente los objetos de ε que son decidibles (es decir los X tales que $\Delta : X \to X \times X$ es complementada en $X \times X$), K-finitos con funciones de elección externas $f : K^+(X) \to X$. Ver [3] (p. 79, teorema 5).

Definición 2 *Sea X decidible, si $X', X'' \subseteq X$ y $f : K^+(X') \to X'$, $g : K^+(X'') \to X''$ son funciones de elección, defínase*

$$C(f,g) : K^+(X' \cup X'') \to X' \cup X''$$

como sigue

$$C(f,g)(y') = \begin{cases} g(y' \cap X'') & si\ \ y' \cap X' = \ulcorner\phi\urcorner \\ f(y' \cap X') & si\ \ y' \cap X' \in K^+(X'). \end{cases}$$

Nota. $C(f,g)$ es una función de elección. Se debe probar que $C(f,g)$ es una función. Como X es decidible se tiene que $K(X) \subseteq 2^X$ y $K(X)$ es un ideal del álgebra booleana 2^X (ver lema 6.1 de [4]); por lo tanto $X' \cap y' \in K(X')$ y $X'' \cap y' \in K(X'')$ si $y' \in K(X' \cup X'')$. Por otro lado por el lema 1.4 de [4] se tiene que

$$\forall z \in K(X)(z \in K^+(X) \vee z = \ulcorner\phi\urcorner).$$

Entonces $K^+(X' \cup X'')$ es la unión disjunta de

$$A = \left\{y' \in K^+(X' \cup X'')/y' \cap X' = \ulcorner\phi\urcorner\right\}$$

y

$$B = \left\{y' \in K^+(X' \cup X'')/y' \cap X' \in K^+(X')\right\}.$$

Por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} y' \in A &\Rightarrow y' \cap X' = \ulcorner \phi \urcorner \\ &\Rightarrow y' \cap X'' \neq \ulcorner \phi \urcorner \\ &\Rightarrow y' \cap X'' \in K^+(X''). \end{aligned}$$

Luego, $C(f,g)$ es una función ya que

$$\begin{aligned} (C(f,g)|_A)(y') &= g(y' \cap X'') \text{ y} \\ (C(f,g)|_B)(y') &= f(y' \cap X'). \end{aligned}$$

Por otro lado se tiene que

$$\begin{aligned} y' \in K^+(X' \cup X'') &\Rightarrow y' \cap X'' \in K^+(X'') \vee y' \cap X' \in K^+(X') \\ &\Rightarrow C(f,g)(y') = g(y' \cap X'') \vee C(f,g)(y') \\ &\qquad\qquad\qquad\; = f(y' \cap X') \\ &\Rightarrow C(f,g)(y') \in y' \cap X'' \vee C(f,g)(y') \in y' \cap X' \\ &\Rightarrow C(f,g)(y') \in y', \end{aligned}$$

por lo tanto $Cf,g)$ es una función de elección.

2 Desarrollo

Definición 3 *Sea X un objeto de ε. Se denota $S(X)$ el subobjeto de Ω^X dado por*

$$\{x' \in \Omega^X / \exists f \in \Omega^{\Omega^X \times X}(f : K^+(X') \to X') \textit{ es una función de elección.}\}.$$

Proposición 1 *Sea ε un topos, $X \in |\varepsilon|$. Si X es decidible entonces $K(X) \subseteq S(X)$.*

Prueba. Es suficiente probar que $\{\cdot\}_X : X \to \Omega^X$ y $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factorizan a través de $S(X)$ y que $S(X)$ es cerrado bajo uniones binarias.

(a) $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factoriza a través de $S(X)$ ya que $K^+(\phi) = \phi$ y $[\![X' \subseteq \phi \wedge X' \in K^+(\phi)]\!] = \phi$.

Por lo tanto la fórmula $X' \subseteq \phi \wedge X' \in K^+(\phi) \Rightarrow id_\phi(\phi) \in X'$ es válida, donde $id_\phi : K^+(\phi) = \phi \to \phi$ es la función de identidad. Por lo tanto $id_\phi : \phi \to \phi$ es una función de elección y $\ulcorner \phi \urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factoriza a través de $S(X)$.

(b) $\{\cdot\}_X : X \to \Omega^X$ se factoriza a través de $S(X)$ ya que si $h : K^+(\{x\}) \to \{x\}$ es dado por $h(y) = x$ para cada $y \in K^+(\{x\})$, entonces h es una función de elección ya que

$$\begin{aligned} y' \in K^+(\{x\}) &\Rightarrow \exists z \in X, z \in y \wedge y \subseteq \{x\} \\ &\Rightarrow \exists z \in X, z \in y \wedge z = x \\ &\Rightarrow x \in y \\ &\Rightarrow h(y) \in y. \end{aligned}$$

(c) $S(X)$ es cerrado bajo uniones binarias:
si $x', x'' \in S(X)$ entonces $\exists f, g \in \Omega^{\Omega^X \times X}$ tales que $f : K^+(x') \to x' \wedge g : K^+(x'') \to x''$ función de elección, entonces $C(f,g) : K^+(x' \cup x'') \to x' \cup x''$ es una función de elección, luego $x' \cup x'' \in S(X)$.

Por lo tanto de (a), (b) y (c) tenemos que $K(X) \subseteq S(X)$. ■

Si $X \in |\varepsilon|$ se denota $C_f(X)$ el subobjeto de $X^{K^+(X)}$ dado por

$$\{h : K^+(X) \to X / h \text{ es una función de elección}\}.$$

Corolario 2 *Sea $X \in \varepsilon$ decidible y K-finito. Entonces $C_f(X) \to 1$ es un epimorfismo.*

Prueba. Por la proposición 1 sabemos que $K(X) \subseteq S(X)$. Como X es K-finito se tiene que $\ulcorner X \urcorner : 1 \to \Omega^X$ se factoriza a través de $K(X)$ y entonces se factoriza a través de $S(X)$, por lo tanto la fórmula $\exists n \in X^{K^+(X)} n \in C_f(X)$ es válida y entonces $C_f(X) \to 1$ es un epimorfismo. ■

Corolario 3 (Benabou) *Todo objeto K-finito en un topos booleano es un objeto de elección interno.*

Prueba. Sea X K-finito en un topos booleano ε. Por el lema 1.4 de [4] tenemos que $K(X) = 2^X$, entonces

$$K^+(X) = \{X' \in 2^X / \exists x \in X x \in X'\}$$

y por el corolario 2, X tiene una función interna de elección

$$f : \{X' \in 2^X / \exists x \in X, x \in X'\} \to X. \quad ■$$

Denótese ε_{dKd} la subcategoría llena de todos los objetos K-finitos decidibles de ε. Por el teorema principal de [4], sabemos que ε_{dKf} es un topos.

Lema 4 *Sean A, B, C objetos K-finitos decidibles en un topos ε y $C \rightarrowtail A$ un morfismo mónico. Si $f : A \to B$ es cualquier función, entonces $\forall f(C)$ es K-finito decidible. Más aun $\forall f(C)$ construido en ε_{dKf} o ε produce el mismo objeto.*

Prueba. Sabemos que

$$\forall f(C) = \{b \in B / f^{-1}(b) \cap \ulcorner C \urcorner = \ulcorner C \urcorner\}.$$

Entonces el siguiente diagrama es un producto fibrado:

$$\begin{tikzcd}
 & \Omega^A \times \Omega^A \arrow[r, "\cap"] & \Omega^A \\
B \arrow[ur] \arrow[r, "\langle f^{-1} \circ \{\ \}, \ulcorner A \urcorner \rangle"'] & 2^A \times 2^A \arrow[r] \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] & 2^A \arrow[u, phantom, sloped, "\subseteq"] \\
\forall_f(C) \arrow[u] \arrow[rr] \arrow[urr, phantom, "\text{producto filtrado}"] & & 1 \arrow[u, "\ulcorner A \urcorner"']
\end{tikzcd}$$

por lo tanto $\forall_f(C) \in |(\varepsilon_{dKf})|$.

Proposición 5 *Si X es K-finito decidible en un topos ε, entonces $C_f(X)$ es K-finito decidible. Más aún $C_f(X)$ computado en ε o en ε_{dkf} produce el mismo objeto.*

Prueba. Por el lema 1.4 de [4] se tiene que $K(X) = 2^X$ y entonces

$$\begin{tikzcd}
X^{K^+(X)} \times K^+(X) \arrow[r, "\ll\{\cdot\}\cdot ev\,,\, pr_2 > \cdot \cap, \{\cdot\} \cdot ev >"] & 2^X \times 2^X \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & \Omega^X \times \Omega^X \\
[\![g(X') \in X']\!] \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "\text{producto fibrado}"] & 2^X \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[ur, phantom, "\text{producto fibrado}"] & \Omega^X \arrow[u, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

donde g es una variable de tipo $X^{k^+(X)}$ y X' es una variable de tipo $K^+(X)$. Por lo tanto $[\![\, g(X') \in X' \,]\!]$ computado en ε_{dKf} o en ε da el mismo objeto y por el lema 4, se tiene que

$$C_f(X) = \forall pr_2([\![\, g(X') \in X' \,]\!]) \text{ es K-finito decidible.}$$

Teorema 6 *Sea ε un topos elemental, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\varepsilon_{dKf} = \varepsilon_{fc}$.

(ii) *Todo epimorfismo en* ε_{dKf} *tiene una sección (* ε_{dKf} *satisface el axioma de elección).*

(iii) *Si* X *es K-finito decidible y* $X \to 1$ *es un epimorfismo entonces* $X \to 1$ *tiene una sección.*

Prueba. $(i) \Rightarrow (ii)$ ε_{dKf} satisface el axioma de elección (teorema 14 de [2]).
$(ii) \Rightarrow (iii)$ trivial.
$(iii) \Rightarrow (i)$ Sea X K-finito decidible. Por el corolario 3 sabemos que $C_f(X) \to X$ es un epimorfismo y entonces existe una función de elección externa $f : K^+(X) \to X$. Entonces X es un cardinal finito por el teorema 5 de [3] y consecuentemente $\varepsilon_{dKf} = \varepsilon_{fc}$. ■

Referencias

[1] Acuña-Ortega, O. (1986) "An exact coexact characterization of the finite cardinals", *Journal of Pure and Applied Algebra* **43**(3): 211–233.

[2] Acuña-Ortega, O. (1977) *Finiteness in Topoi*, Ph. D. Dissertation, Wesleyan University, Middletown, CT.

[3] Acuña-Ortega, O. (1986) "Sobre una definición de cardinales funitos en un topos arbitrario", *Revista Colombiana de Matemáticas* **20**(3–4):

[4] Acuña-Ortega, O.; Linton, F.E.J. (1979) "Finiteness and decidability I", in: *Applications of Sheaves*, Lecture Notes in Mathematics 753, Springer–Verlag, New York: 80–100.

[5] Benabou, J. (s.f.) "Definability, finiteness, projectivity and choice", (preliminary version), to appear.