MA–704: TOPOLOGÍA

Joseph C. Várilly

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

I Ciclo Lectivo del 2011

Introducción

La topología es el contexto general de la noción de continuidad. Hoy en día se distingue la llamada "topología general" que trata de las propiedades básicas ligadas a la continuidad, de la "topología algebraica" que clasifica los espacios mediante el cálculo de ciertos invariantes. Este curso abordará introducciones a estos dos temas.

Durante la primera mitad del siglo XX, se logró abstraer la estructura topológica conocida del espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$ en un ámbito mucho más amplio, que dio origen a la topología "general". En paralelo, ciertos espacios formados a partir de pedazos euclidianos fueron clasificados mediante dos procedimientos: la triangulación, que da lugar a grupos de homología; y la deformación, que produce grupos de homotopía. Este curso pretende examinar estos conceptos y calcular los ejemplos más sencillos en cada caso.

El concepto de espacio topológico (sin ese nombre, desde luego) se remonta al ensayo de Riemann sobre los fundamentos de la geometría.[1] Riemann trató de llegar a la estructura geométrica intrínseca que caracteriza un tal "espacio", que no dependiera de algún encaje en $\mathbb{R}^n$, para luego explotar sus aplicaciones al análisis.[2]

Posteriormente, el trabajo de Cantor sobre las partes de la recta real $\mathbb{R}$, relevantes al estudio de la convergencia de las series de Fourier, introdujo diversos conceptos como conjuntos cerrados y abiertos, puntos de acumulación, etc., cuyo estudio culminó en el concepto general de *conjunto*.[3] El estudio de funcionales en el cálculo variacional llevó a Volterra a considerar espacios vectoriales cuyos miembros son funciones.[4]

---

[1] G. F. Bernhard Riemann, *Über de Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Habilitationsschrift, 1854), en *Gesammelte Mathematische Werke*, Teubner, Leipzig, 1892; pp. 272–287.

[2] Hay un buen resumen de los antecedentes históricos de la topología general en el libro: Nicolas Bourbaki, *Elementos de Historia de las Matemáticas*, Alianza, Madrid, 1972. Para el desarrollo de la topología algebraica a partir de Poincaré, véase: Jean Alexandre Dieudonné, *A History of Algebraic and Differential Topology 1900–1960*, Birkhäuser, Boston, 1989.

[3] Georg Cantor, *Über eine Eigenschaft des Ingebriffes aller reelen algebraischen Zahlen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **77** (1874), 258–262.

[4] Vito Volterra, *Leçons sur les fonctions de lignes*, Gauthier-Villars, Paris, 1913.

En otra línea, Poincaré trató de clasificar las superficies y cuerpos multidimensionales mediante triangulaciones.[5] De este modo, pudo determinar sus “números de Betti” (que son ciertos números enteros asociados con una triangulación), dando lugar al concepto de *homología*.

La “topología general” en sí comienza con la introducción de los *espacios métricos* por Fréchet.[6] Una formulación aun más general y abstracto fue alcanzado por Hausdorff quien introdujo los sistemas de *vecindarios* de un punto, lo cual es equivalente a declarar las *partes abiertas* de un espacio topológico.[7] La teoría de dichos espacios fue elaborado por la escuela polaca de Kuratowski[8] y por la escuela rusa de Alexandrov que alcanzó el concepto correcto de espacio *compacto*.[9]

Brouwer introdujo el concepto de *homotopía* de dos aplicaciones continuas.[10] Al considerar las aplicaciones continuas entre esferas, Hopf mostró que la homotopía clasifica los espacios topológicos de manera distinta (y más fina) que la homología.[11] El *tipo de homotopía* de un espacio topológico, a menudo determinable por métodos algebraicos, sirve de “proxy” para su clase hasta homeomorfismo.

El desarrollo de este curso no puede seguir el orden histórico, porque buena parte de los avances en topología durante la primera mitad del siglo XX consistió en simplificar los métodos originales y en elaborar demostraciones más cortos y elegantes. Entonces, partiendo de la definición de espacio topológico dado por Hausdorff en la segunda edición de su libro (1927), se desarrollará los conceptos principales de la “topología general” en un orden lógico. Luego habrá una introducción a las dos ramas principales de la “topología algebraica”: primero la homotopía y luego la homología. En los dos casos se asocia a un espacio topológico un juego de grupos (en su mayoría abelianos), cuyo cálculo revela mucha información sobre el espacio de marras.

[5] Henri Poincaré, *Analysis Situs*, J. École Polytechnique **1** (1895), 1–123; *Complément à l'Analysis Situs*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **13** (1899), 285–343.

[6] Maurice Fréchet, *Sur quelques points du calcul fonctionnel*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **22** (1906), 1–74.

[7] Felix Hausdorff, *Grundzüge der Mengenlehre*, Veit, Leipzig, 1914.

[8] Kazimierz Kuratowski, *Sur l'opération $\overline{A}$ de l'Analysis Situs*, Fund. Math. **3** (1922), 182–199; *Topologie I*, Warszawa, 1933.

[9] Pavel Sergeyevich Aleksandrov y Pavel Samuilovich Urysohn, *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Verhandelingen der Akademie van Wetenschappen te Amsterdam **14** (1929), 1–96.

[10] Luitzen Egbertus Jan Brouwer, *Beweis der Invarianz des n-dimensionalen Gebiets*, Mathematische Annalen **71** (1911), 305–313.

[11] Heinz Hopf, *Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche*, Mathematische Annalen **104** (1931), 637–665.

Temario

⋆ Espacios Topológicos y Funciones Continuas.

Preámbulo sobre conjuntos y funciones. Abiertos y cerrados, sistemas de vecindarios. Funciones continuas, topologías débiles. Subespacios, productos y cocientes de espacios topológicos. Sucesiones, redes y convergencia.

⋆ Conexidad, Compacidad y Separación.

Espacios conexos, componentes. Espacios compactos y localmente compactos. Propiedad de Hausdorff, axiomas de separación. Espacios normales, el lema de Urysohn. Espacios paracompactos, particiones de la unidad. El teorema de Tijonov. Espacios métricos completos. El Teorema de Baire.

⋆ Introducción a la Homotopía.

Una excursión sobre categorías y funtores. Homotopía de caminos, retracciones. El grupo fundamental de un espacio puntuado. Espacios cubridores. El teorema de Seifert y van Kampen.

⋆ Introducción a la Homología.

Complejos simpliciales y celulares. Homología simplicial y singular. Sucesiones exactas de homología. El teorema de Mayer y Vietoris.

Bibliografía

El curso seguirá, en buena medida, el texto de Munkres y el libro de Singer y Thorpe, mencionados a continuación. He aquí una lista de libros de mucha utilidad para los temas del curso.

1. R. Ayala Gómez, E. Domínguez Murillo y A. Quintero Toscano, *Elementos de la Topología General*, Addison-Wesley Iberoamericana, Wilmington, DE, 1997.

2. N. Bourbaki, *Topologie Générale I*, Hermann, Paris, 1962.

3. J. A. Dieudonné, *Eléments d'Analyse, II et IX*, Gauthier-Villars, Paris, 1969 y 1982.

4. J. Dugundji, *Topology*, Allyn & Bacon, Boston, 1966.

5. R. Engelking, *Topologia Ogólna*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Varsovia, 2007.

6. W. Fulton, *Algebraic Topology: A First Course*, Graduate Texts in Mathematics **153**, Springer, Berlin, 1995.

7. A. Hatcher, *Algebraic Topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
8. J. G. Hocking and G. S. Young, *Topology*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1961.
9. J. L. Kelley, *General Topology*, D. Van Nostrand, Princeton, NJ, 1955.
10. W. S. Massey, *Algebraic Topology: An Introduction*, Graduate Texts in Mathematics **56**, Springer, New York, 1967.
11. J. R. Munkres, *Topology*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2000.
12. G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill/Kogakusha, Tokyo, 1963.
13. I. M. Singer and J. A. Thorpe, *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer, New York, 1967.
14. V. A. Vassiliev, *Introduction to Topology*, Student Mathematical Library **14**, AMS, Providence, RI, 2001.
15. S. Willard, *General Topology*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1970.

1 Espacios Topológicos y Funciones Continuas

1.1 Preámbulo sobre conjuntos y funciones

Antes de abordar la topología propiamente, conviene revisar algunos conceptos básicos sobre conjuntos. Por lo general, las letras mayúsculas A, B, C, etc. denotarán conjuntos, cuyos elementos se escribirán a menudo con letras minúsculas: x, y, z, etc. Si x es un elemento del conjunto A, escrito $x \in A$ o bien $A \ni x$, dícese que x *pertenece* a A o que A *contiene* x. En cambio, si cada elemento de A es también un elemento de B, escrito $A \subseteq B$ o bien $B \supseteq A$, se dice que A *es una parte de* B o que B *incluye* A.

Las notaciones $A \cap B$ para intersección; y $A \cup B$ para unión, son conocidas. En el caso particular de que $A \cap B = \emptyset$ (intersección nula), se puede denotar la **unión disjunta** de A y B por $A \uplus B$. [Hay una notación alternativa $A \sqcup B$ para esa unión disjunta, en algunos libros.] La notación para la diferencia es $A \setminus B := \{ x \in A : x \notin B \}$.

El **producto cartesiano** $A \times B := \{ (x,y) : x \in A,\ y \in B \}$ es la totalidad de “pares ordenados” con el primer elemento en A y el segundo elemento en B. Se puede tomar (x,y) como concepto primitivo, o bien definirlo mediante la formación de conjuntos por agregación:[1]

$$(x,y) := \big\{ \{x\}, \{x,y\} \big\}.$$

En consecuencia, $(p,q) = (r,s)$ si y sólo si $p = r$ y $q = s$.

Los *números naturales* $0, 1, 2, 3, \dots$ pueden definirse como conjuntos. Se toma $0 := \emptyset$, el (único) conjunto con cero elementos; luego $1 := \{0\}$, un conjunto con un solo elemento. En seguida $2 := \{0, 1\}$, un conjunto con dos elementos; y así sucesivamente. En adelante, se usará la notación $\mathbf{2}$ como nombre cómodo para el conjunto $\{0, 1\}$.

► Una **relación** R entre dos conjuntos A y B es simplemente una parte del producto cartesiano: $R \subseteq A \times B$. Si $A = B$, se hable de una “relación sobre A”. Es común usar un simbolismo como $x \diamond y$ como abreviatura para “$(x,y) \in R$”. Por ejemplo, una **relación de equivalencia** sobre A, escrito con el simbolismo $x \sim y$, debe ser reflexiva, simétrica y transitiva:

$$x \sim x; \qquad x \sim y \implies y \sim x; \qquad x \sim y,\ y \sim z \implies x \sim z.$$

En este caso, las **clases de equivalencia** $[x] := \{ y \in A : x \sim y \}$ forman una *partición* de A, es decir, una colección de partes disjuntas cuya unión es todo A, es decir, $A = \biguplus_{x \in A} [x]$. Esa colección es un nuevo conjunto, denotado por $A/R := \{ [x] : x \in A \}$ y llamado el **conjunto cociente** de A por la relación de equivalencia R. (Fíjese que $[x] = [y]$ si y sólo si $x \sim y$; como los elementos de un conjunto se cuentan sin repetición, el número de elementos de A/R es el número de estas clases de equivalencia.)

[1] Para una buena discusión de los detalles finos de la formación de conjuntos, véase: Paul R. Halmos, *Naive Set Theory*, Springer, New York, 1974.

Definición 1.1. Un **orden parcial** sobre una conjunto A es una relación $R \subseteq A \times A$, donde $x \leq y$ denota $(x,y) \in A$, que es *reflexiva*, *antisimétrica* y *transitiva*:

(a) $x \leq x$ para todo $x \in A$;

(b) $x \leq y$, $y \leq x$ sólo es posible si $x = y$;

(c) $x \leq y$, $y \leq z$ implica $x \leq z$.

Por costumbre, se escribe $x < y$ si $x \leq y$ pero $x \neq y$. La relación simbolizada por "$x < y$" es un *orden parcial estricto*.

Un **orden simple** (u *orden lineal*) es un orden parcial en donde $x \leq y$ o bien $y \leq x$ para cada par $x, y \in A$.

Un **conjunto dirigido** es una conjunto A con un orden parcial tal que para todo par de elementos $x, y \in A$, existe $z \in A$ que cumple $x \leq z$, $y \leq z$.

Ejemplo 1.2. El orden usual de la *recta real* $\mathbb{R}$ es un orden simple. Los números naturales $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, enteros $\mathbb{Z}$ y racionales $\mathbb{Q}$, por ser partes de $\mathbb{R}$, son también simplemente ordenados.

El plano $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ puede ser ordenado al declarar que $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$ si y sólo si $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$. Este es un orden parcial, pero no es simple, por cuanto los pares $(0,1)$ y $(1,0)$ no son comparables.

Entonces $\mathbb{R}^2$ es un conjunto dirigido: dados (x_1, y_1), (x_2, y_2), sean $x_3 := \max\{x_1, x_2\}$, $y_3 := \max\{y_1, y_2\}$. Entonces $(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3)$ y también $(x_2, y_2) \leq (x_3, y_3)$. $\Diamond$

Ejemplo 1.3. El plano $\mathbb{R}^2$ admite otra relación de **orden lexicográfico** que es simple, al tomar $(x_1, y_1) \leq_{\text{lex}} (x_2, y_2)$ si $x_1 < x_2$ o bien $x_1 = x_2$, $y_1 \leq y_2$.

Más generalmente, si $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ son dos conjuntos simplemente ordenados, se define el orden lexicográfico sobre $A \times B$ por la misma receta: $(x_1, y_1) \leq_{\text{lex}} (x_2, y_2)$ si $x_1 <_A x_2$ o bien $x_1 = x_2$, $y_1 \leq_B y_2$. $\Diamond$

Ejemplo 1.4. Dado un conjunto X, es posible *ordenar las partes de X por inclusión*. Esto se simboliza por $A \subseteq B$, desde luego, si A, B son partes de X. Este es un conjunto dirigido: si C es cualquier parte de X tal que $C \supseteq A \cup B$, entonces $A \subseteq C$ y $B \subseteq C$. $\Diamond$

► Una **función** $f : A \to B$ es una relación R entre A y B con dos propiedades:[2]

⋆ para todo $x \in A$, hay un elemento $y \in B$ con $(x,y) \in R$;

⋆ si $(x,y) \in R$, $(x,z) \in R$, entonces $y = z$.

[2] Algunos autores, como Munkres, permiten que el *dominio* $\{x \in A : (x,y) \in R \text{ para algún } y \in B\}$ sea una parte propia de A. De este modo, por ejemplo, la receta $f(x) := 1/x$ puede considerarse como función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con $x = 0$ excluido del dominio.

La *imagen* de f es $\operatorname{im}(f) := \{\, y \in B : (x,y) \in R \text{ para algún } x \in A \,\}$. Cuando $(x,y) \in R$, se escribe $y = f(x)$.

Una función $f\colon A \to B$ es *inyectiva* si $s \neq t$ en A implica que $f(s) \neq f(t)$ en B; f es *sobreyectiva* si $\operatorname{im}(f) = B$; f es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Una función biyectiva $f\colon A \to B$ determina una única función $g\colon B \to A$ por la receta: $x = g(y)$ si y sólo si $y = f(x)$. Esta es la *función inversa* de la biyección f.

Notación. La totalidad de funciones $f\colon A \to B$ es un conjunto denotado por B^A.

Dado un conjunto X, cada parte $A \subseteq X$ posee una **función indicatriz** $\chi_A\colon X \to \{0,1\}$, definido por

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Fíjese que $\chi_X \equiv 1$ y $\chi_\emptyset \equiv 0$ (funciones constantes).

La correspondencia dada por $A \mapsto \chi_A$ es una biyección entre el conjunto de partes de X y la totalidad de funciones indicatrices. Por tal motivo, se usa la notación $\mathbf{2}^X$ también para denotar *el conjunto de partes de* X.

Si X es un conjunto finito, $\#(X)$ denotará el *número de elementos* de X. Obsérvese que $\#(\mathbf{2}^X) = 2^{\#(X)}$.

► Un conjunto X es **finito**, con $\#(X) = n \in \mathbb{N}$, si hay una biyección entre X y $\{1,2,\dots,n\}$. Un conjunto X es **numerablemente infinito** si hay una biyección entre X y $\mathbb{N}$. (Unos ejemplos bien conocidos son $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$.) Dícese que X es **numerable** (o *contable*) si X es finito o numerablemente infinito.

Cada parte de un conjunto numerable es también numerable. Esta afirmación se demuestra al comprobar que cada parte de $\mathbb{N}$ es numerable. En efecto, si $A \subseteq \mathbb{N}$, sea a_0 el menor elemento de A; sea a_1 el menor elemento de $A \setminus \{a_0\}$; sea a_2 el menor elemento de $A \setminus \{a_0, a_1\}$; y así sucesivamente. Por inducción, este proceso o bien termina, en cuyo caso A es finito, o bien exhibe una biyección $n \mapsto a_n$ entre $\mathbb{N}$ y todos los elementos de A.

La propiedad de $\mathbb{N}$ empleada en el argumento anterior es su *buen orden*. Un conjunto X, dotado de un orden simple, está **bien ordenado** si cada parte no nula $A \subseteq X$ posee un menor elemento: hay $a_* \in A$ tal que $a_* \leq a$ para todo $a \in A$. La existencia de un buen orden en un conjunto cualquiera es equivalente al *axioma de elección* de la teoría de conjuntos.

Definición 1.5. Una colección $\mathcal{A}$ de conjuntos está *indexada* por un conjunto J si hay una función sobreyectiva $f\colon J \to \mathcal{A}$. Al escribir $A_\alpha = f(\alpha)$, se usa la notación $\mathcal{A} = \{\, A_\alpha : \alpha \in J \,\}$.[3]

[3] Hay colecciones de conjuntos que no forman conjuntos (habida cuenta de la paradoja de Russell), pero estas no admiten conjunto índice alguno. Obsérvese que no hay que pedir que f sea inyectiva, porque en la formación del conjunto $\{\, A_\alpha : \alpha \in J \,\}$ se eliminan repeticiones, por regla.

El **producto cartesiano** de estos conjuntos se define como

$$\prod_{\alpha\in J} A_\alpha := \Bigl\{ x\colon J \to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha : x(\alpha) \in A_\alpha \text{ para todo } \alpha \in J \Bigr\}.$$

Usualmente se escribe $x_\alpha := x(\alpha)$, así que un elemento del producto cartesiano es una familia $x = (x_\alpha)_{\alpha\in J}$ donde se admiten repeticiones.

Cuando $\#(J) = 2$, esta definición coincide con el producto cartesiano $A_1 \times A_2$ introducido anteriormente. También se identifican productos cartesianos de tres conjuntos: $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$. Cuando J es numerablemente infinito, los elementos de $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha$ son *sucesiones* de ciertos elementos de $\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$.

Si J no es numerable, no es evidente si existen *funciones de elección* $x\colon J \to \bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha$ con $x_\alpha \in A_\alpha$ para todo α, es decir, si $\prod_{\alpha\in J} A_\alpha \neq \emptyset$ (asumiendo que ningún A_α sea vacío). El proceso de inducción (ordinaria) no es capaz de producir tales funciones. Hay que echar mano al **axioma de elección**, para un conjunto índice J arbitrario:

$$\text{Si} \quad A_\alpha \neq \emptyset \ \text{ para todo } \alpha, \quad \text{entonces} \quad \prod_{\alpha\in J} A_\alpha \neq \emptyset.$$

He aquí una lista de afirmaciones que son equivalentes al axioma de elección:[4]

Teorema de Zermelo: Cualquier conjunto posee un buen orden.

Principio de maximalidad: Cualquier conjunto parcialmente ordenado posee una parte máxima que es simplemente ordenada.

Lema de Zorn: Un conjunto parcialmente ordenado, en el cual cada parte simplemente ordenada posee una cota superior, contiene un elemento máximo.

Quizás el más práctico de estas formulación es el lema de Zorn,[5] porque tiene una hipótesis fácil de verificar en casos particulares: la existencia de una cota superior para una parte simplemente ordenada.

[4]La existencia de un buen orden, por ejemplo en un intervalo $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, fue mostrado por Ernst Zermelo en 1904, empleando ideas de Cantor y el axioma de elección (que él mismo introdujo). En 1905, Georg Hamel usó este teorema para mostrar que cualquier espacio vectorial posee una base. Hausdorff formuló el principio de maximalidad en su libro de 1914.

[5]Este "lema" fue mostrado por Kuratowski en 1922, en el caso particular del orden parcial de inclusión de conjuntos; la versión para un orden parcial arbitrario fue encontrado independientemente por Zorn en 1935. (Los polacos lo llaman *lemat Kuratowskiego–Zorna*.) Las fuentes originales son: Kazimierz Kuratowski, *Une méthode d'élimination des nombres transfinis des raisonnements mathématiques*, Fundamenta Mathematicae **3** (1922), 76–108; Max August Zorn, *A remark on method in transfinite algebra*, Bulletin of the American Mathematical Society **10** (1935), 667–670.

► Dada una función $f\colon X \to Y$ y unas partes $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$, se define la **imagen** bajo f de A y la **preimagen** bajo f de B por:

$$f(A) := \{\, f(x) : x \in A \,\} \subseteq Y,$$
$$f^{-1}(B) := \{\, x \in X : f(x) \in B \,\} \subseteq X.$$

Fíjese que la correspondencia $A \mapsto f(A)$ es una función $\mathbf{2}^X \to \mathbf{2}^Y$, mientras $B \mapsto f^{-1}(B)$ es una función $\mathbf{2}^Y \to \mathbf{2}^X$. *Ojo*: la notación f^{-1} no significa la función inversa de f, aun cuando f sea biyectiva.

Lema 1.6. *Dada una función $f\colon X \to Y$, las dos correspondencias $A \mapsto f(A) : \mathbf{2}^X \to \mathbf{2}^Y$ y $B \mapsto f^{-1}(B) : \mathbf{2}^Y \to \mathbf{2}^X$ tienen las siguientes propiedades:*

(a) $f\big(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha\big) = \bigcup_{\alpha\in J} f(A_\alpha), \quad f\big(\bigcap_{\alpha\in J} A_\alpha\big) \subseteq \bigcap_{\alpha\in J} f(A_\alpha).$

(b) $f^{-1}\big(\bigcup_{\beta\in K} B_\beta\big) = \bigcup_{\beta\in K} f^{-1}(B_\beta), \quad f^{-1}\big(\bigcap_{\beta\in K} B_\beta\big) = \bigcap_{\beta\in K} f^{-1}(B_\beta).$

(c) $f(\emptyset) = \emptyset, \quad f(X) \subseteq Y.$

(d) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(Y) = X, \quad f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B).$

(e) *Si $A \subseteq X$, entonces $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, con igualdad si f es inyectiva.*

(f) *Si $B \subseteq Y$, entonces $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, con igualdad si f es sobreyectiva.* $\boxminus$

1.2 Abiertos y cerrados, sistemas de vecindarios

Definición 1.7. Dado un conjunto X, una **topología** sobre X es una colección $\mathcal{T} \subseteq \mathbf{2}^X$ de partes de X, que cumple:

(a) $X \in \mathcal{T}$ y $\emptyset \in \mathcal{T}$;

(b) si $U_1, \dots, U_n \in \mathcal{T}$, entonces $U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \in \mathcal{T}$;

(c) si $U_\alpha \in \mathcal{T}$ para todo $\alpha \in J$, entonces $\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha \in \mathcal{T}$.

El par $(X, \mathcal{T})$ es un **espacio topológico**. Si la topología $\mathcal{T}$ es evidente del contexto, se puede decir también que "X es un espacio topológico".

Los elementos de $\mathcal{T}$ se llaman **partes abiertas**, o simplemente **abiertos**, del espacio topológico X.

Definición 1.8. En un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, una parte $F \subseteq X$ es una **parte cerrada**, o simplemente un **cerrado**, si $X \setminus F \in \mathcal{T}$. Fíjese que $\emptyset$ y X son cerrados; si $F_1, \dots, F_n$ son cerrados, entonces $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_n$ es cerrado; y si $\{\, F_\alpha : \alpha \in J \,\} \subseteq \mathbf{2}^X$ es una familia de cerrados, entonces $\bigcap_{\alpha\in J} F_\alpha$ es cerrado.

Ejemplo 1.9. Si X es un conjunto cualquiera, la colección de todas sus partes $\mathcal{T} = \mathbf{2}^X$, que obviamente satisface las propiedades (a), (b), (c) de la Definición 1.7, es la **topología discreta** sobre X. Todas sus partes son abiertas y cerradas a la vez. $\lozenge$

Ejemplo 1.10. Al otro extremo, si X es un conjunto cualquiera, la colección $\mathcal{T} = \{X, \emptyset\}$ es la **topología indiscreta** sobre X. $\lozenge$

Ejemplo 1.11 (Sierpiński)**.** Sea $S = \{0,1\}$, un conjunto con exactamente dos elementos; tómese $\mathcal{T} := \bigl\{\emptyset, \{0\}, \{0,1\}\bigr\}$. Esta es la topología más pequeña que no es discreta ni indiscreta. Con esta topología, S se llama el **espacio de Sierpiński**. $\lozenge$

Definición 1.12. Una **métrica** sobre un conjunto X es una función $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ con las siguientes propiedades:

(a) $\rho(x,y) \geq 0$ para todo $x,y \in X$, con igualdad si y sólo si $x = y$;

(b) $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ para todo $x,y \in X$;

(c) $\rho(x,z) \leq \rho(x,y) + \rho(y,z)$ para todo $x,y,z \in X$.

La parte $B_\rho(x;\varepsilon) := \{\, y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon \,\}$ es la **bola abierta** con centro x y radio ε. Un *abierto* de X es, por definición, una unión de alguna colección de bolas abiertas; tales abiertos constituyen la **topología métrica** determinada por ρ.

Ejemplo 1.13. En particular, la *recta real* $\mathbb{R}$ tiene la métrica dada por $\rho(s,t) := |s-t|$. La *desigualdad triangular* —la condición (c) de la Definición 1.12— en este caso se reduce a la propiedad $|s-u| \leq |s-t| + |t-u|$ del valor absoluto de números reales. En este caso, un intervalo abierto $(a,b) := \{\, t \in \mathbb{R} : a < t < b \,\}$ es una “bola abierta”, con centro $\frac{1}{2}(a+b)$ y radio $\frac{1}{2}(b-a)$. La **topología usual** de $\mathbb{R}$ entonces es la topología determinada por esta métrica.

El intervalo $(b,\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (b+n, b+n+2)$ es una unión numerable de bolas abiertas, luego es un abierto de $\mathbb{R}$. De igual manera, el intervalo $(-\infty,a)$ es un abierto de $\mathbb{R}$. Entonces el intervalo $[a,b] := \{\, t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b \,\}$ es cerrado en $\mathbb{R}$, por ser el complemento del abierto $(-\infty,a) \cup (b,\infty)$. $\lozenge$

Ejemplo 1.14. Otra topología de $\mathbb{R}$ es la que se obtiene al declarar que las partes cerradas, aparte del propio $\mathbb{R}$, son todas las partes *finitas* de $\mathbb{R}$. (Estas partes son precisamente los conjuntos de ceros del polinomios en $\mathbb{R}[X]$: $\mathbb{R}$ mismo es el juego de ceros del polinomio nulo; $\emptyset$ es el juego de ceros de un polinomio constante no nulo; cualquier otro polinomio, de grado n, tiene a lo sumo n ceros reales.) Este es la **topología cofinita** sobre $\mathbb{R}$. Sus abiertos no triviales son las partes de $\mathbb{R}$ con complementos finitos. $\lozenge$

► No siempre es necesario especificar todos los abiertos de una topología $\mathcal{T}$; basta identificar algunos abiertos que permiten reconstruir los demás.

Definición 1.15. Dado un conjunto X, una **base** para una topología sobre X es un juego de partes $\mathcal{B} \subseteq \mathbf{2}^X$ tal que:

(a) para cada $x \in X$, hay al menos un $B \in \mathcal{B}$ con $x \in B$;

(b) si $x \in B_1 \cap B_2$ con $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, hay al menos un $B_3 \in \mathcal{B}$ con $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

La **topología $\mathcal{T}$ generada por** $\mathcal{B}$ es la totalidad de uniones de miembros de $\mathcal{B}$. En otras palabras, $U \in \mathcal{T}$ si y sólo si $U = \bigcup_{\alpha \in J} B_\alpha$ con cada $B_\alpha \in \mathcal{B}$, para algún conjunto índice J. (Si J es vacío, esta unión también es vacía, así que $\emptyset \in \mathcal{T}$.) Fíjese, en particular, que $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$.

Ejemplo 1.16. Una base para la topología discreta es $\mathcal{B} = \{\, \{x\} : x \in X \,\}$ porque obviamente cumple las propiedades (a) y (b); y cada parte de X es la totalidad de sus elementos. $\lozenge$

Lema 1.17. *Sea $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{2}^X$ una colección cualquiera de partes de X. Hay una única topología $\mathcal{T}$ más pequeña que incluye $\mathcal{S}$.*

En este contexto, dícese que $\mathcal{S}$ es una **subbase** para la topología $\mathcal{T}$.

Demostración. Decir que $\mathcal{T}$ es la topología "más pequeña" es afirmar que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, si $\mathcal{T}'$ es una topología sobre X tal que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}'$. Defínase

$$\mathcal{B} := \{X, \emptyset\} \cup \{\, S_1 \cap S_2 \cap \cdots \cap S_n : n \in \mathbb{N}^*;\ S_1, \dots, S_n \in \mathcal{S} \,\},$$

es decir, las partes triviales de X junto con todas las intersecciones finitas de miembros de $\mathcal{S}$. Entonces $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X: para la condición (a) de la Definición 1.15, tómese $B := X$; para la condición (b), tómese $B_3 := B_1 \cap B_2$. Sea $\mathcal{T}$ la topología generada por $\mathcal{B}$.

Si $\mathcal{T}'$ es una topología que incluye $\mathcal{S}$, entonces $\mathcal{T}'$ contiene todas las intersecciones finitas de sus miembros, así que $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{B}$. También, $\mathcal{T}'$ contiene todas las uniones arbitrarias de sus miembros, así que $\mathcal{T}' \supseteq \mathcal{T}$. $\square$

Ejemplo 1.18. La **recta flechada** (o la *recta de Sorgenfrey*) $\mathbb{R}_\ell$ es el conjunto de números reales, con la topología cuya base es el juego de intervalos $[a, r) := \{\, t \in \mathbb{R} : a \leq t < r \,\}$, con $a \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{Q}$. Es de notar que cada intervalo $[a, b)$ es abierto y cerrado a la vez, en este espacio topológico.[6] $\lozenge$

[6] El espacio $\mathbb{R}_\ell$ fue introducido por Alexandrov y Urysohn en 1929 y fue propuesto más tarde como un "contraejemplo universal" en la topología general, en la obra: Robert H. Sorgenfrey, *On the topological product of paracompact spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society **53** (1947), 631–632. El término "recta flechada" (*strałka*) es de Engelking. La topología de $\mathbb{R}_\ell$ también se llama la *topología del límite inferior*.

Ejemplo 1.19. Una base para la topología métrica definida por una métrica ρ es totalidad de sus bolas abiertas: $\mathcal{B}_\rho = \{\, B_\rho(x;\varepsilon) : x \in X,\ \varepsilon > 0 \,\}$. La propiedad (a) es obvia. Para la propiedad (b), supóngase que $x \in B_\rho(y;\varepsilon_1) \cap B_\rho(z;\varepsilon_2)$, así que $\rho(x,y) < \varepsilon_1$, $\rho(x,z) < \varepsilon_2$. Si $\rho(x,w) < \varepsilon$, entonces $\rho(y,w) < \varepsilon + \rho(x,y)$ y además $\rho(z,w) < \varepsilon + \rho(x,z)$, por la desigualdad triangular. Al tomar

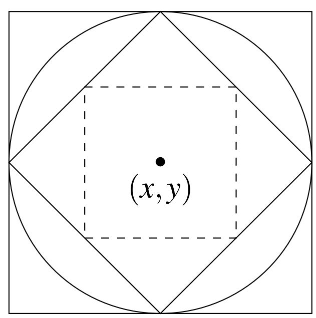
$$\varepsilon := \min\{\, \varepsilon_1 - \rho(x,y),\ \varepsilon_2 - \rho(x,z) \,\},$$

se ve que $x \in B_\rho(x;\varepsilon) \subseteq B_\rho(y;\varepsilon_1) \cap B_\rho(z;\varepsilon_2)$. $\Diamond$

Obsérvese que no es necesario, en el ejemplo, que los radios ε de las bolas tomen todos los valores positivos en $(0,\infty)$. Para elegir el radio de la última bola $B_\rho(x;\varepsilon)$, basta con que ε sea menor que el mínimo de dos números positivos dados. Entonces $\mathcal{B}' := \{\, B_\rho(x;1/n) : n \in \mathbb{N}^* \,\}$ es otra base para la misma topología métrica.[7]

Definición 1.20. Dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ para topologías sobre X se llaman *equivalentes* si generan la misma topología $\mathcal{T}$. Esto sucede si, toda vez que hay $x \in B_1 \in \mathcal{B}$, hay $B'_1 \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B'_1 \subseteq B_1$, y viceversa: toda vez que hay $y \in B'_2 \in \mathcal{B}$, hay $B_2 \in \mathcal{B}'$ tal que $y \in B_2 \subseteq B'_2$.

Dos métricas ρ y σ sobre un conjunto X son **métricas equivalentes** si generan la misma topología, esto es, si las bases de bolas $\mathcal{B}_\rho$ y $\mathcal{B}_\sigma$ son equivalentes.



Ejemplo 1.21. En el plano $\mathbb{R}^2$, estas son tres métricas posibles:

$$\begin{aligned}
\rho_1((s,t),(s',t')) &:= |s-s'| + |t-t'|\,, \\
\rho_2((s,t),(s',t')) &:= \sqrt{(s-s')^2 + (t-t')^2}\,, \\
\rho_\infty((s,t),(s',t')) &:= \max\{|s-s'|,\ |t-t'|\}\,.
\end{aligned}$$

La métrica ρ_2 es la métrica euclidiana (la distancia entre dos puntos está dada por la fórmula de Pitágoras). Una "bola" $B_{\rho_2}((s,t);\varepsilon)$ es un disco circular centrado en (s,t), de radio ε. Las bolas correspondientes para ρ_1 y ρ_∞ son láminas cuadradas, centradas en (s,t). Dentro de

[7]La notación $\mathbb{N}^* := \{1,2,3,\dots\}$ para los *números enteros positivos* sigue la usanza francesa: $\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Los autores alemanes prefieren la notación $\mathbb{N} := \{1,2,3,\dots\}$ y $\mathbb{N}_0 := \{0,1,2,3,\dots\}$; aquí no se usará ese convenio.

cada bola de un tipo es posible colocar una bola de cualquier otro tipo, con el mismo centro y un radio tal vez más corto. Esto se desprende de las desigualdades

$$\tfrac{1}{2}(a+b) \leq \max\{a,b\} \leq \sqrt{a^2+b^2} \leq a+b,$$

válidas para $a \geq 0$, $b \geq 0$. Por lo tanto la "topología usual" del plano $\mathbb{R}^2$ está dada por cualquiera de estas métricas.

Cada una de las métricas ρ_1, ρ_2, ρ_∞ viene de una *norma* sobre $\mathbb{R}^2$. Una **norma** sobre un espacio vectorial real V es una función $V \to \mathbb{R} : x \mapsto \|x\|$, que cumple tres requisitos:

(a) $\|x\| \geq 0$ para todo $x \in X$, con igualdad si y sólo si $x = 0$;

(b) $\|tx\| = |t|\,\|x\|$ para todo $x \in X$, $t \in \mathbb{R}$;

(c) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ para todo $x, y \in X$.

La métrica asociada está dada por $\rho(x,y) := \|x-y\|$. Las tres métricas anteriores sobre $\mathbb{R}^2$ viene de las normas

$$\|(s,t)\|_1 := |s|+|t|, \qquad \|(s,t)\|_2 := \sqrt{s^2+t^2}, \qquad \|(s,t)\|_\infty := \max\{|s|,\ |t|\}.$$

Por convenio, la *norma euclidiana* se escribe sin subíndice: $\|(s,t)\| = \|(s,t)\|_2$. ◊

► A cada parte $A \subseteq X$ de un espacio topológico, se le puede asociar un abierto máximo U tal que $U \subseteq A$ (su interior) y un cerrado mínimo F tal que $A \subseteq F$ (su clausura), mediante la definición siguiente.

Definición 1.22. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. El **interior** A° de A y la **clausura** $\overline{A}$ se definen como sigue:

$$A^\circ := \bigcup\{\,U \text{ abierto } : U \subseteq A\,\}, \qquad \overline{A} := \bigcap\{\,F \text{ cerrado } : F \supseteq A\,\}.$$

Es evidente que A° es abierto, por ser una unión de abiertos; y que $\overline{A}$ es cerrado, por ser una intersección de cerrados. Por tanto, A° es el *abierto más grande* incluido en A, mientras $\overline{A}$ es el *cerrado más pequeño* que incluye A.

Lema 1.23. (a) *La operación de clausura $A \mapsto \overline{A}$ tiene las siguientes propiedades:*

$$\overline{\emptyset} = \emptyset, \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}, \qquad A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B};$$

A es cerrado si y sólo si $\overline{A} = A$.

(b) *La operación de formar interiores $A \mapsto A^\circ$ tiene las siguientes propiedades:*

$$X^\circ = X, \qquad (A^\circ)^\circ = A^\circ, \qquad (A \cap B)^\circ = A^\circ \cap B^\circ, \qquad A \subseteq B \implies A^\circ \subseteq B^\circ;$$

A es abierto si y sólo si $A^\circ = A$.

Demostración. Como A es abierto si y sólo $X \setminus A$ es cerrado, las leyes de de Morgan permiten deducir la parte (b) de la parte (a). En particular, es

$$X \setminus \overline{A} = \bigcup \{ X \setminus F : F \text{ cerrado}, \ F \supseteq A \} = \bigcup \{ U : U \text{ abierto}, \ U \subseteq (X \setminus A) \} = (X \setminus A)^\circ,$$

de modo que la operación de tomar complementos $A \mapsto (X \setminus A)$ intercambia clausuras con interiores.

Ad (a): Si A es cerrado, entonces $\overline{A} = A$; e inversamente, porque $\overline{A}$ es cerrado de oficio. En particular, es $\overline{\emptyset} = \emptyset$. Además, $\overline{A} \subseteq \overline{\overline{A}}$ con igualdad, porque $\overline{A}$ es cerrado.

Si $A \subseteq B$, entonces $\overline{B}$ es un cerrado que incluye A, y por ende $\overline{B} \supseteq \overline{A}$.

Finalmente, $\overline{A} \cup \overline{B}$ es cerrado e incluye $A \cup B$, así que $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Por otro lado, las inclusiones $A \subseteq (A \cup B)$ y $B \subseteq (A \cup B)$ implican que $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ y $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, de modo que $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. □

Lema 1.24. *Si $A \subseteq X$, $x \in X$, entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si cada abierto U con $x \in U$ cumple $U \cap A \neq \emptyset$.*

Demostración. Sea U un abierto con $x \in U$. Si $U \cap A = \emptyset$, entonces $X \setminus U$ es un cerrado con $A \subseteq X \setminus U$. Por la Definición 1.22, se obtiene $\overline{A} \subseteq X \setminus U$; por lo tanto, $x \notin \overline{A}$. □

Definición 1.25. Una parte A es **densa** en un espacio topológico X si $\overline{A} = X$.

Ejemplo 1.26. El conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en la recta $\mathbb{R}$ (con su topología usual).

En efecto, para cualquier $x \in \mathbb{R}$ y cualquier abierto U de $\mathbb{R}$ con $x \in U$, hay algún $\varepsilon > 0$ tal que $B(x;\varepsilon) \subseteq U$. Existe un número racional q tal que $|x - q| < \varepsilon$, luego $q \in B(x;\varepsilon)$ y así $q \in U$. El Lema 1.24 muestra que $x \in \overline{\mathbb{Q}}$. Se concluye que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Obsérvese que $\mathbb{Q}^\circ = \emptyset$, porque cualquier bola $B(y;\varepsilon)$ contiene puntos racionales y otros puntos irracionales. Por lo tanto, el único abierto incluido en $\mathbb{Q}$ es el conjunto vacío $\emptyset$. ◊

Definición 1.27. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. La **frontera** ∂A de A es el siguiente conjunto cerrado:

$$\partial A := \overline{A} \cap \overline{X \setminus A} = \overline{A} \setminus A^\circ.$$

Fíjese que $\overline{A} = A \cup \partial A$ y que $A^\circ = A \setminus \partial A$.

Del ejemplo anterior, se obtiene $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, al considerar $\mathbb{Q}$ como parte densa de $\mathbb{R}$ con interior vacío.

► La definición original de espacio topológico dada por Hausdorff (en 1914) no fue formulada en términos de partes abiertas. Más bien, Hausdorff introdujo el concepto de un "sistema de vecindarios de puntos" en un conjunto dado.

Definición 1.28. Si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico y si $x \in X$, un **vecindario** de x es *un conjunto V que incluye un abierto U que contiene x*: es decir, $x \in U \subseteq V$ con $U \in \mathcal{T}$.

Lema 1.29. *Una parte $V \subseteq X$ es un abierto si y sólo si V es un vecindario de cada uno de sus puntos.*

Demostración. Su V es abierto y $x \in V$, la observación trivial de que $x \in V \subseteq V$ muestra que V es un vecindario de x.

Inversamente, si V es un vecindario de cada uno de sus puntos, entonces para cada $x \in V$ hay un abierto U_x tal que $x \in U_x \subseteq V$. Sea $U := \bigcup_{x \in V} U_x$. Este U es un abierto, por ser una unión de abiertos. Como $x \in U_x \subseteq U$ para todo $x \in V$, se ve que $V \subseteq U$. Por otro lado, como $U_x \subseteq V$ para todo $x \in V$, se ve que $U \subseteq V$. Entonces $U = V$ y por ende V es abierto. $\square$

Definición 1.30. Un **sistema de vecindarios** en un conjunto X es un juego $\{\mathcal{V}_x : x \in X\}$ donde cada $\mathcal{V}_x$ es una colección no vacía de partes de X que cumplen estos requisitos:[8]

(a) si $V \in \mathcal{V}_x$, entonces $x \in V$;

(b) si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}_x$, entonces $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}_x$;

(c) si $V \in \mathcal{V}_x$ y si $W \supseteq V$, entonces $W \in \mathcal{V}_x$;

(d) si $V \in \mathcal{V}_x$ y si $U := \{y : V \in \mathcal{V}_y\}$, entonces $U \in \mathcal{V}_x$.

Lema 1.31. *Los vecindarios de un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ cumplen los incisos (a)–(d) de la Definición 1.30.*

Inversamente, si X es un conjunto dotado de un sistema de vecindarios que cumple estas propiedades, hay una única topología sobre X cuyos vecindarios coinciden con los del sistema dado.

Demostración. Ad$(\Rightarrow)$: Por la Definición 1.28, los vecindarios para una topología $\mathcal{T}$ cumplen los requisitos (a) y (c). Si V_1, V_2 son vecindarios de x, hay abiertos $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ tales que $x \in U_1 \subseteq V_1$ y $x \in U_2 \subseteq V_2$. Entonces $x \in U_1 \cap U_2 \subseteq V_1 \cap V_2$ con $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$; se ha comprobado la propiedad (b).

Si V es un vecindario de x y si $O \in \mathcal{T}$ cumple $x \in O \subseteq V$, el Lema 1.29 muestra que O (y también V) es un vecindario de cada $y \in O$. Luego $O \subseteq U := \{y : V \text{es un vecindario de } y\}$; como $x \in O \subseteq U$, se concluye que U es un vecindario de x.

Ad$(\Leftarrow)$: Dado un sistema de vecindarios, sea $\mathcal{T}$ la totalidad de partes $U \subseteq X$ tales que $x \in U \implies U \in \mathcal{V}_x$.

Entonces $\emptyset \in \mathcal{T}$ trivialmente. Además, $X \in \mathcal{V}_x$ para cada x por la propiedad (c), ya que $\mathcal{V}_x \neq \emptyset$; por lo tanto, $X \in \mathcal{T}$.

[8]En su libro de 1914, Hausdorff definió un espacio topológico como un espacio dotado de un sistema de vecindarios. En la segunda edición de 1927, lo reemplazó por un espacio que posee una colección de abiertos: nuestra Definición 1.7.

Si $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ y si $x \in U_1 \cap U_2$, entonces $x \in U_1$ y $x \in U_2$, lo cual implica que $U_1 \in \mathcal{V}_x$ y $U_2 \in \mathcal{V}_x$; luego $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{V}_x$, por (b). Por lo tanto, $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$.

Si $U_\alpha \in \mathcal{T}$ para $\alpha \in J$ y si $x \in \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$, entonces $x \in U_\beta$ para algún $\beta \in J$. Luego $U_\beta \in \mathcal{V}_x$ y en consecuencia $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha \in \mathcal{V}_x$ también, por (c). Se concluye que $\mathcal{T}$ es una topología sobre X.

Si V es un vecindario de x para esta topología $\mathcal{T}$, entonces hay $U \in \mathcal{T}$ con $x \in U \subseteq V$. Ahora $U \in \mathcal{V}_x$, así que $V \in \mathcal{V}_x$, en vista de (c).

Por otro lado, si $V \in \mathcal{V}_x$, sea $U := \{ y : V \in \mathcal{V}_y \}$; entonces $x \in U$ y $U \subseteq V$, por (a). Si $z \in U$, entonces $V \in \mathcal{V}_z$, así que $U \in \mathcal{V}_z$ también, por (d). Esto implica que $U \in \mathcal{T}$. Se concluye que V es un vecindario de x por la topología $\mathcal{T}$.

La unicidad de $\mathcal{T}$ sigue del Lema 1.29, como los abiertos son los vecindarios de cada uno de sus puntos: esto es la definición de los miembros de $\mathcal{T}$. □

El Lema 1.24 ahora dice: $x \in \overline{A}$ *si y sólo si cada vecindario de* x *contiene un punto de* A.

Definición 1.32. Una **base de vecindarios** para un espacio topológico X es un juego de vecindarios $\mathcal{B}_x \subseteq \mathcal{V}_x$, para cada $x \in X$ tal que cada $V \in \mathcal{V}_x$ incluye al menos un elemento $B \in \mathcal{B}_x$, así que $x \in B \subseteq V$.

En un espacio métrico (X, ρ), por ejemplo, las bolas abiertas $B_\rho(x; 1/n)$, para $x \in X$ y $n \in \mathbb{N}^*$, forman una base de vecindarios para la topología de la métrica.

1.3 Funciones continuas, topologías débiles

Definición 1.33. Sean X, Y dos espacios topológicos. Dícese que $f : X \to Y$ es una **función continua** si para cada abierto $V \subseteq Y$, la parte $f^{-1}(V)$ es un abierto de X.

Si $x \in X$, una función $g : X \to Y$ es **continua en** x si para cada vecindario V de $g(x)$ en Y, la parte $g^{-1}(V)$ es un vecindario de x en X.

Lema 1.34. *Para una función* $f : X \to Y$*, las siguientes definiciones de continuidad son equivalentes:*

(a) *si* V *es abierto en* Y*, entonces* $f^{-1}(V)$ *es abierto en* X*;*

(b) *si* C *es cerrado en* Y*, entonces* $f^{-1}(C)$ *es cerrado en* X*;*

(c) $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ *para todo* $A \subseteq X$*;*

(d) f *es continua en* x *para todo* $x \in X$*.*

Demostración. Ad (a) $\Longrightarrow$ (b): Si C es cerrado en Y, entonces $Y \setminus C$ es abierto en Y, así que $X \setminus f^{-1}(C) = f^{-1}(Y \setminus C)$ es abierto en X, luego $f^{-1}(C)$ es cerrado en X.

Ad (b) $\Longrightarrow$ (a): Si V es abierto en Y, entonces $Y \setminus V$ es cerrado en Y, así que $X \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Y \setminus V)$ es cerrado en X, luego $f^{-1}(V)$ es abierto en X.

Ad (b) $\Longrightarrow$ (c): Si $A \subseteq X$, entonces $f^{-1}(\overline{f(A)})$ es cerrado en X y $A \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ evidentemente. Por lo tanto, $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$; lo cual implica que $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Ad (c) $\Longrightarrow$ (b): Si C es cerrado en Y, sea $A := f^{-1}(C)$. Luego $f(A) = f(f^{-1}(C)) \subseteq C$. Si $x \in \overline{A}$, entonces $f(x) \in f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)} \subseteq \overline{C} = C$, así que $x \in f^{-1}(C) = A$. Por tanto, $A = f^{-1}(C)$ es cerrado en X.

Ad (a) $\Longrightarrow$ (d): Si $x \in X$ y si W es un vecindario de $f(x)$ en Y, entonces hay un abierto V en Y tal que $f(x) \in V \subseteq W$. Luego $x \in f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W)$ y $f^{-1}(V)$ es abierto en X, así que $f^{-1}(W)$ en un vecindario de x en X.

Ad (d) $\Longrightarrow$ (a): Si V es abierto en Y y si $x \in f^{-1}(V)$, entonces $f(x) \in V$, así que el abierto V es un vecindario de $f(x)$ en Y. Luego $f^{-1}(V)$ es un vecindario de x en X; es decir, hay un abierto U_x tal que $x \in U_x \subseteq f^{-1}(V)$. El conjunto $f^{-1}(V)$ es la unión de todos estos abiertos U_x y como tal, $f^{-1}(V)$ es abierto en X. $\square$

Lema 1.35. *Si $f\colon X \to Y$ y $g\colon Y \to Z$ son funciones continuas entre espacios topológicas, la composición $\underline{g \circ f} : x \mapsto g(f(x))$ también es continua.*

Demostración. Si U es un abierto en Z, entonces $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}(U))$ es un abierto en X. $\square$

Definición 1.36. Sean X, Y dos espacios topológicos. Una biyección $h\colon X \to Y$ que es continua, y cuya función inversa $g\colon Y \to X$ es también continua, se llama un **homeomorfismo** entre X y Y.

Dos espacios topológicos X, Y son **homeomorfos** si existe un homeomorfismo $h\colon X \to Y$. La notación $\underline{X \approx Y}$ significa que X es homeomorfo a Y.

Si $h\colon X \to Y$ es un homeomorfismo y si $g\colon Y \to X$ es su función inversa, para cada abierto $U \subseteq X$ la imagen $h(U) = g^{-1}(U)$ es abierto en Y. Como también $h^{-1}(h(U)) = U$ porque la función h es biyectiva, se ve que U es abierto en X *si y sólo si* $h(U)$ es abierto en Y.

Ejemplo 1.37. Sean $a < b$ en $\mathbb{R}$. Los intervalos (a,b) y (a,∞) y la recta $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ son homeomorfos.

En efecto, la función $f\colon (0,1) \to (a,b)$ dada por $f(t) := (1-t)a + tb$ es una biyección continua, con inverso continuo $s \mapsto (s-a)/(b-a)$; luego los intervalos acotados (a,b) y $(0,1)$ son homeomorfos. Además, la función $t \mapsto (t-a)$ es un homeomorfismo entre los intervalos no acotados (a,∞) y $(0,\infty)$.

Un homeomorfismo entre $(0,1)$ y $(0,\infty)$ está dado por este par de funciones inversas:

$$s = h(t) := \frac{t}{1-t}, \qquad t = g(s) := \frac{s}{1+s}.$$

Un homeomorfismo entre $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$ está dado por este otro par de funciones inversas:

$$s = k(t) := \frac{t}{1-t^2}, \qquad t = l(s) := \frac{2s}{1+\sqrt{1+4s^2}}. \qquad \Diamond$$

Las funciones continuas sobre un espacio topológico X con valores en la recta real $\mathbb{R}$ (o bien en el plano complejo $\mathbb{C}$) son particularmente importantes. Las operaciones algebraicas en $\mathbb{R}$ (o en $\mathbb{C}$) inducen combinaciones de funciones continuas.

Definición 1.38. Sea X un espacio topológico. Denótese por $C(X,\mathbb{R})$ la totalidad de funciones continuas $f\colon X \to \mathbb{R}$. Si $f,g \in C(X,\mathbb{R})$, defínase su **suma puntual** $f+g$, su **producto puntual** fg y su **dilatación** tf para $t \in \mathbb{R}$, por las fórmulas

$$f+g : x \longmapsto f(x)+g(x), \qquad fg : x \longmapsto f(x)\,g(x), \qquad tf : x \longmapsto t\,f(x), \quad \text{para} \quad x \in X.$$

Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in X$, también se define el *cociente puntual* $f/g : x \mapsto f(x)/g(x)$. Es fácil que $f+g$, fg y tf, como también f/g cuando g no se anula, son continuas. Entonces $C(X,\mathbb{R})$ es un *álgebra* real.[9]

Denótese por $C(X,\mathbb{C})$ la totalidad de funciones continuas $f\colon X \to \mathbb{C}$, con las operaciones correspondientes de suma y producto puntuales y dilatación por un número complejo. Además, el **conjugado complejo** $\bar{f}$ de $f \in C(X,\mathbb{C})$ se define por $\bar{f} : x \mapsto \overline{f(x)}$. Se verifica que $\bar{f}$ es también continua. Entonces $C(X,\mathbb{C})$ es un *álgebra involutiva* compleja.

► Un conjunto X admite diversas topologías. Hay un orden parcial sobre la colección de topologías sobre X dada por inclusión (dentro del conjunto $\mathbf{2}^X$). Cuando $\mathcal{T}_1$ y $\mathcal{T}_2$ son dos topologías sobre X tales que $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$, dícese que $\mathcal{T}_1$ es **más débil** (o *más gruesa*) que $\mathcal{T}_2$; o bien que $\mathcal{T}_2$ es **más fuerte** (o *más fina*) que $\mathcal{T}_1$.

Entre todas las topologías sobre X, la topología discreta ($\mathcal{T} = \mathbf{2}^X$) es el elemento más fuerte, mientras la topología indiscreta ($\mathcal{T} = \{X,\emptyset\}$) es el elemento más débil, para este orden parcial.

Proposición 1.39. *Dado un conjunto X y una familia de funciones $\{f_\alpha\colon X \to Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$, donde cada $(Y_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)$ es un espacio topológico, hay una topología $\mathcal{T}$ sobre X que cumple:*

- ⋆ *cada $f_\alpha : (X,\mathcal{T}) \to (Y_\alpha,\mathcal{U}_\alpha)$ es una función continua;*
- ⋆ *$\mathcal{T}$ es la topología más débil sobre X para que toda f_α sea continua.*

Dícese que $\mathcal{T}$ es la **topología débil** sobre X inducida por la familia de funciones $(f_\alpha)_{\alpha\in J}$.

[9] Un conjunto A es un **álgebra** sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ si A está dotado de operaciones de suma, producto y multiplicación escalar, tal que A sea un anillo y a la vez un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$.

Demostración. La topología $\mathcal{T}$ puede describirse, en vista del Lema 1.17, al exhibir una subbase. Considérese la colección $\mathcal{S}$ de parte de X de la forma:

$$\mathcal{S} := \{\, f_\alpha^{-1}(U_\alpha) : U_\alpha \in \mathcal{U}_\alpha,\ \alpha \in J\,\}.$$

Para que cada f_α sea continua, es necesario y suficiente que cada parte de este tipo pertenezca a la topología sobre X; luego, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{T}$. Por otro lado, entre todas las topologías sobre X, hay una que es más débil que todas los demás, según el Lema 1.17: $\mathcal{T}$ es la topología generada por la subbase $\mathcal{S}$. □

Lema 1.40. *Sea X un conjunto con la topología débil inducida por una familia de funciones $\{f_\alpha \colon X \to Y_\alpha\}_{\alpha\in J}$, y sea $(Z, \mathcal{V})$ otro espacio topológico. Para que una función $h\colon Z \to X$ sea continua, es necesario y suficiente que todas las composiciones $f_\alpha \circ h : Z \to Y_\alpha$ sean continuas.*

Demostración. Si $h\colon Z \to X$ es continua, entonces las composiciones $f_\alpha \circ h$ son continuas, por el Lema 1.35.

Inversamente, si cada $f_\alpha \circ h$ es continua, hay que mostrar que $h^{-1}(U)$ es abierto en Z para todo abierto U de X. Sólo hay que verificarlo para los abiertos de la subbase que definen la topología débil; es decir, puede suponerse que $U = f_\beta^{-1}(V_\beta)$, donde V_β es un abierto en algún Y_β. En ese caso,

$$h^{-1}(U) = h^{-1}(f_\beta^{-1}(V_\beta)) = (f_\beta \circ h)^{-1}(V_\beta),$$

así que $h^{-1}(U) \in \mathcal{V}$, por la continuidad de $f_\beta \circ h$. □

1.4 Subespacios, productos y cocientes

Definición 1.41. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ una parte cualquiera. La **topología relativa** (o la *topología de subespacio*) sobre A, es

$$\mathcal{T}_A := \{\, A \cap U : U \in \mathcal{T}\,\}.$$

En vista de la identidad $A \cap (U_1 \cap U_2) = (A \cap U_1) \cap (A \cap U_2)$ y también la distributividad $A \cap \left(\bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in J}(A \cap U_\alpha)$, se ve que $\mathcal{T}_A$ es efectivamente una topología sobre A.

Si $i_A : A \hookrightarrow X$ es la inclusión, $\mathcal{T}_A$ es la topología débil sobre A inducida por esta inclusión, ya que $A \cap U = i_A^{-1}(U)$.

Ejemplo 1.42. Considérese el intervalo cerrado $[0, 1]$ como subespacio de $\mathbb{R}$ (con la topología usual sobre $\mathbb{R}$). Entonces el subintervalo

$$[0, \tfrac{1}{2}) = [0, 1] \cap (-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2})$$

es un abierto de $[0, 1]$ con la topología relativa, aunque no es un abierto de $\mathbb{R}$. ◊

A la luz de este ejemplo, hay que distinguir entre las frases *abierto en* A (con la topología del subespacio) y *abierto en* X, cuando se trata de una parte $B \subseteq A$. Sin embargo, si A es un abierto en X originalmente, esta distinción desaparece.

Lema 1.43. *Sea X un espacio topológico y sea $B \subseteq A \subseteq X$. Si B es abierto en A y A es abierto en X, entonces B es abierto en X.*

Demostración. Como B es abierto en A, hay un abierto U en X tal que $B = A \cap U$. Como A es abierto en X, la intersección $A \cap U$ es también abierto en X. $\square$

Lema 1.44. *Sea X un espacio topológico y sea $B \subseteq A \subseteq X$. La clausura de B en la topología $\mathcal{T}_A$ es $A \cap \overline{B}$, donde $\overline{B}$ es la clausura de B en X.*

Demostración. Las partes cerradas de la topología relativa de A son todas de la forma $G = A \setminus (A \cap U) = A \cap (X \setminus U) = A \cap F$, donde U es un abierto de X y su complemento $F = X \setminus U$ es un cerrado de X.

Por lo tanto, la clausura de B en la topología relativa de A es

$$\bigcap \{\, G : B \subseteq G,\ G \text{ cerrado en } A \,\} = \bigcap \{\, A \cap F : B \subseteq F,\ F \text{ cerrado en } X \,\} = A \cap \overline{B}. \qquad \square$$

► Para definir una topología apropiada sobre un producto cartesiano de espacios topológicos, se aprovecha el concepto de topología débil inducida por las proyecciones $(x_\alpha)_{\alpha \in J} \mapsto x_\beta$. Conviene examinar ese concepto primero en el caso de un producto cartesiano de dos espacios (lo cual, por repetición de factores, se extiende al caso de un producto de un número finito de espacios).

Definición 1.45. Sea $(X, \mathcal{U})$ y $(Y, \mathcal{V})$ dos espacios topológicos. La **topología del producto** sobre el producto cartesiano $X \times Y$ es la topología $\mathcal{T}$ con subbase $\{\, U \times V : U \in \mathcal{U},\ V \in \mathcal{V} \,\}$.

De hecho, esta subbase es una *base* para $\mathcal{T}$, en vista de la identidad

$$(U_1 \times V_1) \cap (U_2 \times V_2) = (U_1 \cap U_2) \times (V_1 \cap V_2)$$

entre partes de $X \times Y$. Un abierto cualquiera de $\mathcal{T}$ es una unión de "rectángulos" $U \times V$, con $U \in \mathcal{U}$, $V \in \mathcal{V}$.

Hay dos aplicaciones evidentes $\mathrm{pr}_1 \colon X \times Y \to X$ y $\mathrm{pr}_2 \colon X \times Y \to Y$, dadas por

$$\mathrm{pr}_1(x,y) := x, \qquad \mathrm{pr}_2(x,y) := y.$$

Estas dos **proyecciones** son continuas para la topología del producto. En efecto, si U es un abierto en X y V es un abierto en Y, entonces $\mathrm{pr}_1^{-1}(U) = U \times Y$ y también $\mathrm{pr}_2^{-1}(V) = X \times V$ son abiertos (básicos) en $X \times Y$. De hecho, como

$$U \times V = (U \times Y) \cap (X \times V) = \mathrm{pr}_1^{-1}(U) \cap \mathrm{pr}_2^{-1}(V),$$

el rectángulo $U \times V$ es también un abierto básico para la topología débil inducida por las dos proyecciones pr_1, pr_2. Y viceversa: una subbase para dicha topología es la colección

$$\mathcal{S} := \{\, \mathrm{pr}_1^{-1}(U) : U \in \mathcal{U} \,\} \cup \{\, \mathrm{pr}_2^{-1}(V) : V \in \mathcal{V} \,\},$$

y la base correspondiente es formada por las intersecciones $U \times V$.

Al combinar esta observación con el Lema 1.40, se obtiene una “propiedad categórica” de la topología del producto.

Lema 1.46. *Si X, Y, Z son tres espacios topológicos y $X \times Y$ tiene la topología del producto, sean $f \colon Z \to X$ y $g \colon Z \to Y$ dos funciones continuas. Entonces hay una única función continua $h \colon Z \to X \times Y$ tal que* $\mathrm{pr}_1 \circ h = f$ *y* $\mathrm{pr}_2 \circ h = g$.

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "h"] \arrow[dr, "g"] & \\
X & X \times Y \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] & Y
\end{tikzcd}$$

Demostración. La unicidad es evidente, porque las fórmulas

$$f(z) = \mathrm{pr}_1(h(z)), \qquad g(z) = \mathrm{pr}_2(h(z))$$

conllevan la receta $h(z) := \big(f(z), g(z)\big)$.

La *continuidad* de h es una consecuencia del Lema 1.40, que en este caso dice que h es continua si y sólo si f y g son continuas. $\square$

Definición 1.47. Sean $\{\, (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha) : \alpha \in J \,\}$ una familia de espacios topológicos. La **topología del producto** sobre el producto cartesiano $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ es la topología débil inducida por todas las proyecciones $\mathrm{pr}_\beta : X \to X_\beta : (x_\alpha)_{\alpha \in J} \mapsto x_\beta$.

Una *subbase* para esta topología es la colección de partes de X de la forma $\mathrm{pr}_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ donde $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ para algún α. La *base* correspondiente consta de las intersecciones *finitas* de tales partes. Un abierto básico es entonces de la forma

$$U = \{\, x \in X : x_{\alpha_1} \in U_{\alpha_2},\ \dots,\ x_{\alpha_k} \in U_{\alpha_k} \,\}$$

para algún juego finito de índices $\{\alpha_1, \dots, \alpha_k\} \subseteq J$. Las coordenadas de $x \in U$ para las otras índices son arbitrarias; es decir, $\mathrm{pr}_{\alpha_1}(U) = U_{\alpha_1}$, $\dots$, $\mathrm{pr}_{\alpha_k}(U) = U_{\alpha_k}$ mientras $\mathrm{pr}_\alpha(U) = X_\alpha$ para $\alpha \neq \alpha_1, \dots, \alpha_k$. Dicho de otro modo, un abierto básico es de la forma $U = \prod_{\alpha \in J} U_\alpha$ donde $U_\alpha = X_\alpha$ salvo por un número finito de los índices α.

Definición 1.48. Dados dos conjuntos X, Y, la colección de funciones $Y^X := \{ f: X \to Y \}$ es un producto cartesiano, porque

$$Y^X \longleftrightarrow \prod_{x \in X} Y_x, \quad \text{donde} \quad Y_x = Y \text{ para todo } x \in X.$$

(El símbolo $\leftrightarrow$ significa que *hay una biyección* entre dos conjuntos.) En efecto, un elemento del producto cartesiano es una familia $f = (f_x)_{x \in X}$ con $f_x \in Y_x = Y$ para todo $x \in X$; al escribir $f(x)$ en lugar de f_x, se ve que f es simplemente una función de X en Y. Las proyecciones $\pi_x: Y^X \to Y$ sobre coordenadas son las *evaluaciones* $f \mapsto f(x)$ en los puntos de X. La topología del producto es entonces la topología más débil sobre Y^X tal que todas estas evaluaciones sean continuas; se llama la **topología de convergencia simple** sobre Y^X.

► Si R es una relación de equivalencia sobre un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$, el conjunto cociente X/R posee una topología apropiada.

Definición 1.49. Sea $q: X \to X/R : x \mapsto [x]$ la función sobreyectiva que lleva elementos a su clases de equivalencia. La **topología cociente** sobre X/R es $\mathcal{T}_q := \{ U \subseteq X/R : q^{-1}(U) \in \mathcal{T} \}$. (Recuérdese que la correspondencia $U \mapsto q^{-1}(U)$ respeta uniones e intersecciones.)

Por otro lado, si X, Y son dos espacios topológicos, una función sobreyectiva $p: X \to Y$ se llama una **aplicación cociente** si V es un abierto en Y *si y sólo si* $p^{-1}(V)$ es un abierto en X. (En particular, la función $q: (X, \mathcal{T}) \to (X/R, \mathcal{T}_q)$ es una aplicación cociente.)

Fíjese que una definición equivalente de una aplicación cociente $p: X \to Y$ es la siguiente: G es un cerrado en Y si y sólo si $p^{-1}(G)$ es un cerrado en X.

Ejemplo 1.50. El **círculo** $\mathbb{S}^1$ es el conjunto

$$\mathbb{S}^1 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \},$$

usando la identificación usual de $\mathbb{R}^2$ con $\mathbb{C}$. Como espacio topológico, $\mathbb{S}^1$ tiene la topología relativa de la inclusión $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$. La función $e: \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por

$$e(t) := e^{2\pi i t} \in \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}, \quad \text{para} \quad t \in \mathbb{R},$$

es una aplicación cociente. En efecto, una base para la topología de $\mathbb{S}^1$ es el juego de arcos abiertos $U_{\alpha\beta} := \{ e^{2\pi i \theta} : \alpha < \theta < \beta \}$ (con $0 < \beta - \alpha \leq 1$) cuyos preimágenes son uniones de intervalos abiertos: $e^{-1}(U_{\alpha\beta}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\alpha + n, \beta + n) \subset \mathbb{R}$. ◊

Definición 1.51. Sea $f: X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos. Dícese que f es una **aplicación abierta** si para cada abierto U en X, la imagen $f(U)$ es un abierto en Y.

Del mismo modo, una función $g: X \to Y$ es una **aplicación cerrada** si para cada cerrado F en X, la imagen $g(F)$ es un cerrado en Y.

Una aplicación continua y sobreyectiva $f\colon X \to Y$ que es (i) abierta; o bien (ii) cerrada; es una aplicación cociente. Sin embargo, estas tres nociones son distintas: hay aplicaciones abiertas que no son cerradas y viceversa; y hay aplicaciones cocientes que no son ni abiertas ni cerradas. (Para empezar, no todo abierto de X tendría que ser de la forma $f^{-1}(U)$ donde U es un abierto de Y.)

Ejemplo 1.52. El **plano proyectivo real** $\mathbb{RP}^2$ se define como el juego de rectas que pasan por el origen (es, decir, subespacios unidimensionales) de $\mathbb{R}^3$. Como cada recta de ese tipo corta la esfera

$$\mathbb{S}^2 := \{\, (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \,\}$$

en dos puntos antipodales, hay una biyección entre $\mathbb{RP}^2$ y el conjunto de tales pares antipodales. La partición de $\mathbb{S}^2$ en pares define una relación de equivalencia: $(x,y,z) \sim (-x,-y,-z)$; sea $[x:y:z] := q(x,y,z)$ la clase de equivalencia del punto (x,y,z). La topología cociente $\mathcal{T}_q$ hace de $\mathbb{RP}^2$ un espacio topológico y la aplicación cociente $q\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ es una aplicación abierta. $\Diamond$

Definición 1.53. Si X, Y son dos conjuntos tales que $X \cap Y = \emptyset$, su unión $X \cup Y$ es una *unión disjunta*, a veces denotado $X \uplus Y$.

Aun cuando dos conjuntos tengan intersección no vacía, es posible definir su unión disjunta mediante el siguiente artificio. Se identifica X con $X \times \{1\}$, Y con $Y \times \{2\}$ y se define

$$X \uplus Y := (X \times \{1\}) \cup (Y \times \{2\}).$$

De modo similar, se define la unión disjunta de cualquier familia de conjuntos $\{\, X_\alpha : \alpha \in J \,\}$ al identificar X_α con $X_\alpha \times \{\alpha\}$:

$$\biguplus_{\alpha \in J} X_\alpha := \bigcup_{\alpha \in J} (X_\alpha \times \{\alpha\}).$$

Es posible luego suprimir el segundo factor de estos productos cartesianos, para aliviar la notación.

Si cada X_α es un espacio topológico, se define una topología en $X = \biguplus_{\alpha \in J} X_\alpha$ al declarar que U es un abierto de X si y sólo si cada $U \cap X_\alpha$ es un abierto de X_α. (Por tanto, F es un cerrado de X si y sólo si cada $F \cap X_\alpha$ es un cerrado de X_α.)

Definición 1.54. Sean X, Y dos espacios topológicos disjuntos; sea $A \subseteq X$ una parte cerrada y sea $f\colon A \to Y$ una función continua. Defínase una relación de equivalencia sobre $X \uplus Y$ al declarar que $f(x) \sim x$ toda vez que $x \in A$. Las clases de equivalencia son de dos tipos:

- ⋆ $[x] = \{x\}$ si $x \in X \setminus A$;
- ⋆ $[y] = \{y\} \cup f^{-1}(y)$ si $y \in Y$.

El espacio cociente de $X \uplus Y$ bajo esta relación de equivalencia se denota por $X \cup_f Y$ y se llama la **adjunción de** X **a** Y **mediante** f. Queda dotado de la topología cociente.

Lema 1.55. *En las condiciones de la Definición 1.54, si* $q\colon X \uplus Y \to X \cup_f Y$ *es la aplicación cociente, entonces:*

(a) $q(Y)$ *es un cerrado en* $X \cup_f Y$ *y la restricción* $q|_Y : Y \to q(Y)$ *es un homeomorfismo;*

(b) $q(X \setminus A)$ *es un abierto en* $X \cup_f Y$ *y la restricción* $q|_{X\setminus A} : X \setminus A \to q(X \setminus A)$ *es un homeomorfismo.*

Demostración. Ad (a): La restricción $q|_Y$ es una biyección continua de Y en $q(Y)$. En particular, $Y = q^{-1}(q(Y))$; como Y es cerrado en $X \uplus Y$ y q es una aplicación cociente, se concluye que $q(Y)$ es cerrado en $X \cup_f Y$.

Si F es cualquier cerrado en Y, entonces F es cerrado en $X \uplus Y$ con $F = q^{-1}(q(F))$. Entonces $q(F)$ es cerrado en $X \cup_f Y$; luego $q(F)$ también es cerrado en la topología relativa de $q(Y)$. Se ha comprobado que la biyección continua $q|_Y$ es una aplicación cerrada, así que su función inversa es continua: $q|_Y$ es un homeomorfismo.

Ad (b): La restricción $q|_{X\setminus A}$ es una biyección continua de $X \setminus A$ en su imagen. En particular, $X \setminus A = q^{-1}(q(X \setminus A))$; como $X \setminus A$ es abierto en $X \uplus Y$ y q es una aplicación cociente, se concluye que $q(X \setminus A)$ es abierto en $X \cup_f Y$.

Si U es cualquier abierto en $X \setminus A$, entonces U es abierto en $X \uplus Y$ con $U = q^{-1}(q(U))$. Entonces $q(U)$ es abierto en $X \cup_f Y$; luego $q(U)$ también es abierto en la topología relativa de $q(X \setminus A)$. Se ha comprobado que la biyección continua $q|_{X\setminus A}$ es una aplicación abierta, así que su función inversa es continua: $q|_{X\setminus A}$ es un homeomorfismo. $\square$

Definición 1.56. Si $f\colon X \to Y$ es una función continua, el **cilindro de** f es el espacio topológico Z_f definido como sigue. Si $I = [0,1]$, se identifica $X \leftrightarrow X \times \{1\}$ como subespacio cerrado de $X \times I$; entonces $Z_f := (X \times I) \cup_f Y$.

En más detalle: $X \times \{1\}$ es un cerrado en $X \times I$; la aplicación continua $(x,1) \mapsto f(x)$ lleva $X \times \{1\}$ en Y; y se forma la adjunción de $X \times I$ a Y mediante esta aplicación.

El Lema 1.55 dice entonces que tanto X como Y se identifican con subespacios cerrados de Z_f mediante $x \mapsto q(x,0)$ y respectivamente $y \mapsto q(y)$.

1.5 Sucesiones, redes y convergencia

Para funciones continuas entre espacios métricos, hay una caracterización de continuidad que es muy práctico y útil: una función es continua si lleva sucesiones convergentes en sucesiones convergentes. Para espacios topológicos cuya topología no viene de una métrica, hay que cambiar esta condición, al introducir una generalización del concepto de sucesión.

Lema 1.57. *Sean (X,ρ) y (Y,σ) dos espacios métricos. Una función $f\colon X \to Y$ es continua en $x \in X$ si y sólo si para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$\rho(x,x') < \delta \implies \sigma(f(x), f(x')) < \varepsilon.$$

Demostración. Ad $(\Rightarrow)$: Como f es continua en x, si $\varepsilon > 0$ el conjunto $f^{-1}\bigl(B_\sigma(f(x);\varepsilon)\bigr)$ es un vecindario abierto de x; luego hay un radio $\delta > 0$ tal que la bola abierta $B_\rho(x;\delta)$ cumple $x \in B_\rho(x;\delta) \subseteq f^{-1}\bigl(B_\sigma(f(x);\varepsilon)\bigr)$. Luego $f\bigl(B_\rho(x;\delta)\bigr) \subseteq B_\sigma(f(x);\varepsilon)$.

Ad $(\Leftarrow)$: Si V es un abierto en Y, hay que mostrar que $f^{-1}(V)$ es un abierto en X. Si $x \in f^{-1}(V)$, entonces $f(x) \in V$; por tanto, hay un radio ε tal que $B_\sigma(f(x);\varepsilon) \subseteq V$. La condición dada entonces dice que hay $\delta > 0$ tal que $f\bigl(B_\rho(x;\delta)\bigr) \subseteq B_\sigma(f(x);\varepsilon)$. Entonces $x \in B_\rho(x;\delta) \subseteq f^{-1}(V)$, es decir, $f^{-1}(V)$ es un vecindario de x. Se concluye que $f^{-1}(V)$ es un vecindario de cada uno de sus puntos, así que $f^{-1}(V)$ es un abierto. $\square$

Definición 1.58. En un espacio métrico (X,ρ) una sucesión (x_n) **converge** a un límite $x \in X$, escrito $x_n \to x$, si para cada $\varepsilon > 0$ hay $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies \rho(x_n, x) < \varepsilon$.

En un espacio topológico X cualquiera, dícese que una sucesión (x_n) converge a un límite $x \in X$ si para cada vecindario W de x hay $N = N(W) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N \implies x_n \in W$.

Lema 1.59. *Sea (X,ρ) un espacio métrico y sea $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si hay una sucesión $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \to x$.*

Demostración. Si $x_n \to x$ con $x_n \in A$ para cada n, entonces cada abierto U con $x \in U$ incluye una bola $B_\rho(x;\varepsilon)$ para algún $\varepsilon > 0$, la cual contiene x_n para $n \geq N(\varepsilon)$; luego $U \cap A \neq \emptyset$. El Lema 1.24 muestra que $x \in \overline{A}$.

Inversamente, si $x \in \overline{A}$, entonces para cada $k \in \mathbb{N}$ la bola $B_\rho(x;1/k)$ no es disjunta de A: hay un punto $x_k \in B_\rho(x;1/k) \cap A$. Así, por inducción sobre k, se forma una sucesión (x_k) y cada para cada $\varepsilon > 0$ se ve que $\rho(x_k, x) < \varepsilon$ toda vez que $1/k < \varepsilon$; al tomar $N(\varepsilon) > 1/\varepsilon$, se obtiene la convergencia $x_k \to x$. $\square$

Lema 1.60. *Sea (X,ρ) un espacio métrico y Y un espacio topológico cualquiera. Una función $f\colon X \to Y$ es continua si y sólo si para cada sucesión convergente $x_n \to x$ en X, la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$ en Y.*

Demostración. Ad $(\Rightarrow)$: Si f es continua y si $x_n \to x$ en X, sea V un vecindario de $f(x)$ en Y. Entonces $f^{-1}(V)$ es un vecindario de x en X, así que hay $N \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq N$ implica $x_n \in f^{-1}(V)$. Luego $f(x_n) \in V$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En otras palabras, $f(x_n) \to f(x)$ en Y.

Ad $(\Leftarrow)$: Si $A \subseteq X$ hay que mostrar que $f\bigl(\overline{A}\bigr) \subseteq \overline{f(A)}$. Si $x \in \overline{A}$, el Lema 1.59 muestra que hay una sucesión $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \to x$ en X. Por la hipótesis, se obtiene $f(x_n) \to f(x)$ en Y. Como $f(x_n) \in f(A)$, el mismo lema muestra que $f(x) \in \overline{f(A)}$, que es lo que había que comprobar. $\square$

► No todo espacio topológico es metrizable (es decir, homeomorfo a un espacio métrico). La primera de las condiciones que sigue es necesaria (aunque no suficiente) para que exista una métrica que determine la topología.

Definición 1.61. Un espacio topológico X satisface el **primer axioma de numerabilidad** si cada $x \in X$ posee una base de vecindarios numerable.

Dícese que X satisface el **segundo axioma de numerabilidad** si la topología $\mathcal{T}$ de X posee una base numerable.[10]

Dícese que X es **separable** si posee una parte densa que es numerable.

Cada espacio métrico cumple el primer axioma de numerabilidad; por ejemplo, las bolas abiertas de radios racionales forman una base de vecindarios en cada punto.

Es evidente que el segundo axioma implica el primero: si $\mathcal{B}$ es una base numerable de $\mathcal{T}$, el conjunto $\mathcal{B}_x := \{ B \in \mathcal{B} : x \in B \}$ es una base numerable de vecindarios de cada $x \in X$.

Un espacio topológico X que cumple el segundo axioma de numerabilidad es separable. En efecto, si $K \subseteq \mathbb{N}$ y si $\mathcal{B} = \{ B_k : k \in K \}$ es una base para su topología, elíjase un punto $x_k \in B_k$ para cada k. Entonces la parte numerable $A = \{ x_k : k \in K \}$ es denso en X, porque el único abierto disjunto de A es $\emptyset$, así que el único cerrado que incluye A es X, de modo que $\overline{A} = X$.

El primer axioma no implica el segundo. Por ejemplo, la recta $\mathbb{R}$ con la topología discreta satisface el primer axioma trivialmente, pero no cumple el segundo, ya que $\mathbb{R}$ no es numerable.

Al examinar la demostración del Lema 1.59, se ve que la propiedad esencial de espacios métricos empleada allí fue el primer axioma de numerabilidad. Esto permite generalizar los dos lemas anteriores como sigue.

Lema 1.59′. Sea X un espacio topológico que satisface el primer axioma de numerabilidad; sea $A \subseteq X$ y $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si hay una sucesión $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \to x$. ⊟

Lema 1.60′. Sea X, Y dos espacios topológicos donde X satisface el primer axioma de numerabilidad. Una función $f : X \to Y$ es continua si y sólo si para cada sucesión convergente $x_n \to x$ en X, la sucesión $f(x_n)$ converge a $f(x)$ en Y. ⊟

Ejemplo 1.62. Sea X un conjunto no numerable. Amén de la topología discreta $\mathcal{T}_d$, X posee una **topología conumerable** $\mathcal{T}_{cn}$ cuyos cerrados son X mismo y todas las partes numerables de X. Es evidente que $\mathcal{T}_{cn} \neq \mathcal{T}_d$ y que la función identidad $1_X : (X, \mathcal{T}_d) \to (X, \mathcal{T}_{cn})$ es continua pero no es un homeomorfismo.

[10] Estos dos axiomas de numerabilidad fueron introducidos por Hausdorff en su libro de 1914. No parece haber términos sinónimos de un solo vocablo. Los textos en inglés usan la terminología *first-countable spaces*, resp. *second-countable spaces*, para denotar los espacios topológicos que cumplen estos dos axiomas de numerabilidad.

Una sucesión convergente $x_n \to x$ en $(X, \mathcal{T}_d)$ debe ser *eventualmente constante* (esto es, hay $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = x$ para todo $n \geq N$) porque $\{x\}$ es un vecindario abierto de x.

Además, una sucesión convergente $x_n \to x$ en $(X, \mathcal{T}_{cn})$ debe ser eventualmente constante también, porque de no ser así habría un índice $n_k \geq k$, para cada $k \in \mathbb{N}$, con $x_{n_k} \neq x$; entonces $X \setminus \{x_{n_k} : k \in \mathbb{N}\}$ sería un vecindario abierto de x que no incluye cola alguna de la sucesión.

Luego $\mathcal{T}_d$ y $\mathcal{T}_{cn}$ son dos topologías diferentes sobre X que poseen las mismas sucesiones convergentes. [Del Lema 1.59′ se concluye que $(X, \mathcal{T}_{cn})$ no satisface el primer axioma de numerabilidad.] ◊

Hace falta, entonces, generalizar el concepto de sucesión para obtener algún resultado análogo al Lema 1.60′, aplicable a espacios topológicos cualesquiera. Esta idea es la *convergencia por redes* (o convergencia generalizada de Moore y Smith).[11]

Definición 1.63. Una **red** en un espacio topológico X, indexada por un *conjunto dirigido* J, es una función $x\colon J \to X$, usualmente escrito con la notación $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$.

Sea $A \subseteq X$. Dícese que la red (x_α) está **eventualmente en** A si hay un índice $\alpha \in J$ tal que $\beta \geq \alpha \implies x_\beta \in A$. La red (x_α) **converge** a un **punto límite** $x \in X$, escrito $x_\alpha \to x$, si está eventualmente en cualquier vecindario de x, es decir: para todo $V \in \mathcal{V}_x$ hay $\alpha \in J$ tal que $\beta \geq \alpha \implies x_\beta \in V$.

Dícese que una red (x_α) está **frecuentemente en** A si para todo $\alpha \in J$ hay algún $\gamma \geq \alpha$ tal que $x_\gamma \in A$. Un punto $z \in X$ es un **punto adherente** de esta red si (x_α) está frecuentemente en cualquier vecindario de z, es decir: para todo $W \in \mathcal{V}_z$ y $\alpha \in J$, hay $\gamma \geq \alpha$ tal que $x_\gamma \in W$.

Definición 1.64. Si J es un conjunto dirigido, dícese que una parte $I \subseteq J$ es **cofinal** en J si para todo $\alpha \in J$, existe $\gamma \in I$ con $\alpha \leq \gamma$. (En consecuencia, I también es un conjunto dirigido, con el orden parcial heredada de J.)

Una **subred** de una red $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ está dada por un conjunto dirigido K y una función $\varphi\colon K \to J$ tal que $\beta \leq \beta' \implies \varphi(\beta) \leq \varphi(\beta')$ y tal que $\varphi(K)$ sea cofinal en J. Al escribir $y_\beta := x_{\varphi(\beta)}$, esta subred se denota por $(y_\beta)_{\beta\in K}$.

Si $x_\alpha \to x$ en X y si (y_β) es una subred de (x_α), entonces $y_\beta \to x$ también. En efecto, si V es un vecindario de X y si $x_\gamma \in V$ para $\gamma \geq \alpha$, existe $\beta \in K$ tal que $\varphi(\beta) \geq \lambda$, de modo que $\delta \geq \beta$ en K implica que $\varphi(\delta) \geq \varphi(\beta) \geq \alpha$ y por ende $y_\delta \in V$ para $\delta \geq \beta$. En otras palabras, un punto límite para (x_α) es también un punto límite para cualquier subred de (x_α).

Si I es cofinal en J, la inclusión $\iota\colon I \hookrightarrow J$ sirve para tener $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ como subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$.

Dada una subred $(z_\gamma)_{\gamma\in L}$ de la subred $(y_\beta)_{\beta\in K}$ mediante $\psi\colon L \to K$, se ve que $(z_\gamma)_{\gamma\in L}$ es una subred de $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$ mediante la aplicación compuesta $\varphi\circ\psi\colon L \to J$.

[11] Las redes fueron introducidas en: Eliakim H. Moore y Herman L. Smith, *A general theory of limits*, American Journal of Mathematics **44** (1922), 102–121. Una noción de convergencia equivalente es la idea de un **filtro**, desarrollado en: Henri Cartan, *Théorie des filtres*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **205** (1937), 595–598. La convergencia por filtros fue adoptada por la escuela de Bourbaki en su tratamiento de la topología general.

Ejemplo 1.65. Una **partición marcada** (P,T) de un intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ consta de dos conjuntos de números reales $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y $T = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ tales que:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b; \quad \text{y} \quad x_{i-1} \leq t_i \leq x_i \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Otra partición (Q,S) con $Q = \{y_0, y_1, y_2, \dots, y_m\}$ se llama un **refinamiento** de (P,T), escrito $(Q,S) \succeq (P,T)$ o bien $(P,T) \preceq (Q,S)$, si $m \geq n$ y $P \subseteq Q$. Así se define un orden parcial sobre la totalidad de particiones marcadas $\mathcal{P}_{[a,b]}$. Una tercera partición marcada (R,U) es un refinamiento común de (P,T) y (Q,S) si $P \cup Q \subseteq R$. Es evidente que $\mathcal{P}_{[a,b]}$ es un conjunto dirigido.

Si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función cualquiera, se define una *red* en $\mathbb{R}$, indexada por $\mathcal{P}_{[a,b]}$, mediante

$$(P,T) \longmapsto S(f;P,T) := \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\,(x_i - x_{i-1}).$$

Dícese que f es *integrable en el sentido de Riemann* si esta red converge a algún $s \in \mathbb{R}$, en cuyo caso se escribe $s = \int_a^b f(t)\,dt$. $\Diamond$

Ejemplo 1.66. Una subred de una sucesión, por desgracia, no es necesariamente una subsucesión! Considérese un **torneo infinito** definido así: sea $K := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ con el orden parcial dado por $(m,2n) \leq (m+1,n)$ y $(m,2n+1) \leq (m+1,n)$, extendido por transitividad. (Figurativamente, en el turno número m los dos jugadores vecinos $2n$ y $2n+1$ compiten para el puesto número n en el turno siguiente.) Este K es un conjunto dirigido: cualquier par de jugadores se encontrarán eventualmente si no quedan eliminados. La función $\varphi\colon K \to \mathbb{N}$ dada por $\varphi(m,n) := m$ respeta los órdenes parciales (donde $\mathbb{N}$ tiene su orden simple usual) y es sobreyectiva, $\varphi(K) = \mathbb{N}$. Dada una sucesión $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ en un espacio topológico X, al colocar $y_{(m,n)} := x_m$ se obtiene una subred que no es una sucesión. $\Diamond$

Lema 1.67. *Sea X un espacio topológico, $A \subseteq X$ y sea $x \in X$. Entonces $x \in \overline{A}$ si y sólo si hay una red $(x_\alpha) \subseteq A$ tal que $x_\alpha \to x$ en X.*

Demostración. Si $x_\alpha \to x$ con $x_\alpha \in A$ para cada α, entonces vecindario V de x contiene x_β para $\beta \geq \alpha = \alpha(V)$; luego $V \cap A \neq \emptyset$. El Lema 1.24 muestra que $x \in \overline{A}$.

Inversamente, si $x \in \overline{A}$, considérese el conjunto dirigido $\mathcal{V}_x$ de todos los vecindarios de x, ordenado por inclusión inversa: $V \leq W$ si y sólo si $V \supseteq W$. Para cada $V \in \mathcal{V}_x$, elíjase un punto $x_V \in V \cap A$, lo cual es posible porque $x \in \overline{A}$, en vista del Lema 1.24. De este modo, se forma una red $(x_V) \subseteq A$, indexada por $\mathcal{V}_x$, y es evidente que esta red está eventualmente en cada vecindario de x. $\square$

Lema 1.68. *En un espacio topológico X, un elemento $x \in X$ es un punto adherente de una red (x_α) si y sólo si hay una subred (y_β) de (x_α) tal que $y_\beta \to x$ en X.*

Demostración. Ad $(\Rightarrow)$: Si x es un punto adherente de la red $(x_\alpha)_{\alpha\in J}$, defínase un conjunto dirigido $K := \{\, (\alpha,V) : \alpha \in J,\ V \in \mathcal{V}_x \text{ con } x_\alpha \in V \,\}$ con el orden parcial $(\alpha,V) \leq (\gamma,W)$ si $\alpha \leq \gamma$ y $V \supseteq W$. La función $\varphi\colon K \to J : (\alpha,V) \mapsto \alpha$ es creciente y sobreyectiva. Luego $y_{(\alpha,V)} := x_\alpha$ define una subred de (x_α).

Si U es un vecindario de x, hay $\alpha \in J$ tal que $x_\alpha \in U$, es decir, $y_{(\alpha,U)} \in U$. Si $(\beta,V) \geq (\alpha,U)$, entonces $y_{(\beta,V)} = x_\beta \in V$ y $V \subseteq U$, así que $y_{(\beta,V)} \in U$. Esto dice que la subred está eventualmente en U para todo $U \in \mathcal{V}_x$; en otras palabras, que $y_{(\alpha,V)} \to x$.

Ad $(\Leftarrow)$: Por otro lado, si hay una subred $(y_\gamma)_{\gamma\in L}$ de (x_α), definida mediante $\varphi\colon L \to J$, tal que $y_\gamma \to x$ en X, tómese $W \in \mathcal{V}_x$ y $\alpha \in J$. Como $\varphi(L)$ es cofinal en J, hay un índice $\beta \in L$ tal que $\varphi(\beta) \geq \alpha$; y como $y_\gamma \to x$, hay un índice $\delta \in L$ tal que $y_\gamma \in W$ para todo $\gamma \geq \delta$. Como L es un conjunto dirigido, existe $\varepsilon \in L$ tal que $\varepsilon \geq \beta$ y $\varepsilon \geq \delta$. Entonces $\varphi(\varepsilon) \geq \varphi(\beta) \geq \alpha$ mientras $x_{\varphi(\varepsilon)} = y_\varepsilon \in W$. Se ha comprobado que la red (x_α) está frecuentemente en W para todo $W \in \mathcal{V}_x$, así que x es un punto adherente de (x_α). □

Hay un caso importante en donde es posible reemplazar redes y subredes por sucesiones y subsucesiones, respectivamente, para usar la versión cotidiana de convergencia. Esto ocurre cuando el espacio topológico satisface el primer axioma de numerabilidad, como muestra el siguiente resultado.

Lema 1.69. *En un espacio X que satisface el primer axioma de numerabilidad, un elemento $x \in X$ es un punto adherente x de una* sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si y sólo si hay una* subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *tal que $x_{n_k} \to x$.*

Demostración. Ad $(\Leftarrow)$: Una subsucesión es un caso particular de una subred. Luego, si hay una subsucesión (x_{n_k}) de (x_n) tal que $x_{n_k} \to x$, entonces x es un punto adherente de (x_n), por el Lema 1.68.

Ad $(\Rightarrow)$: Sea x un punto adherente de la sucesión (x_n). Sea $\{\, V_k : k \in \mathbb{N} \,\}$ una base de vecindarios de x, donde (sin perder generalidad) $V_{k+1} \subseteq V_k$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Entonces hay un elemento $x_{n_0} \in V_0$, ya que la sucesión (x_n) está frecuentemente en V_0. Elíjase $n_1 > n_0$ tal que $x_{n_1} \in V_1$; e inductivamente, elíjase $n_k > n_{k-1}$ tal que $x_{n_k} \in V_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$. Si U es cualquier vecindario de x, existe $l \in \mathbb{N}$ tal que $V_l \subseteq U$, así que $x_{n_l} \in U$. Por lo tanto, se ve que $x_{n_k} \to x$. □

Lema 1.70. *Sea $f\colon X \to Y$ una función entre dos espacios topológicos. La función f es continua en $x \in X$* si y sólo si *$x_\alpha \to x$ en $X \implies f(x_\alpha) \to f(x)$ en Y.*

Demostración. Si f es continua en x y si $x_\alpha \to x$, sea V un vecindario de $f(x)$ en Y. Entonces $f^{-1}(V)$ es un vecindario de x y por ende hay un índice α tal que $\beta \geq \alpha \implies x_\beta \in f^{-1}(V)$. Esto significa que $f(x_\beta) \in V$ para $\beta \geq \alpha$, así que $(f(x_\alpha))_{\alpha\in J}$ es una red en Y que converge a $f(x)$.

Por otro lado, si f *no es* continua en x, hay un vecindario W de $f(x)$ tal que $f^{-1}(W)$ no es un vecindario de x. En cada vecindario U de x, entonces, debe haber un punto $x_U \in U$ tal que $f(x_U) \notin W$. De este modo, se ha encontrado una red (x_U), indexada por $\mathcal{V}_x$ con el orden de inclusión inversa, tal que $x_U \to x$ pero $f(x_U) \not\to f(x)$. $\square$

2 Conexidad, Compacidad y Separación

El capítulo anterior fue dedicado a los conceptos básicos de espacio topológico y las nociones fundamentales de continuidad y convergencia. En este capítulo se pasa revista a ciertas propiedades importantes cuya presencia (o ausencia) determina la naturaleza de un espacio topológico particular. Estas propiedades y sus implicaciones para las funciones continuas conducen a los teoremas básicos de la topología general.

2.1 Espacios conexos, componentes

Definición 2.1. Un espacio topológico X es **conexo** si X *no es* la unión de dos abiertos disjuntos no vacíos.

De lo contrario, dícese que X es **disconexo** si hay dos abiertos no vacíos $\emptyset \neq U \subset X$, $\emptyset \neq V \subset X$ tales que $U \cap V = \emptyset$ y $X = U \uplus V$.

Si existe una tal *desconexión* $\{U,V\}$ de X, entonces los abiertos $U = X \setminus V$ y $V = X \setminus U$ son también cerrados en X. Por tanto, X es conexo si y sólo si las únicas partes abiertas y cerradas son las partes triviales $\emptyset$ y X.

Ejemplo 2.2. Cualquier conjunto X con la *topología indiscreta* es un espacio topológico conexo.

En cambio, un conjunto X con la *topología discreta* es disconexo si $\#(X) > 1$, porque $\{x\}$ con $X \setminus \{x\}$ forman una desconexión, para cualquier $x \in X$. (Cuando una parte solitaria $\{y\}$ de un espacio topológico Y es abierta y cerrada, dícese que y es un **punto aislado** de Y.)

El *espacio de Sierpiński* $S = \{0,1\}$ del Ejemplo 1.11 es conexo, aunque su topología no es indiscreta: el único abierto que contiene 1 es S, así que no hay una desconexión de este espacio.

La *recta flechada* $\mathbb{R}_\ell$ es disconexo, porque cada subintervalo $[a,b)$ es abierto y cerrado a la vez.

El conjunto $\mathbb{Q}$ de los *números racionales*, como subespacio topológico de $\mathbb{R}$, es disconexo. Por ejemplo, $U := \{\, r \in \mathbb{Q} : r \leq 0 \text{ ó } r^2 < 2 \,\}$ y $V := \{\, s \in \mathbb{Q} : s > 0,\ s^2 > 2 \,\}$, un corte de Dedekind, es una desconexión de $\mathbb{Q}$. En efecto, $U = \mathbb{Q} \cap (-\infty, \sqrt{2})$ mientras $V = \mathbb{Q} \cap (\sqrt{2}, \infty)$ forman una partición no trivial de $\mathbb{Q}$ en dos abiertos no vacíos. ◊

Lema 2.3. *Un espacio topológico X es conexo si y sólo si las únicas funciones continuas $f : X \to \mathbf{2}$, donde $\mathbf{2} = \{0,1\}$ con la topología discreta, son las funciones constantes.*

Demostración. Sea $f : X \to \mathbf{2}$ una función continua. Como las partes $\{0\}$ y $\{1\}$ de $\mathbf{2}$ son abiertos y cerrados, sus preimágenes $U := f^{-1}(0)$ y $V := f^{-1}(1)$ son abiertos y cerrados en X. Es claro que $U \cap V = \emptyset$ y que $X = U \uplus V$.

Para que X sea conexo, sólo caben dos posibilidades: (a) que $U = X$, $V = \emptyset$, en cuyo caso f es la función constante de valor 0 —se escribe $f \equiv 0$; o bien (b) que $U = \emptyset$, $V = X$, en cuyo caso f es la función constante de valor 1 —se escribe $f \equiv 1$.

Por otro lado, si X es disconexo con una desconexión $\{U,V\}$ en dos abiertos no vacíos, la función $f\colon X \to \mathbf{2}$ dada por $f(x) := 0$ si $x \in U$; $f(x) := 1$ si $x \in V$; es continua y no es constante. □

Lema 2.4. *Si $X = \bigcup_{\alpha\in J} X_\alpha$ es una unión de una familia de partes conexas y si $\bigcap_{\alpha\in J} X_\alpha \neq \emptyset$, entonces X es conexo.*

Demostración. Existe un punto $z \in \bigcap_{\alpha\in J} X_\alpha$. Si $X = U \uplus V$ donde U y V son abiertos disjuntos en X, entonces $z \in U$ o bien $z \in V$; se puede suponer que $z \in U$.

Para cada $\alpha \in J$, las partes $X_\alpha \cap U$ y $X_\alpha \cap V$ son abiertos disjuntos en (la topología relativa de) X_α, con $z \in X_\alpha \cap U$. Como X_α es conexo, se concluye que $X_\alpha \cap V = \emptyset$. Como α es arbitraria, sigue que $V = X \cap V = \bigcup_{\alpha\in J}(X_\alpha \cap V) = \emptyset$. En consecuencia, X no posee desconexión alguna. □

Lema 2.5. *Si X es un espacio topológico, si $A \subseteq X$ es una parte conexa y si $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, entonces B es conexo.*

Demostración. Si $B = C \uplus D$ es una unión disjunta de dos partes abiertas en (la topología relativa de) B, entonces $A = (A \cap C) \uplus (A \cap D)$ donde tanto $A \cap C$ como $A \cap D$ son abiertos en A. Como A es conexo, sigue que $A \subseteq C$ o bien $A \subseteq D$; supóngase, sin perder generalidad, que $A \subseteq C$.

Entonces $\overline{A} \subseteq \overline{C}$ en X. Ahora bien, hay abiertos $U \subseteq X$ y $V \subseteq X$ tales que $C = U \cap B$, $D = V \cap B$. Como $C \cap D = \emptyset$, se ve que $C \subseteq (X \setminus V) \cap B$ y por ende $\overline{C} \subseteq X \setminus V$. Entonces $\overline{C} \cap D = (X \setminus V) \cap V = \emptyset$. Ahora, la hipótesis $B \subseteq \overline{A}$ implica que $B \cap D = \emptyset$. Se ha comprobado que B no posee desconexión alguna. □

Lema 2.6. *La imagen de un espacio conexo bajo una aplicación continua es también conexa.*

Demostración. Si $f\colon X \to Y$ es continua y sobreyectiva y si X es conexo, hay que mostrar que Y es conexo. Si $\{V,W\}$ fuera una desconexión de Y, entonces tanto $f^{-1}(V)$ como $f^{-1}(W)$ sería un abierto no vacío en X, habría $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(W) = f^{-1}(V \cap W) = \emptyset$ y además $f^{-1}(V) \cup f^{-1}(W) = f^{-1}(V \cup W) = f^{-1}(Y) = X$. Esto no es posible porque X es conexo. Luego Y no posee desconexión alguna. □

Lema 2.7. *El producto cartesiano de espacios topológicos $X = \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ es conexo si y sólo si cada factor X_α es conexo.*

Demostración. Ad $(\Rightarrow)$: Sea $\mathrm{pr}_\beta\colon X \to X_\beta$ la proyección canónica del producto cartesiano sobre uno de sus factores. La función π_β es continua, por la Definición 1.47 (de la topología del producto), y π_β es obviamente sobreyectiva. Si X es conexo, el Lema 2.6 muestra que X_β es conexo.

Ad $(\Leftarrow)$: En el caso particular donde $\#(J) = 2$ y $X = X_1 \times X_2$, supóngase que X_1 y X_2 son espacios conexos. Tómese un punto $(a,b) \in X_1 \times X_2$; entonces $X_1 \times \{b\}$ es un subespacio de X que es homeomorfo a X_1, y también $\{a\} \times X_2$ es un subespacio de X que es homeomorfo a X_2. Su unión

$$Y_{a,b} := (X_1 \times \{b\}) \cup (\{a\} \times X_2)$$

es conexo, por el Lema 2.4, ya que $(X_1 \times \{b\}) \cap (\{a\} \times X_2) = \{(a,b)\} \neq \emptyset$. De igual manera los espacios $Y_{a,c}$ son conexos, para cada $c \in X_2$. Ahora $X_1 \times X_2 = \bigcup_{c \in X_2} Y_{a,c}$ mientras $\bigcap_{c \in X_2} Y_{a,c} = \{a\} \times X_2 \neq \emptyset$, porque $(a,b) \in \{a\} \times X_2$. Al aplicar el Lema 2.4 de nuevo, se concluye que $X_1 \times X_2$ es conexo.

En el caso de que $\#(J) = n$ sea finito y $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$, con cada X_i conexo, resulta que X es conexo por inducción sobre n, al escribir $X = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$ y aplicar el caso de dos factores.

En el caso general de un producto cartesiano arbitrario $X = \prod_{\alpha \in J} X_\alpha$ con factores conexos, sea $\mathcal{F}$ la colección de todas las *partes finitas* de J. Sea $z = (z_\alpha)_{\alpha \in J} \in X$ un punto específico —que existe debido al axioma de elección. Para todo $S \in \mathcal{F}$, defínase

$$Y_S := \prod_{\alpha \in J} Z_\alpha, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} Z_\alpha = X_\alpha & \text{si } \alpha \in S, \\ Z_\alpha = \{z_\alpha\} & \text{si } \alpha \notin S. \end{cases}$$

Entonces $Y_S \approx \prod_{\alpha \in S} X_\alpha$ y por el caso anterior, Y_S es conexo. Como $\bigcap_{S \in \mathcal{F}} Y_S = \{z\} \neq \emptyset$, la unión $Y := \bigcup_{S \in \mathcal{F}} Y_S$ es conexo, por el Lema 2.4 una vez más.

Resulta que Y es *denso* en el producto cartesiano X. En efecto, para cada $x \in X$ y cada vecindario básico V de x, hay un juego finito de índices $T \in \mathcal{F}$ tal que $\mathrm{pr}_\beta(V) = X_\beta$ para todo $\beta \notin T$. Luego $V \cap Y_T \neq \emptyset$ y por ende $V \cap Y \neq \emptyset$. Resulta, entonces, que $x \in \overline{Y}$ para todo $x \in X$; es decir, $\overline{Y} = X$. Del Lema 2.5 se concluye que X es conexo. $\square$

Ejemplo 2.8. El espacio de todas las sucesiones reales $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, con la topología del producto, es conexo.[1]

Sea $I := [0,1]$ el intervalo cerrado $\{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\}$. El **cubo de Hilbert** $I^{\mathbb{N}}$, con la topología del producto, es conexo. Este es un subespacio de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, por supuesto.

El **cubo de Cantor** es el producto cartesiano $\mathbf{2}^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (el espacio de sucesiones binarias), donde todos los factores $\mathbf{2} = \{0,1\}$ tienen la topología discreta. La topología del cubo de Cantor no es discreta; pero este cubo es disconexo, porque sus factores son disconexos.

El **cubo de Alexandrov** es el producto cartesiano $S^{\mathbb{N}} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, donde en este caso los factores $S = \{0,1\}$ tienen la topología de Sierpiński. Este cubo es conexo porque todos sus factores son conexos. $\Diamond$

► Cada espacio topológico puede expresarse como una unión disjunta de espacios conexos, de manera única.

[1] Algunos autores escriben $\mathbb{R}^{\aleph_0} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, donde $\aleph_0$ denota la cardinalidad del conjunto $\mathbb{N}$, o bien de cualquier conjunto infinito pero numerable.

Definición 2.9. En un espacio topológico X, defínase una relación de equivalencia al declarar $x \sim y$ si hay una parte conexa $A \subseteq X$ tal que $x, y \in A$. [Si $x = y$, tómese $A = \{x\}$. Si $x \sim y$ y si $y \sim z$ con y, z en una parte conexa B, entonces $A \cap B \ni y$ y por tanto $A \cup B$ es conexo con $x, z \in A \cup B$.]

Las clases de equivalencia para esta relación son las[2] **componentes conexas** de X. Para cada $x \in X$, su componente conexa es $C_x = \bigcup\{ A \text{ conexo } : x \in A \}$, la cual es conexa por el Lema 2.4. Cada componente conexa es cerrada, por el Lema 2.5.

Las componentes conexas no necesariamente son abiertas. Por ejemplo, en la recta racional $\mathbb{Q}$ la componente conexa de cada punto r es el conjunto solitario $C_r = \{r\}$, cerrado pero no abierto.

Definición 2.10. Un **camino** en un espacio topológico X es una función continua $f : I \to X$, donde $I = [0,1]$. Si $x = f(0)$, $y = f(1)$, dícese que el camino f va del punto x al punto y.[3]

Hay otra relación de equivalencia en X que se obtiene al declarar $x \sim y$ si hay una camino en X de x a y. [La función constante $f(t) \equiv x$ muestra que $x \sim x$; el recorrido inverso $g(t) := f(1-t)$ muestra que $y \sim x$ cuando $x \sim y$; cuando $x \sim y$, $y \sim z$, es posible “encadenar” dos caminos para mostrar que $x \sim z$.]

Las clases de equivalencia de esta relación se llaman **componentes conexas por caminos** de X. Si hay un solo componente de este tipo, el espacio X es **conexo por caminos**.

Lema 2.11. *Las partes conexas de la recta $\mathbb{R}$ son los intervalos (abiertos, semiabiertos o cerrados; acotados o no acotados).*

Demostración. Considérese el intervalo cerrado $[a,b] \subset \mathbb{R}$, donde $a < b$. Si este intervalo fuera disconexo, habría dos partes *cerradas* no vacías F y G de $[a,b]$ tal que $F \cap G = \emptyset$ y $F \cup G = [a,b]$. Como $a \in F$ o bien $a \in G$, se puede suponer que $a \in F$.

Sea $c := \inf G = \inf\{ t : t \in G \}$. Como G es cerrado, se ve que $c \in G$ —por ejemplo, hay una sucesión $(t_n) \subseteq G$ tal que $t_n \downarrow c$. Entonces $c \notin F$, así que $c \neq a$. Si $a < t < c$, entonces $t < \inf G$, así que $t \notin G$, luego $t \in F$. De este modo, se ve que $[a,c) \subseteq F$. Como F es cerrado en $[a,b]$, se concluye que $[a,c] \subseteq F$ y por ende $c \in F \cap G$, contrario a hipótesis. Conclusión: el intervalo cerrado $[a,b]$ es conexo.

Si $a < b$, entonces $(a,b) = \bigcup\{ [a+\varepsilon, b-\varepsilon] : 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(b-a) \}$ mientras $\bigcap\{ [a+\varepsilon, b-\varepsilon] : 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}(b-a) \} = \{\frac{1}{2}(b-a)\} \neq \emptyset$. Luego (a,b) es conexo, por el Lema 2.4. De igual manera, los intervalos semiabiertos $[a,b) = \bigcup_\varepsilon [a, b-\varepsilon]$ y también $(a,b] = \bigcup_\varepsilon [a+\varepsilon, b]$ son conexos.

[2] El nombre adjetivo *componente*, que significa ingrediente o elemento de una cosa, es por lo general de género masculino; pero en matemáticas se adopta el género femenino por razones consuetudinarias.

[3] Obsérvese que se distingue el camino f de su **rastro** $f(I) \subseteq X$, porque hay que tomar en cuenta el orden del recorrido de los puntos en la imagen $f(I)$.

Los intervalos no acotados $[a,\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[a,a+n]$, $(-\infty,b] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[b-n,b]$, $(a,\infty) = \bigcup_{\varepsilon}[a+\varepsilon,\infty)$, $(-\infty,b) = \bigcup_{\varepsilon}(-\infty,b-\varepsilon]$ y la recta total $\mathbb{R} = (-\infty,\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-n,n]$ son también conexos, al usar el Lema 2.4 en cada caso.

Por otro lado, sea $A \subset \mathbb{R}$ una parte conexa, no vacía. Sea $a := \inf A$ y $b := \sup A$, donde se admite las posibilidades $a = -\infty$ y $b = \infty$. Para cualquier $t \in \mathbb{R}$ con $a < t < b$, defínase $U_t := A \cap (-\infty,t)$ y $V_t := A \cap (t,\infty)$. Si fuera $t \notin A$, entonces $\{U_t, V_t\}$ sería una desconexión de A, porque U_t y V_t son abiertos en A, disjuntos y no vacíos; como A es conexo, se concluye que $t \in A$. Esto muestra que A es un intervalo con extremos a y b. $\square$

Lema 2.12. *Un espacio topológico conexo por caminos es conexo. Pero un espacio conexo no necesariamente es conexo por caminos.*

Demostración. Sea X un espacio conexo por caminos. Si $x \in X$, entonces X es una unión de caminos con punto inicial X. De los Lemas 2.11 y 2.6, se ve que cada camino es conexo; y su intersección es el punto inicial común x. El Lema 2.4 muestra que X es conexo.

Hay que exhibir un contraejemplo: un espacio conexo que no es conexo por caminos. El grafo de la función real $g(t) := \operatorname{sen}(1/t)$ sirve para este propósito. Sea $G := \{\,(x,y) : y = \operatorname{sen}(1/x),\ 0 < x \leq 1\,\}$ una porción de ese grafo, y considérese su clausura $\overline{G} \subset \mathbb{R}^2$. Es evidente (y notorio) que $\overline{G} = G \cup \{\,(0,y) : -1 \leq y \leq 1\,\}$. El conjunto G es conexo, por el Lema 2.6, como imagen continua del intervalo $(0,1]$ en $\mathbb{R}$. Del Lema 2.5, su clausura $\overline{G}$ también es conexa.

Sin embargo, no hay camino en $\overline{G}$ que une $(0,0)$ con $(1/\pi,0)$. Si hubiera una aplicación continua $f\colon I \to \overline{G} \subset \mathbb{R}^2$, entonces las proyecciones $\mathrm{pr}_1 \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ y $\mathrm{pr}_1 \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ serían también continuas. Entonces $\mathrm{pr}_1 \circ f(t)$ toma los valores $1/(n+\frac{1}{2})\pi$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\mathrm{pr}_2 \circ f(t)$ toma los valores -1 y $+1$ infinitas veces cuando $0 \leq t < \delta$, contradiciendo su continuidad. $\square$

2.2 Espacios compactos

Un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ de la recta real $\mathbb{R}$ tiene una propiedad de suma importancia: cualquier función continua $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ alcanza un valor máximo en un punto $t_0 \in [a,b]$, es decir, existe t_0 tal que $f(t) \leq f(t_0)$ para $a \leq t \leq b$. Este no es el caso par un intervalo abierto; por ejemplo, la función $\mathrm{tg}\colon (-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ no tiene cota superior. Tampoco es el caso para un intervalo cerrado pero no acotado; la función $\exp\colon [0,\infty) \to \mathbb{R} : t \mapsto e^t$ no está acotada por arriba.

La propiedad abstracta del intervalo $[a,b]$ que es responsable, en última instancia, para el alcance del valor máximo, fue identificada por Émile Borel en 1895 y luego extendida por Henri Lebesgue: cada cubrimiento del intervalo $[a,b]$ por abiertos de $\mathbb{R}$ posee un subcubrimiento finito.[4]

[4]Borel lo mostró para cubrimientos numerables; Lebesgue observó que el cubrimiento dado puede tener

Definición 2.13. Una colección de partes $\mathcal{U} = \{ U_\alpha : \alpha \in J \}$ de un conjunto X se llama un **cubrimiento** de X si $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = X$. Si X es un espacio topológico y cada $U_\alpha \in \mathcal{U}$ es un abierto en X, dícese que $\mathcal{U}$ es un **cubrimiento abierto**.

Proposición 2.14. *Para un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *Todo cubrimiento abierto de X posee un subcubrimiento finito.*

(b) *En toda familia de cerrados en X con intersección vacía, hay una subfamilia finita cuya intersección es vacía.*

(c) *Cualquier red en X posee al menos un punto adherente.*

Demostración. Ad (a) $\Longrightarrow$ (b): Sea $\{ F_\alpha : \alpha \in J \}$ una familia de cerrados en X tal que $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha = \emptyset$. Al colocar $U_\alpha := X \setminus F_\alpha$, se obtiene una familia $\{U_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de abiertos tal que $\bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = X \setminus \bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha = X$, es decir, un cubrimiento abierto de X. Sea $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}\}$ un subcubrimiento finito. De $U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_m} = X$ se concluye que $F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_m} = \emptyset$.

Ad (b) $\Longrightarrow$ (a): Sea $\mathcal{U} = \{ U_\alpha : \alpha \in J \}$ un cubrimiento abierto de X. Al colocar $F_\alpha := X \setminus U_\alpha$, se obtiene una familia $\{F_\alpha\}_{\alpha \in J}$ de cerrados tal que $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha = X \setminus \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha = \emptyset$. Por hipótesis, hay una subfamilia finita $\{F_{\alpha_1}, \dots, F_{\alpha_m}\}$ tal que $F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_m} = \emptyset$; esto implica que $U_{\alpha_1} \cup \cdots \cup U_{\alpha_m} = X$, así que $\{U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_m}\}$ es un subcubrimiento finito.

Ad (b) $\Longrightarrow$ (c): Si $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ es una red en X, sea $B_\alpha := \{ x_\beta : \beta \geq \alpha \}$ la cola a partir de x_α, para cada $\alpha \in J$; y sea $F_\alpha := \overline{B}_\alpha$ su clausura. Para cada colección finita de índices $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ hay un índice γ en el conjunto dirigido J tal que $\gamma \geq \alpha_k$ para $k = 1, \dots, m$. Entonces $B_{\alpha_1} \cap \cdots \cap B_{\alpha_m} \supseteq B_\gamma$; al tomar clausuras, se obtiene $F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_m} \supseteq F_\gamma$; en particular, es $F_{\alpha_1} \cap \cdots \cap F_{\alpha_m} \neq \emptyset$. La hipótesis entonces implica que hay al menos un elemento z en $\bigcap_{\alpha \in J} F_\alpha$. Si V es un vecindario de z, entonces $z \in F_\alpha = \overline{B}_\alpha$ conlleva $V \cap B_\alpha \neq \emptyset$, para todo $\alpha \in J$; es decir, la red (x_α) está frecuentemente en V. Luego z es un punto adherente de (x_α).

Ad (c) $\Longrightarrow$ (b): Sea $\{ G_\alpha : \alpha \in J \}$ una familia de cerrados en X con $G_{\alpha_1} \cap \cdots \cap G_{\alpha_m} \neq \emptyset$ para toda subfamilia finita; hay que mostrar que $\bigcap_{\alpha \in J} G_\alpha \neq \emptyset$.

Sea $\mathcal{H}$ la familia de todas estas intersecciones finitas $G_{\alpha_1} \cap \cdots \cap G_{\alpha_m}$; este es un conjunto dirigido, ordenado por inclusión inversa: $H_1 \leq H_2$ significa que $H_1 \supseteq H_2$. Para cada $H \in \mathcal{H}$, elíjase in punto $y_H \in H$, lo cual es posible por hipótesis. Entonces $(y_H)_{H \in \mathcal{H}}$ es una red en X; sea z un punto adherente de esta red.

Si V es un vecindario de z y si $\alpha \in J$, hay un conjunto $H \in \mathcal{H}$ tal que $H \subseteq G_\alpha$ y $y_H \in V$, porque la red (y_H) está frecuentemente en V. En particular, $y_H \in V \cap H \subseteq V \cap G_\alpha$. Se ha comprobado que $V \cap G_\alpha \neq \emptyset$ para todo $V \in \mathcal{V}_z$, así que $z \in \overline{G}_\alpha$. Como cada G_α es cerrado, esto dice que $z \in G_\alpha$ para todo $\alpha \in J$, y por ende $z \in \bigcap_{\alpha \in J} G_\alpha$. $\square$

cualquier cantidad de abiertos.

Definición 2.15. Un espacio topológico H es **compacto** si todo cubrimiento abierto de X posee un subcubrimiento finito.

Las condiciones (b) y (c) de la Proposición 2.14 son definiciones alternativas de la compacidad de X.

En un espacio topológico X cualquiera, $A \subseteq X$ es una **parte compacta** si $(A, \mathcal{T}_A)$, con la topología relativa, es un espacio compacto.

Las tres condiciones equivalentes de la Proposición 2.14 reflejan tres enfoques históricos diferentes de elucidar el concepto de compacidad. Bourbaki llama la propiedad (a) el *axioma de Borel y Lebesgue*.[5]

Dícese que una familia de partes $\{C_\alpha : \alpha \in J\}$ de un conjunto X tiene la **propiedad de intersección finita** si $C_{\alpha_1} \cap \cdots \cap C_{\alpha_m} \neq \emptyset$ para cada juego finito de índices $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subseteq J$. La propiedad (b), o más bien su contrapositiva: *Cada familia de cerrados con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía*, es una alternativa útil.[6]

La propiedad (c) es una versión moderna de otro postulado que se llama la *propiedad de Bolzano y Weierstrass*, de que *cada sucesión tiene una subsucesión convergente*. Este postulado resultó inadecuado para los propósitos de la topología general y este defecto motivó la introducción de redes por Moore y Smith.[7]

Lema 2.16. *Sea X es un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces A es compacto si y sólo si cada cubrimiento de A por abiertos de X tiene una subfamilia finita que cubre A.*

Demostración. Ad$(\Rightarrow)$: Sea $\{U_\alpha : \alpha \in J\}$ una familia de abiertos de X con $A \subseteq \bigcup_{\alpha \in J} U_\alpha$. Entonces la familia $\{A \cap U_\alpha : \alpha \in J\}$ es un cubrimiento de A por abiertos en la topología relativa de A. Como A es compacto, hay un juego finito de índices $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ tales que $A = \bigcup_{k=1}^m (A \cap U_{\alpha_k})$ o, lo que es lo mismo, $A \subseteq \bigcup_{k=1}^m U_{\alpha_k}$.

Ad$(\Leftarrow)$: Sea $\mathcal{V} = \{V_\beta : \beta \in K\}$ un cubrimiento abierto de A. Para cada índice β, hay un abierto U_β de X tal que $V_\beta = A \cap U_\beta$, por la definición de la topología relativa de A.

[5] Borel mostró en 1895 que un cubrimiento abierto numerable del intervalo cerrado y acotado $[a,b] \subset \mathbb{R}$ tiene un subcubrimiento finito. Lebesgue observó en 1898 que no hace falta que el cubrimiento original sea numerable. En 1903, Borel comprobó esta propiedad para cualquier conjunto acotado y cerrado en $\mathbb{R}^n$. Su demostración sigue la de un teorema de Heine, quien en 1872 mostró que una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es uniformemente continua. Hoy en día, la compacidad de $[a,b]$, o de un cerrado acotado en $\mathbb{R}^n$, se conoce como el **teorema de Heine y Borel**. Las fuentes son: Eduard Heine, *Die Elemente der Functionenlehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **74** (1872), 172–188; Émile Borel, *Sur l'approximation des nombres par des nombres rationnels*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **136** (1903), 1054–1055.

[6] Esta propiedad fue señalada por Riesz, quien mostró que cada familia de cerrados acotados en $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de intersección finita tiene un punto común, en: Frigyes Riesz, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici in Roma **2** (1908), 18–24.

[7] Un espacio topológico X se llama *sucesionalmente compacto* si cada sucesión tiene una subsucesión convergente. Para espacios que cumplen el segundo axioma de numerabilidad y en donde los puntos son cerrados, esta noción es equivalente a la compacidad; en general, son dos conceptos distintos.

Obviamente $\bigcup_{\beta\in K} U_\beta \supseteq \bigcup_{\beta\in K} V_\beta = A$. Por hipótesis, hay una subfamilia finita $U_{\beta_1},\dots,U_{\beta_n}$ tal que $A \subseteq \bigcup_{l=1}^{n} U_{\beta_l}$. Entonces $\{V_{\beta_1},\dots,V_{\beta_n}\} \subseteq \mathcal{V}$ es un subcubrimiento finito de A. $\square$

Lema 2.17. *Si X es un espacio compacto y si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces F es también compacto.*

Demostración. Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de F, entonces $\mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ es un cubrimiento abierto de X. Sea $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U} \cup \{X \setminus F\}$ un subcubrimiento finito de X; entonces la familia finita $\mathcal{V} \setminus \{X \setminus F\} \subseteq \mathcal{U}$ cubre F. $\square$

Lema 2.18. *La imagen de un espacio compacto bajo una aplicación continua es también compacta.*

Demostración. Si $f : X \to Y$ es continua y sobreyectiva y si X es compacto, tómese un cubrimiento abierto $\{\, V_\alpha : \alpha \in J \,\}$ de Y. Entonces $\{\, f^{-1}(V_\alpha) : \alpha \in J \,\}$ es un cubrimiento abierto de X. Hay unos índices $\{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}$ tales que $f^{-1}(V_{\alpha_1}) \cup \cdots \cup f^{-1}(V_{\alpha_m}) = X$ y por tanto $V_{\alpha_1} \cup \cdots \cup V_{\alpha_m} = f(X) = Y$. Luego, Y es compacto. $\square$

► En su definición original de espacio topológico (por sistemas de vecindarios), Hausdorff postuló una propiedad más, que hasta ahora no ha sido utilizado, porque excluye algunos de los ejemplos anteriores (como la topología indiscreta si $\#(X) > 1$, y el espacio de Sierpiński).

Definición 2.19. Una espacio topológico X es un **espacio de Hausdorff** si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$ hay un vecindario U de x y un vecindario V de y tales que $U \cap V = \emptyset$.

Lema 2.20. *En un espacio de Hausdorff, cada parte finita es cerrada.*

Demostración. Basta mostrar que el conjunto solitario $\{x\}$ es un cerrado, para cada $x \in X$. Si $y \neq x$, hay vecindarios $U_y \in \mathcal{V}_x$, $V_y \in \mathcal{V}_y$ tales que $U_y \cap V_y = \emptyset$. Sin perder generalidad, se puede suponer que V_y es un abierto. Luego $V := \bigcup_{y\neq x} V_y$ es un abierto tal que $x \notin V$ pero $y \in V$ para cada $y \neq x$. Entonces $\{x\} = X \setminus V$ y por ende $\{x\}$ es un cerrado en X. $\square$

Corolario 2.21. *Un espacio de Hausdorff finito es discreto.* $\boxminus$

Lema 2.22. *Si X es un espacio de Hausdorff y si $K \subseteq X$ es compacto, entonces K es cerrado en X.*

Demostración. Hay que mostrar que $X \setminus K$ es un abierto en X.

Tómese un punto $y \in X \setminus K$. Para cada $x \in K$, hay vecindarios abiertos U_x de x, V_x de y tales que $U_x \cap V_x = \emptyset$. Entonces $\{\, U_x : x \in K \,\}$ cubre K con abiertos en X. Como K es compacto, el Lema 2.16 muestra que hay un juego finito de puntos $x_1,\dots,x_m \in K$ tales que $K \subseteq U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$.

El abierto $W_y := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_m}$ entonces cumple $y \in W_y$, $W_y \cap K = \emptyset$. El abierto $\bigcup_{y\notin K} W_y$ entonces coincide con $X \setminus K$, así que K es cerrado en X. $\square$

Corolario 2.23. *Si $K \subseteq X$ es compacto en un espacio de Hausdorff X y si $y \in X \setminus K$, entonces hay abiertos U, V en X tales que $K \subseteq U$, $y \in V$ y además $U \cap V = \emptyset$.*

Demostración. Tómese $U := U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}$ y $V := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_m}$ en la demostración del Lema 2.22. □

► Los Lemas 2.17 y 2.22 indican que los *espacios compactos y de Hausdorff* forman una buena categoría de espacios topológicos.[8] Por esta razón, algunos autores —como Bourbaki y la escuela francesa en general— llaman **cuasicompacto** a un espacio topológico que cumple las condiciones equivalentes de la Proposición 2.14 y reservan el vocablo *compacto* para un espacio *cuasicompacto y de Hausdorff*.[9] Este hábito es muy notable en los libros de geometría algebraica (donde los espacios topológicos más importantes no son de Hausdorff). Sin embargo, en estos apuntes se sigue la costumbre anglosajona de referirse a los espacios "compactos y de Hausdorff" para mayor exactitud.

Proposición 2.24. *Si $f : X \to Y$ es una biyección continua entre un espacio compacto X y un espacio de Hausdorff Y, entonces f es un homeomorfismo.*

Demostración. Como f es biyectiva, posee una función inversa $g : Y \to X$. Hay que mostrar que g es continua.

Si $K \subseteq X$ es cerrado, entonces K es compacto, por el Lema 2.17. Como f es continua, la imagen $f(K) \subseteq Y$ es compacto, por el Lema 2.18. Por ser Y de Hausdorff, el Lema 2.22 muestra que $f(K)$ es un cerrado en Y.

Ahora $f(K) = g^{-1}(K)$; se ha mostrado que $g^{-1}(K)$ es un cerrado de Y toda vez que K sea un cerrado de X. Por tanto, g es una función continua. □

Proposición 2.25 (Heine y Borel)**.** *Sea $a, b \in \mathbb{R}$; entonces el intervalo cerrado $[a, b]$ es compacto.*

Demostración. Hay dos casos triviales: si $a > b$, entonces $[a, b] := \{ t \in \mathbb{R} : a \leq t \leq b \}$ es vacío; si $a = b$, entonces $[a, a] = \{a\}$; y es evidente que un espacio finito es compacto. Supóngase, entonces, que $a < b$.

Dada un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{ U_\alpha : \alpha \in J \}$ del intervalo $[a, b]$, sea c el supremo de los $t \in [a, b]$ tales que el subintervalo $[a, t]$ está cubierto por un número finito de los U_α. Fíjese que el caso $t = a$ es un valor admisible de t, así que c existe y cumple $c \geq a$. De hecho, si $a \in U_\beta$, entonces hay $r > a$ tal que $[a, r) \subseteq U_\beta$, así que $c \geq r > a$.

Si fuera $c < b$, habría al menos un U_γ con $c \in U_\gamma$; como U_γ es un abierto en $[a, b]$ y vale $a < c < b$, se podría hallar $\varepsilon > 0$ tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \subseteq U_\gamma$. Pero en ese caso el intervalo

[8] En el capítulo siguiente habrá una discusión más detallada del término *categoría*. Por ahora, basta observar que se trata de estudiar una colección de espacios topológicos, junto con la familia de funciones continuas entre dos espacios de la colección.

[9] El libro de Engelking también adopta esta postura, aunque no usa el término "cuasicompacto".

$[a, c+\frac{1}{2}\varepsilon] = [a,c] \cup [c-\frac{1}{2}\varepsilon, c+\frac{1}{2}\varepsilon]$ estaría cubierto por un número finito de los U_α —los que cubren $[a,c]$, más U_γ. Esto contradiría la supremacía de c.

Se concluye que $c = b$; por lo tanto, $\mathcal{U}$ incluye un subcubrimiento finito de $[a,b]$. $\square$

Lema 2.26. *Si X, Y son dos espacios compactos, su producto cartesiano $X \times Y$ es también compacto.*

Demostración. Sea $\mathcal{W} = \{ W_\alpha : \alpha \in J \}$ un cubrimiento abierto de $X \times Y$.

Para todo $x \in X$, la *tajada* $\{x\} \times Y$ es homeomorfo a Y, porque la función $y \mapsto (x,y)$ es un inverso continuo para la proyección $\mathrm{pr}_2 \colon \{x\} \times Y \to Y$. Por tanto, la tajada $\{x\} \times Y$ es compacta. Por el Lema 2.16, hay una subfamilia finita $\{W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_m}\} \subseteq \mathcal{U}$ tal que $\{x\} \times Y \subseteq W_{\alpha_1} \cup \dots \cup W_{\alpha_m}$.

Considérese la familia de “rectángulos abiertos” $U \times V$ en $X \times Y$ tales que $U \times V \subseteq W_{\alpha_k}$ para algún k. Ellos cubren el compacto $\{x\} \times Y$, y por tanto poseen una subfamilia finita $\{ U_j \times V_j : j = 1, \dots, n \}$ que cubre $\{x\} \times Y$. Sea $O_x := U_1 \cap \dots \cap U_n$.

Entonces O_x es un vecindario abierto de x en X. Si $(z,y) \in O_x \times Y$, entonces $(x,y) \in U_j \times V_j$ para algún j, luego $y \in V_j$ y en consecuencia $(z,y) \in O_x \times V_j \subseteq U_j \times V_j \subseteq W_{\alpha_k}$ para algún k. Se ha mostrado que el *tubo* $O_x \times Y$ está cubierto por $\{W_{\alpha_1}, \dots, W_{\alpha_m}\}$.

La totalidad de los O_x forma un cubrimiento abierto del espacio compacto X. Luego hay una cantidad finita de puntos $x_1, \dots, x_r \in X$ tales que $X = O_{x_1} \cup \dots \cup O_{x_r}$. Para cada x_i hay una colección finita de elementos de $\mathcal{U}$ que cubre el tubo $O_{x_i} \times Y$; la unión de estas colecciones es la deseada subcubrimiento finito de $X \times Y$. $\square$

Proposición 2.27. *Cualquier cerrado acotado en $\mathbb{R}^n$ es compacto.*

Demostración. Si $K \subset \mathbb{R}^n$ es cerrado y acotado, entonces está incluido en un producto cartesiano de intervalos acotados y cerrados de $\mathbb{R}$. En otras palabras, hay $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, con $a_j \leq b_j$ para $j = 1, \dots, n$, tales que $K \subseteq \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$.

Cada intervalo $[a_j, b_j]$ es compacto, por la Proposición 2.25. El Lema 2.26 (repetido varias veces) muestra que el cuboide $\prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ es también compacto. Como K es una parte cerrada de este cuboide, el Lema 2.17 garantiza que K es compacto. $\square$

Lema 2.28. *Si X es un espacio compacto y si $f \colon X \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces $f(X)$ es acotado y la función f alcanza su máximo valor [respectivamente, su mínimo valor] en un punto de X.*

Demostración. La imagen $f(X)$ es una parte compacta de $\mathbb{R}$, por lo cual es cerrada y acotada.

Si $M = \sup f(X)$, entonces hay una sucesión $\{ f(x_n) : n \in \mathbb{N} \}$ en $f(X)$ tal que $f(x_n) \uparrow M$. Esto implica que $M \in \overline{f(X)} = f(X)$, así que hay $x \in X$ tal que $f(x) = M$. De igual manera, si $m = \inf f(X)$, se ve que $m \in \overline{f(X)} = f(X)$, así que hay $y \in X$ tal que $f(y) = m$. $\square$

2.3 Axiomas de separación

Hay muchos aspectos de espacios de los espacios topológicos que pueden enfocarse mediante variantes de la propiedad de Hausdorff: algunas veces más débiles, otras veces más fuertes. Hay una jerarquía de estos *axiomas de separación*, que hoy en día están catalogados por etiquetas T_k; la letra T viene de *Trennungsaxiome*.[10]

Definición 2.29. Un espacio topológico X es un **espacio T_0** si para cada par de puntos distintos $x,y \in X$, hay un vecindarios de uno de ellos que no contiene el otro.[11]

Un espacio topológico X es un **espacio T_1** si para cada par de puntos distintos $x,y \in X$, hay un vecindario V de x tal que $y \notin V$.

Ejemplo 2.30. Si X tiene la topología indiscreta y si $\#(X) \geq 2$, no es un espacio T_0.

El espacio de Sierpiński $S = \{0,1\}$ del Ejemplo 1.11 es un espacio T_0, porque sólo hay dos puntos distintos, 0 y 1, y hay un vecindario abierto $\{0\}$ de 0 que excluye 1. Sin embargo, el único vecindario de 1 es S, que no excluye 0: de ahí se ve que este espacio no es T_1. $\lozenge$

Lema 2.31. *Un espacio topológico es T_1 si y sólo si $\{x\}$ es cerrado para cada $x \in X$.*

Demostración. Si X es T_1 y si $x \in X$, cada $y \neq x$ posee un vecindario abierto U_y tal que $x \notin U_y$. La unión es estos vecindarios es el abierto $\bigcup_{y \neq x} U_y = X \setminus \{x\}$, así que $\{x\}$ es cerrado.

Por otro, si cada conjunto solitario $\{x\} \subseteq X$ es cerrado, entonces dados dos puntos $x \neq y$ en X, el conjunto $X \setminus \{y\}$ es un vecindario abierto de x que no contiene y. $\square$

Por un abuso de terminología, dícese que $x \in X$ es un **punto cerrado** de X si el conjunto $\{x\}$ es cerrado en X. El lema anterior entonces dice que *un espacio es T_1 si y sólo si todos sus puntos son cerrados*.

Ejemplo 2.32. Sea R un anillo conmutativo (con $1 \in R$) y sea $\operatorname{Spec}(R)$ la totalidad de *ideales primos* de R. Recuérdese que un ideal $P \subset R$ es *primo* si $P \neq R$ y si $ab \in P \implies a \in P$ o bien $b \in P$. Un ideal maximal es primo; el ideal nulo 0 es primo si R es un anillo entero (es decir, no contiene divisores de cero).[12]

En el caso $R = \mathbb{Z}$, cada ideal es principal, es decir, de la forma $(k) = \{\, nk : n \in \mathbb{Z} \,\}$ para algún $k \in \mathbb{N}$. El ideal (p) es primo si y sólo $p = 0$ o bien p es un número entero primo. Luego $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) = \{\, (p) : p \in \mathbb{N} \text{ primo} \,\} \cup \{0\}$.

La **topología de Zariski** sobre $\operatorname{Spec}(R)$ se define al declarar que los conjuntos cerrados son aquellos de la forma $V(S) = \{\, P \in \operatorname{Spec}(R) : P \supseteq S \,\}$ para alguna parte $S \subseteq R$. Fíjese que

[10] Del verbo alemán *trennen* = separar, luego *Trennung* = separación.

[11] Los espacios T_0 fueron introducidos por Kolmogorov; el libro de Bourbaki, que no usa la terminología T_k, los llama **espacios de Kolmogorov**. La propiedad T_1 aparece en un trabajo de Riesz, ya en 1907.

[12] Aquí se escribe 0 en vez de $\{0\}$ para el ideal nulo, bajo el convenio de que *cualquier elemento nulo se denota por* 0.

$V(R) = \emptyset$ porque cada P es un ideal propio; que $V(\{0\}) = \mathrm{Spec}(R)$; que $V(S_1) \cup V(S_2) = V(S_1 \cap S_2)$; y que $\bigcap_{\alpha \in J} V(S_\alpha) = V\big(\bigcup_{\alpha \in J} S_\alpha\big)$. Por lo tanto, los $V(S)$ son efectivamente los conjuntos cerrados para una topología sobre $\mathrm{Spec}(R)$.

Para que $V(S) = \{P\}$, es necesario y suficiente que el ideal primo P sea maximal. Luego los ideales maximales son exactamente los puntos cerrados de $\mathrm{Spec}(R)$. Obsérvese ahora que $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ no es un espacio T_1, porque el ideal nulo 0 no es un punto cerrado; este ideal se llama el **punto genérico** de $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$. Sin embargo, es fácil observar que $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ sí es un espacio T_0. $\Diamond$

Un *espacio de Hausdorff* (de la Definición 2.19) también se llama un **espacio** T_2. Por su definición (o bien por los Lemas 2.20 y 2.31), cada espacio T_2 es también un espacio T_1.

Ejemplo 2.33. Sea X un conjunto infinito, dotado de la **topología cofinita**, cuyos cerrados son las partes finitas de X amén de X mismo. Entonces X es un espacio T_1 porque sus puntos son cerrados, pero no es T_2, porque si U, V son abiertos de X con $y \notin U$ y $x \notin V$, entonces tanto U como V tiene complemento finito, así que $U \cap V$ es un conjunto infinito: en particular, U y V no son disjuntos. $\Diamond$

Ejemplo 2.34. Cada *espacio métrico* (X, ρ) es un espacio de Hausdorff. En efecto, si $x, y \in X$ son $x \neq y$, sea $\delta := \rho(x,y) > 0$. Las bolas abiertas $U = B_\rho(x; \frac{1}{2}\delta)$ y $V = B_\rho(y; \frac{1}{2}\delta)$ son vecindarios respectivos de x, y; son disjuntos, por causa de la desigualdad triangular. $\Diamond$

Lema 2.35. *Un subespacio de un espacio de Hausdorff es también de Hausdorff.*

Demostración. Sea X un espacio T_2 y sea $Y \subseteq X$. Para dos puntos distintos $y, z \in Y$, hay abiertos disjuntos U, V en X tales que $y \in U$, $z \in V$. Entonces $Y \cap U$, $Y \cap V$ son abiertos de la topología relativa de Y, con $y \in Y \cap U$, $z \in Y \cap V$; además,

$$(Y \cap U) \cap (Y \cap V) = Y \cap (U \cap V) = \emptyset. \qquad \square$$

► El resultado siguiente resalta la gran importancia de los espacios de Hausdorff en el análisis matemático.[13]

Lema 2.36. *Un espacio topológico es de Hausdorff si y sólo si cada red convergente tiene un único punto límite.*

Demostración. Si X es un espacio T_2, sea $(x_\alpha)_{\alpha \in J}$ una red convergente en X y sean x, y puntos límites de esa red. Dadas dos vecindarios abiertos $U \in \mathcal{V}_x$ y $V \in \mathcal{V}_y$, existen dos índices $\alpha, \beta \in J$ tal que $x_\gamma \in U$ para $\gamma \geq \alpha$ y $x_\delta \in V$ para $\delta \geq \beta$. Como J es un conjunto

[13] Debido al Lema 2.36 sobre la unicidad de límites, muchos autores, entre ellos Bourbaki y Engelking, adoptan la terminología que un espacio compacto debe ser T_2 (además de cumplir el axioma de Borel y Lebesgue).

dirigido, hay un elemento $\sigma \in J$ tal que $\sigma \geq \alpha$ y $\sigma \geq \beta$ a la vez; luego $x_\sigma \in U \cap V$, así que $U \cap V \neq \emptyset$. Como X es de Hausdorff, se concluye que $x = y$.

Por otro lado, si X es un espacio topológico que no es T_2, entonces hay dos puntos distintos $x, y \in X$ tales que $U \cap V \neq \emptyset$ para todo $U \in \mathcal{V}_x$ y todo $V \in \mathcal{V}_y$. Sea K la colección de todas estas intersecciones no vacías $U \cap V$; este K es un conjunto dirigido (por inclusión inversa). En cada caso, elíjase un punto $x_{U\cap V} \in U \cap V$; de esta manera se obtiene una red $(x_{U\cap V})$ con conjunto índice K. Evidentemente $x_{U\cap V} \in U$ y $x_{U\cap V} \in V$ también. La red está eventualmente en cualquier vecindario de x o bien de y, es decir, x, y son dos puntos límites distintos de esta red. $\square$

Corolario 2.37. *Un espacio topológico que satisface el primer axioma de numerabilidad es de Hausdorff si y sólo si cada sucesión convergente tiene un único punto límite.*

Ejemplo 2.38. Sea $X := \{0', 0''\} \cup (0, 1]$ el conjunto formado al reemplazar el extremo 0 del intervalo compacto $[0, 1]$ por dos puntos distintos $0'$ y $0''$.

Para definir una topología sobre X, se declaran bases de vecindarios $\mathcal{B}_t$ en cada $t \in X$. Sea $\mathcal{B}_1 := \{\, (1-\varepsilon, 1] : 0 < \varepsilon < 1 \,\}$. Si $0 < t < 1$, sea $\mathcal{B}_t := \{\, (t-\varepsilon, t+\varepsilon) : 0 < \varepsilon < \min(t, 1-t) \,\}$. En los dos extremos izquierdos, defínase $\mathcal{B}_{0'} := \{\, \{0'\} \cup (0, \varepsilon) : 0 < \varepsilon < 1 \,\}$ y $\mathcal{B}_{0''} := \{\, \{0''\} \cup (0, \varepsilon) : 0 < \varepsilon < 1 \,\}$. Entonces tanto $X \setminus \{0'\}$ como $X \setminus \{0''\}$ son homeomorfos al intervalo cerrado $[0, 1]$ con su topología como subespacio topológico de $\mathbb{R}$. Pero el espacio X no es T_2, porque la sucesión $(1/n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge tanto a $0'$ como a $0''$. $\Diamond$

► Las siguientes propiedades de separación refuerzan la propiedad de Hausdorff (separación de puntos por vecindarios disjuntos) al reemplazar uno de estos puntos, o ambos, por conjuntos cerrados. De este modo, se acerca más a los espacios típicos de la geometría diferencial.

Definición 2.39. Un espacio T_1 es **regular** (o un **espacio** T_3) si, para cada parte cerrada F y cada punto $x \notin F$, hay abiertos U, V tales que $x \in U$, $F \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Fíjese que un espacio T_3 es también T_2, porque los puntos de un espacio T_1 son cerrados.

Lema 2.40. *Un subespacio de un espacio regular es también regular.*

Demostración. Sea X un espacio T_2 y sea $Y \subseteq X$. Si $y \in Y$ y si $B \subset Y$ es cerrado en Y, con $y \notin B$, entonces $B = Y \cap \overline{B}$, donde $\overline{B}$ denota la clausura de B en X. Luego $y \notin \overline{B}$. Como X es regular, hay abiertos disjuntos U, V en X tales que $y \in U$, $\overline{B} \subseteq V$. Entonces $Y \cap U$, $Y \cap V$ son abiertos disjuntos de la topología relativa de Y, con $y \in Y \cap U$, $B \subseteq Y \cap V$. $\square$

Lema 2.41. *Un espacio topológico X es regular si y sólo si es T_1 y si, para cada $x \in X$ y cada vecindario abierto U de x, hay un vecindario abierto V de x tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demostración. Ad $(\Rightarrow)$: Si $U \in \mathcal{V}_x$ es un abierto, $X \setminus U$ es un cerrado con $x \notin (X \setminus U)$. Luego, como X es regular, hay abiertos V, W con $V \cap W = \emptyset$ tales que $x \in V$ y $(X \setminus U) \subseteq W$. Luego $x \in V \subseteq (X \setminus W) \subseteq U$. Como $X \setminus W$ es un cerrado que incluye V, es evidente que $\overline{V} \subseteq (X \setminus W) \subseteq U$.

Ad $(\Leftarrow)$: Si F es un cerrado en X con $x \notin F$, entonces $X \setminus F$ es un vecindario abierto de x. Luego hay un $V \in \mathcal{V}_x$ abierto con $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq (X \setminus F)$. Al tomar $W := X \setminus \overline{V}$, se obtiene un abierto W con $F \subseteq W$ y $V \cap W = \emptyset$. Por lo tanto, X es regular. □

Definición 2.42. Una espacio T_1 es **normal** (o un **espacio** T_4) si, para cada par de partes cerradas F y H con $F \cap H = \emptyset$, hay abiertos U, V tales que $F \subseteq U$, $H \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Fíjese que un espacio T_4 es también T_3, porque los puntos de un espacio T_1 son cerrados.[14]

Lema 2.43. *Un espacio topológico X es normal si y sólo si es T_1 y toda vez que hay un cerrado F y un abierto U con $F \subseteq U$, hay un abierto V tal que $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.*

Demostración. Si X es normal y si $F \subseteq U$ con F cerrado y U abierto en X, entonces F y $X \setminus U$ son cerrados disjuntos; luego hay abiertos disjuntos V, W con $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq (X \setminus W) \subseteq U$.

Inversamente, si F y H son cerrados disjuntos, entonces $F \subseteq (X \setminus H)$; por hipótesis, hay un abierto V con $F \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq (X \setminus H)$. Entonces V y $W := X \setminus \overline{V}$ son abiertos disjuntos que separan F y H. Por lo tanto, X es normal. □

Lema 2.44. *Un espacio compacto y T_2 es normal.*

Demostración. Sean F y H dos cerrados en un espacio compacto y de Hausdorff X con $F \cap H = \emptyset$. Entonces F y H son también compactos, por el Lema 2.17.

El Corolario 2.23 implica que X es un espacio regular. Concretamente, para todo $x \in F$, hay abiertos disjuntos U_x, V_x tales que $x \in U_x$ mientras $H \subseteq V_x$. Los abiertos $\{\, U_x : x \in F \,\}$ cubren la parte compacta F; por el Lema 2.16, hay un juego finito de puntos $x_1, \dots, x_m \in F$ tales que $F \subseteq \bigcup_{k=1}^m U_{x_k}$. Entonces los abiertos

$$U := U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_m}, \qquad V := V_{x_1} \cap \cdots \cap V_{x_m}$$

cumplen $F \subseteq U$, $H \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. □

[14] Algunos autores, como Kelley y Willard, omiten la condición T_1 de las definiciones de espacio regular y espacio normal. Entonces usan T_3 como sinónimo de “regular y T_1” y usan T_4 como sinónimo de “normal y T_1”, para mantener la jerarquía de los T_k. Como este hábito conduciría a una evidente pobreza de lenguaje, la mayoría de los autores, como también nosotros, subsumen la propiedad T_1 en la regularidad y la normalidad.

► Hasta ahora, la discusión de las propiedades de separación se ha mantenido en un nivel abstracto, tratando las propiedades generales de abiertos, cerrados y vecindarios de puntos. El siguiente resultado, que es un teorema fundamental de la topología a pesar de su designación como “lema”, caracteriza los espacios normales en términos de un espacio muy concreto: el intervalo compacto $[0,1]$ de la recta real.

Teorema 2.45 (Lema de Urysohn). *Si F y H son dos cerrados disjuntos no vacíos en un espacio normal X, entonces hay una función continua $g\colon X \to [0,1]$ tal que $g(F) = \{0\}$ y $g(H) = \{1\}$.*

Demostración. Para construir la función g, se definirá primero un juego de abiertos U_r, indexados por los números racionales diádicos

$$D := \{\, p/2^q : p,q \in \mathbb{N},\ p \leq 2^q \,\},$$

tales que $\overline{U}_r \subseteq U_s$ toda vez que $r < s$ en D.

Sea $U_1 := X \setminus H$; por hipótesis, U es abierto y $F \subseteq U$. Por el Lema 2.43, hay un abierto U_0 tal que $F \subseteq U_0 \subseteq \overline{U}_0 \subseteq U_1$.

Al aplicar el Lema 2.43 de nuevo, hay un abierto $U_{1/2}$ tal que $\overline{U}_0 \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U}_{1/2} \subseteq U_1$.

Con otras dos aplicaciones del lema, hay dos abiertos $U_{1/4}$ y $U_{3/4}$ tales que

$$\overline{U}_0 \subseteq U_{1/4} \subseteq \overline{U}_{1/4} \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U}_{1/2} \subseteq U_{3/4} \subseteq \overline{U}_{3/4} \subseteq U_1.$$

Se procede por inducción sobre $q \in \mathbb{N}$: si $p \in \mathbb{N}$ es impar con $p < 2^q$, se obtiene un abierto tal que

$$\overline{U}_{(p-1)/2^q} \subseteq U_{p/2^q} \subseteq \overline{U}_{p/2^q} \subseteq U_{(p+1)/2^q}\,.$$

Ahora defínase una función $g\colon X \to [0,1]$ por

$$g(x) := \inf\{\, s \in D : x \in U_s \,\} \quad \text{si} \quad x \in U_1; \qquad g(x) := 1 \quad \text{si} \quad x \notin U_1.$$

Está claro que $g(x) = 0$ si $x \in F$ y que $g(x) = 1$ si $x \in H$. Falta mostrar que g es una función *continua* sobre X.

Obsérvese que si $x \in \overline{U}_r$ para algún $r \in D$, entonces $x \in U_s$ para todo $s > r$, así que $g(x) \leq r$. Por otro lado, si $y \notin U_r$, entonces $y \notin U_s$ para todo $s < r$, así que $g(y) \geq r$.

Los intervalos semiabiertos $[0,t)$ y $(u,1]$, donde $t,u \in D$, forman una subbase para la topología de $[0,1]$. Para comprobar la continuidad de g, es suficiente verificar que la preimagen de cada uno de estos intervalos es un abierto en X. Fíjese que

$$g^{-1}\bigl([0,t)\bigr) = \{\, x \in X : g(x) < t \,\} = \bigcup_{r<t} U_r$$

es un abierto en X. Por otro lado,

$$g^{-1}\bigl([0,u]\bigr) = \{\, x \in X : g(x) \leq u \,\} = \bigcap_{r \geq u} \{\, x \in X : g(x) \leq r \,\} = \bigcap_{r \geq u} \overline{U}_r$$

es un cerrado en X; por tanto, $g^{-1}\bigl((u,1]\bigr) = X \setminus g^{-1}\bigl([0,u]\bigr)$ es un abierto en X. □

▶ Debido al Lema de Urysohn,[15] hay un axioma de separación intermedia entre T_3 y T_4, cuya definición requiere el uso de funciones continuas de X en $[0,1]$.

Definición 2.46. Una espacio T_1 es **completamente regular** (o un **espacio $T_{3\frac{1}{2}}$**, o bien un **espacio de Tijonov**) si, para cada parte cerrada F y cada punto $x \notin F$, hay una función continua $g\colon X \to [0,1]$ tal que $g(F) = \{0\}$ y $g(x) = 1$.

Un espacio normal es completamente regular, debido al Lema de Urysohn, porque cada $\{x\}$ es un cerrado en X, a partir del Lema 2.31. Por otro lado, un espacio completamente regular es también regular, porque $U := g^{-1}\big((\frac{1}{2},1]\big)$ y $V := g^{-1}\big([0,\frac{1}{2})\big)$ son abiertos disjuntos que separan x y F. De ahí la designación $T_{3\frac{1}{2}}$ (cuyo autor se desconoce) para esta clase intermedia de espacios entre los espacios T_3 y T_4.

▶ Hay una caracterización más de los espacios normales, conocido como el **teorema de extensión de Tietze**.[16]

Teorema 2.47 (Tietze)**.** *Sea X un espacio normal y F un subespacio cerrado. Cualquier función continua $g\colon F \to \mathbb{R}$ puede extenderse a una función continua $h\colon X \to \mathbb{R}$.*

Demostración. Dícese que una función $h\colon X \to \mathbb{R}$ *extiende* una función $g\colon F \to \mathbb{R}$ si $h(x) = g(x)$ para todo $x \in F$; en otras palabras, la restricción $h|_F$ coincide con g.

Como primer caso, supóngase que $g(F) \subseteq [-1,1]$; se construirá una función continua $h\colon X \to [-1,1]$ que extiende g.

Obsérvese que si una función continua $g_0\colon F \to \mathbb{R}$ cumple $g_0(y) \leq r$ para $y \in F$, entonces hay una función continua $h_0\colon X \to \mathbb{R}$ tal que:

$$|h_0(x)| \leq \frac{r}{3} \quad \text{para} \quad x \in X; \qquad |g_0(y) - h_0(y)| \leq \frac{2r}{3} \quad \text{para} \quad y \in F.$$

En efecto, como $A := g_0^{-1}\big([-r,-r/3]\big)$ y $B := g_0^{-1}\big([r/3,r]\big)$ son cerrados disjuntos en F y por ende[17] son cerrados disjuntos en X, entonces el Lema de Urysohn produce una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$. La función $h_0\colon X \to \mathbb{R}$ definida por

$$h_0(x) := \frac{2r}{3}\left(f(x) - \frac{1}{2}\right)$$

es continua y cumple las desigualdades mencionadas, al considerar los casos $y \in A$, $y \in B$, $y \in F \setminus (A \cup B)$ por separado.

[15] Este "lema" aparece en el artículo (póstumo, porque Urysohn murió ahogado cuando se fue a nadar en la costa atlántica francesa, en agosto de 1924): Pavel S. Urysohn, *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Mathematische Annalen **94** (1925), 262–295.

[16] Este teorema fue demostrado para espacios métricos en: Heinrich F. F. Tietze, *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **145** (1915), 9–14. La versión general, para espacios normales, fue observada por Urysohn en 1925, como corolario de su Lema.

[17] Este es el lugar en donde se aprovecha que F es cerrado en X.

Ahora se construirá la función deseada h por inducción. Tómese $r = 1$, $g_1 := g$, para obtener $h_1 : X \to \mathbb{R}$ continua con $|h_1(x)| \leq \frac{1}{3}$ para $x \in X$; $|g(y) - h_1(y)| \leq \frac{2}{3}$ para $y \in F$. En segundo lugar, tómese $r = \frac{2}{3}$ y $g_2 := g - h_1 : F \to \mathbb{R}$; se obtiene así una función continua $h_2 : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$|h_2(x)| \leq \frac{2}{9} \quad \text{para} \quad x \in X; \qquad |g(y) - h_1(y) - h_2(y)| \leq \frac{4}{9} \quad \text{para} \quad y \in F.$$

Inductivamente, al haber construido $h_1, \dots, h_n$, tómese $r = (\frac{2}{3})^n$, $g_{n+1} := g - h_1 - \cdots - h_n$, para luego obtener $h_{n+1} : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$|h_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{para} \quad x \in X; \qquad \left| g(y) - \sum_{k=1}^{n+1} h_k(y) \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{para} \quad y \in F.$$

Ahora defínase $h(x) := \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x) = \lim_{n\to\infty} s_n(x)$ para $x \in X$, donde las $s_n(x) := \sum_{k=1}^{n} h_k(x)$ son las sumas parciales. Esta serie converge en $\mathbb{R}$, por comparación con la serie geométrica $\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^k$, y además $|h(x)| \leq 1$. La convergencia de la serie es uniforme sobre X, porque

$$|h(x) - s_n(x)| \leq \sum_{k>n} |h_k(x)| \leq \frac{1}{3}\sum_{k>n}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0 \quad \text{como} \ \ n \to \infty.$$

La continuidad de la función h sigue, por el “argumento con $\varepsilon/3$” usual de la convergencia uniforme. Para $x \in F$, la desigualdad $|g(x) - s_n(x)| \leq (\frac{2}{3})^n$ implica que $s_n(x) \to g(x)$ como $n \to \infty$, así que $h(x) = g(x)$.

Es evidente que el caso anterior no cambia esencialmente si $g(F) \subseteq [a,b]$, donde $[a,b]$ es un intervalo compacto diferente de $[-1,1]$. La función $\phi(t) := \frac{1}{2}(b-a)t + \frac{1}{2}(b+a)$ es un homeomorfismo de $[-1,1]$ en $[a,b]$; la función continua $g \circ \phi : F \to [-1,1]$ se extiende a una función continua $h \circ \phi : X \to [-1,1]$, como ya se ha visto; entonces la función continua $h : X \to [a,b]$ es una extensión de g.

Por último, hay que considerar el caso en donde $g(F) \subseteq \mathbb{R}$ pero $g(F)$ no está incluida en un subintervalo compacto de $\mathbb{R}$. Como hay un homeomorfismo entre $(-1,1)$ y $\mathbb{R}$, se puede suponer que $g(F)$ está incluida en el intervalo *abierto* acotado $(-1,1)$. Hace falta que la extensión continua también tenga imagen en $(-1,1)$; la primera parte de la demostración sólo garantiza que hay una extensión continua h con $h(X) \subseteq [-1,1]$.

Sea $C := h^{-1}\big(\{-1,1\}\big)$, el cual es un cerrado en X. Como $g(F) \subseteq (-1,1)$, se ve que $C \cap F = \emptyset$. Si $C \neq \emptyset$, el Lema de Urysohn produce una función continua $k : X \to [0,1]$ tal que $k(C) = \{0\}$ y $k(F) = \{1\}$. Defínase $f : X \to [-1,1]$ por $f(y) := h(y)k(y)$. Entonces el producto puntual $f = hk$ es continua; $f(x) = h(x) = g(x)$ para $x \in F$; y además $f(z) = 0$ para $z \in C$, de modo que $f(X) \subseteq (-1,1)$. $\square$

2.4 Espacios localmente compactos

La recta real $\mathbb{R}$ y el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ (para $n \in \mathbb{N}^*$) no son compactos; pero poseen la siguiente propiedad de *compacidad local*.

Definición 2.48. Un espacio topológico X es **localmente compacto** si cada punto $x \in X$ posee un vecindario compacto.[18]

Ejemplo 2.49. La recta $\mathbb{R}$ es localmente compacto, porque si $t \in \mathbb{R}$ y $\varepsilon > 0$, entonces el intervalo $[t-\varepsilon, t+\varepsilon]$ es un vecindario compacto de X, por la Proposición 2.25.

De igual manera, el espacio vectorial finitodimensional $\mathbb{R}^n$ es localmente compacto: cada $x \in \mathbb{R}^n$ es el centro de una bola cerrada $\overline{B}(x;\varepsilon) := \{\, y \in \mathbb{R}^n : \|y-x\| \leq \varepsilon \,\}$, la cual es un vecindario compacto de x. $\Diamond$

Ejemplo 2.50. El cuerpo $\mathbb{Q}$ de números racionales, con la topología usual dada por la inclusión $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$, *no es* localmente compacto. Cualquier vecindario compacto de r en $\mathbb{Q}$ incluiría como parte cerrada un intervalo cerrado (entonces, también compacto) de la forma $\mathbb{Q} \cap [r-p, r+p]$, con $p \in \mathbb{Q}$. Si (q_α) fuera cualquier red en este intervalo que converge (en $\mathbb{R}$) a un número irracional t, entonces cada subred también convergiría a t; por tanto, esta red no tendría punto adherente alguno en $\mathbb{Q} \cap [r-p, r+p]$. Se concluye que ningún $r \in \mathbb{Q}$ tiene un vecindario compacto en $\mathbb{Q}$. $\Diamond$

Lema 2.51. *Si X es un espacio localmente compacto y si $F \subseteq X$ es cerrado, entonces F es también localmente compacto.*

Demostración. Si $x \in F$, sea K un vecindario compacto de x; entonces hay un abierto U en X tal que $x \in U \subseteq K$.

Luego $x \in F \cap U \subseteq F \cap K$, donde $F \cap U$ es un abierto en (la topología relativa de) F y $F \cap K$, por ser parte cerrada de K, es compacto. Entonces $F \cap K$ es un vecindario compacto de x en la topología relativa de F. $\square$

Lema 2.52. *Si X es un espacio compacto y T_2, y si $z \in X$, entonces $X \setminus \{z\}$ es un espacio localmente compacto y T_2.*

Demostración. Si $x \in X$ con $x \neq z$, hay que mostrar que x tiene un vecindario compacto que no contiene z. Como X es T_2, hay vecindarios abiertos U de x y W de z tales que $U \cap W = \emptyset$. Fíjese que $X \setminus W$ es un cerrado en X y por ende es compacto; como $x \in U \subseteq X \setminus W \subseteq X \setminus \{z\}$, este $X \setminus W$ es un vecindario compacto de x en $X \setminus \{z\}$. Luego, el espacio $X \setminus \{z\}$ es localmente compacto.

Además, $X \setminus \{z\}$ es un espacio de Hausdorff, en vista del Lema 2.35. $\square$

[18] Algunos autores dicen que X es localmente compacto si cada $x \in X$ tiene un vecindario V tal que $\overline{V}$ sea compacto. Pero en ese caso $\overline{V}$ es un vecindario compacto de x, así que las dos definiciones son equivalentes cuando X es de Hausdorff.

Lema 2.53. *Un espacio localmente compacto y T_2 es completamente regular.*

Demostración. Sea X un espacio localmente compacto y T_2, sea F un cerrado no vacío en X y sea $x \in X \setminus F$. Entonces hay un vecindario abierto V de x tal que $\overline{V}$ es compacto.

Sea $A := (\overline{V} \setminus V) \cup (\overline{V} \cap F)$; este es un cerrado en el espacio compacto $\overline{V}$, tal que $x \in \overline{V} \setminus A$. Como $\overline{V}$ es normal, por el Lema 2.44, el Lema de Urysohn proporciona una función continua $g\colon \overline{V} \to [0,1]$ tal que $g(x) = 1$ y $g(A) \subseteq \{0\}$. Defínase $h\colon X \setminus V \to [0,1]$ como la función cero, es decir, $h(y) := 0$ para todo $y \notin V$. Ahora $\overline{V} \cap (X \setminus V) = \overline{V} \setminus V \subseteq A$, así que las funciones continuas g y h coinciden sobre su dominio común. Entonces la función

$$f(z) := \begin{cases} g(z) & \text{si } z \in \overline{V}, \\ h(z) & \text{si } z \in X \setminus V, \end{cases}$$

está bien definida y es continua en cada punto $z \in X$, ya que $\overline{V} \cup (X \setminus V) = X$. Fíjese también que $F = (\overline{V} \cap F) \cup (F \setminus V) \subseteq A \cup (X \setminus V)$. De este modo, se ha construido una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(F) = \{0\}$. □

► El Lema 2.52 tiene un resultado inverso importante: cualquier espacio localmente compacto y T_2 es un subespacio de cierto espacio *compacto* y T_2 que contiene solamente un punto extra. Este es el ejemplo más sencillo de una *compactificación* de un espacio topológico no necesariamente compacto.

Definición 2.54. Sea $(Y, \mathcal{T})$ un espacio localmente compacto y T_2. Defínase $Y^+ := Y \uplus \{\omega\}$, dotado de la topología $\mathcal{T}^+ := \mathcal{T} \cup \mathcal{W}$, donde $W \in \mathcal{W}$ si y sólo si $\omega \in W \subseteq Y^+$ y $Y \setminus W$ es compacto en Y.

El espacio Y^+ se llama la **compactificación por un punto**, o bien la **compactificación de Alexandrov**, de Y.

Proposición 2.55. *El espacio Y^+ es compacto y T_2. Además, si Z un espacio compacto y T_2 tal que $Z = Y \uplus \{z_0\}$ para algún punto z_0, entonces la aplicación identidad $1_Y\colon Y \to Y$ se extiende a un homeomorfismo entre Y^+ y Z.*

Demostración. Fíjese primero que $\mathcal{T} \cup \mathcal{W}$ es una topología sobre Y^+. Es claro que $\emptyset \in \mathcal{T}$ y $Y^+ \in \mathcal{W}$. Si $U \in \mathcal{T}$ y $W \in \mathcal{W}$, entonces $U \cap W \in \mathcal{T}$ porque $Y \setminus (U \cap W) = (Y \setminus U) \cup (Y \setminus W)$ es un cerrado en Y. Además, es $U \cup W \in \mathcal{W}$ porque $Y \setminus (U \cup W) = (Y \setminus U) \cap (Y \setminus W)$ es un compacto en Y. Si $W, W' \in \mathcal{W}$, entonces $W \cap W' \in \mathcal{W}$ porque $Y \setminus (W \cap W') = (Y \setminus W) \cup (Y \setminus W')$ es un compacto en Y. Si $\{W_\alpha : \alpha \in J\} \subseteq \mathcal{W}$, entonces $\bigcup_{\alpha \in J} W_\alpha \in \mathcal{W}$ porque $Y \setminus \bigcup_{\alpha \in J} W_\alpha = \bigcap_{\alpha \in J} (Y \setminus W_\alpha)$ es un compacto en Y.

Ahora, sea $\{U_\beta : \beta \in K\}$ un cubrimiento abierto de Y^+. Entonces $\omega \in U_\gamma \in \mathcal{W}$ para algún índice γ. Los abiertos $Y \cap U_\beta \in \mathcal{T}$ cubren el compacto $Y \setminus U_\gamma$; por tanto, hay un número finito de índices $\beta_1, \dots, \beta_m$ tales que $Y \setminus U_\gamma \subseteq \bigcup_{k=1}^m (Y \setminus U_{\beta_k})$. Entonces $\{U_{\beta_1}, \dots, U_{\beta_m}, U_\gamma\}$ es un subcubrimiento finito de Y^+. Luego Y^+ es un espacio compacto.

Para ver que Y^+ es un espacio T_2, basta ver que cada punto $y \in Y$ está separado de ω por abiertos disjuntos. Sea V un vecindario abierto de y en Y con $\overline{V}$ compacto; entonces $W := Y^+ \setminus \overline{V} \in \mathcal{W}$ es un vecindario abierto de ω, con $V \cap W = \emptyset$.

Si Z es otro espacio compacto y T_2 de la forma $Z = Y \uplus \{z_0\}$, la aplicación identidad 1_Y se extiende a una biyección $\phi \colon Y^+ \to Z$ al colocar $\phi(\omega) := z_0$, necesariamente. Si V es un abierto en Z, entonces $z_0 \in V$ o bien $z_0 \notin V$. Si $z_0 \notin V$, entonces V es abierto en $Y = Z \setminus \{z_0\}$, así que $\phi^{-1}(V) = V \in \mathcal{T}$. En cambio, si $z_0 \in V$, entonces $Y \setminus V = Z \setminus V$ es un subespacio cerrado del espacio compacto Z y como tal, $Y \setminus V$ es compacto. Ahora $\omega \in f^{-1}(V)$ y además

$$Y \setminus f^{-1}(V) = Y^+ \setminus f^{-1}(V) = f^{-1}(Z \setminus V) = f^{-1}(Y \setminus V) = Y \setminus V$$

es compacto en Y, así que $f^{-1}(V) \in \mathcal{W}$. En ambos casos, la preimagen $f^{-1}(V)$ es un abierto en Y^+; se ha establecido que la biyección $f \colon Y^+ \to Z$ es continua. Como Y^+ es compacto y Z es T_2, la Proposición 2.24 muestra que f es un homeomorfismo. □

Si X es un espacio compacto y T_2, entonces en $X^+ = X \uplus \{\omega\}$, el nuevo elemento ω es un **punto aislado**, es decir, el conjunto solitario $\{\omega\}$ es un abierto (y también un cerrado) en X^+. En efecto, en este caso, $X \setminus \{\omega\} = X$ es compacto, así que $\{\omega\} \in \mathcal{W}$ en la notación de la Definición 2.54.

Si Y es un espacio localmente compacto y T_2 que no es compacto, entonces cada vecindario abierto de ω en Y^+ es de la forma $W \in \mathcal{W}$ donde $Y \cap W$ no es vacío. En otras palabras, es $\omega \in \overline{Y}$ en este caso. Por lo tanto, $\overline{Y} = Y^+$, es decir, el subespacio no compacto Y es *denso* en Y^+.

Ejemplo 2.56. En el caso de la recta real $\mathbb{R}$, con su topología usual, el punto extra se denota por el símbolo ∞. La compactificación de Alexandrov de $\mathbb{R}$ se denota por $\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \uplus \{\infty\}$. Una base de vecindarios de ∞ está dada por los $W_n := \{\infty\} \uplus \{\, t \in \mathbb{R} : |t| > n \,\}$, para $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\mathbb{S}^1 := \{\, z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \,\}$ el círculo unitario en el plano complejo. Hay homeomorfismos entre $\mathbb{R}$, el intervalo abierto $(-1, 1)$, y el conjunto $\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$, visto como subespacio topológico de $\mathbb{S}^1$. El segundo de estos homeomorfismos está dado por la función $\varphi(t) := e^{\pi i t}$. La segunda parte de la Proposición 2.55 entonces implica que el homeomorfismo $\mathbb{R} \approx (\mathbb{S}^1 \setminus \{-1\})$ se extiende a un homeomorfismo $\mathbb{R}_\infty \approx \mathbb{S}^1$. Dicho de modo más informal, *el círculo* $\mathbb{S}^1$ *es la compactificación por un punto de la recta* $\mathbb{R}$. ◊

► Hay una forma alternativa de enfocar la compactificación de Alexandrov de Y, en términos de funciones continuas sobre Y. Si X es un espacio compacto y T_2, entonces X es normal y cada función continua $f \colon X \to \mathbb{R}$ es acotada, por el Lema 2.28. En cambio, si Y es localmente compacto y T_2, entonces sólo puede afirmarse que Y es completamente regular y puede tener funciones no acotadas $g \colon Y \to \mathbb{R}$. Aun así, hay un juego importante de funciones continuas acotadas sobre Y, dadas por la definición siguiente.

Definición 2.57. Sea X un espacio topológico, $f\colon X \to \mathbb{R}$ una función continua.[19] Dícese que f **se anula en el infinito** si para todo $\varepsilon > 0$, hay una parte compacta $K_\varepsilon \subseteq X$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \notin K_\varepsilon$.

La totalidad $C_0(X,\mathbb{R})$ de funciones reales continuas sobre X que se anulan en el infinito es una subálgebra de $C(X,\mathbb{R})$. Cada $f \in C_0(X,\mathbb{R})$ es acotada, porque

$$\sup_{x\in X} |f(x)| \leq \max\Bigl\{\varepsilon, \sup_{x\in K_\varepsilon} |f(x)|\Bigr\} \quad \text{para todo} \quad \varepsilon > 0.$$

Lema 2.58. *Si Y es un espacio localmente compacto y T_2, sea $Y^+ = Y \uplus \{\omega\}$ su compactificación por un punto y escríbase $N_\omega(Y^+,\mathbb{R}) := \{\, f \in C(Y^+,\mathbb{R}) : f(\omega) = 0\,\}$. Entonces $N_\omega(Y^+,\mathbb{R})$ es un ideal de $C(Y^+,\mathbb{R})$ y la restricción $f \mapsto f|_Y$ es un isomorfismo entre las álgebras $N_\omega(Y^+,\mathbb{R})$ y $C_0(Y,\mathbb{R})$.*

Demostración. Es evidente que $N_\omega(Y^+,\mathbb{R})$ es un ideal de $C(Y^+,\mathbb{R})$. En términos algebraicos, la evaluación $\varepsilon_\omega : f \mapsto f(\omega)$ es un homomorfismo lineal de $C(Y^+,\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}$, cuyo núcleo es el ideal $N_\omega(Y^+,\mathbb{R})$.

Si $f \in C(Y^+,\mathbb{R})$, su restricción $f|_Y$ es continua en cada punto de Y, así que $f|_Y : Y \to \mathbb{R}$ es continua. Si además $f(\omega) = 0$, entonces para cada $\varepsilon > 0$ la preimagen $W_\varepsilon := f^{-1}\bigl((-\varepsilon,\varepsilon)\bigr)$ es un vecindario abierto de ω, es decir, $W_\varepsilon \in \mathcal{W}$ en la notación de la Definición 2.54. Por lo tanto, el conjunto $K_\varepsilon := Y \setminus W_\varepsilon$ es compacto en Y, con $|f(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in Y \setminus K_\varepsilon$; se concluye que $f|_Y \in C_0(Y,\mathbb{R})$.

Es evidente que $f \mapsto f|_Y$ es un homomorfismo inyectivo. Para ver su sobreyectividad, sea $g \in C_0(Y,\mathbb{R})$; esta función sobre Y se extiende a una función $\tilde{g}\colon Y^+ \to \mathbb{R}$ al colocar $\tilde{g}(\omega) := 0$. Como g es continua en todo punto de Y, la extensión $\tilde{g}$ es continua si y sólo si es continua en el punto ω. Si $\varepsilon > 0$, sea $L_\varepsilon \subseteq Y$ una parte compacta tal que $|g(y)| < \varepsilon$ para todo $y \in Y \setminus L_\varepsilon$. Entonces $V_\varepsilon := (Y \setminus L_\varepsilon) \uplus \{\omega\}$ es un vecindario abierto de ω tal que $|\tilde{g}(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in V_\varepsilon$. Como $\varepsilon > 0$ es arbitrario, se concluye que $\tilde{g}$ es continua en ω, así que $\tilde{g} \in N_\omega(Y^+,\mathbb{R})$. Por su construcción, es inmediato que $\tilde{g}|_Y = g$. $\square$

2.5 Espacios paracompactos, particiones de la unidad

Los espacios localmente compactos no agotan el juego de espacios topológicos que son de utilidad en el análisis matemático. Hay espacios métricos que no son localmente compactos (el conjunto de números racionales $\mathbb{Q}$, por ejemplo). Para muchos propósitos del análisis, lo que se requiere es una propiedad topológica que permite reemplazar un cubrimiento arbitrario de abiertos por un cubrimiento que no necesariamente es finito, pero cubre un vecindario de cada punto finitamente.

[19] Esta definición también es aplicable, *mutatis mutandis*, a funciones complejas $f\colon X \to \mathbb{C}$.

Definición 2.59. Sea $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{2}^X$ un juego de partes de un espacio topológico X. Dícese que $\mathcal{A}$ es **localmente finito** si cada $x \in X$ posee un vecindario V tal que $\{A \in \mathcal{A} : V \cap A \neq \emptyset\}$ sea finito.

Lema 2.60. *Si $\mathcal{A} \subseteq \mathbf{2}^X$ es localmente finito, entonces $\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$.*

Demostración. Sea $Y := \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$. Claramente $\overline{A} \subseteq \overline{Y}$ para cada $A \in \mathcal{A}$, así que $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A} \subseteq \overline{Y}$.

Por otro lado, sea $z \in \overline{Y}$. Cada vecindario V de z tiene intersección con Y, pero solamente con un juego finito de miembros $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{A}$; sea $\mathcal{A}' := \mathcal{A} \setminus \{A_1, \dots, A_m\}$. Como V tiene intersección vacía con los miembros de $\mathcal{A}'$, entonces $z \notin \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A}$, por el Lema 1.24. De la igualdad

$$\overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A} = \overline{\bigcup_{A \in \mathcal{A}'} A} \cup \overline{A_1 \cup \cdots \cup A_m}$$

se concluye que $z \in \overline{\bigcup_{k=1}^m A_k} = \bigcup_{k=1}^m \overline{A}_k \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \overline{A}$. $\square$

Definición 2.61. Si $\mathcal{U}$ y $\mathcal{V}$ son dos cubrimientos de un espacio topológico X, dícese que $\mathcal{V}$ es un **refinamiento** de $\mathcal{U}$ si para cada $V \in \mathcal{V}$ hay un elemento $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \supseteq V$. Si cada $V \in \mathcal{V}$ es un abierto en X, entonces $\mathcal{V}$ es un *refinamiento abierto* de $\mathcal{U}$.

Un espacio topológico X es **paracompacto** si cada cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de X posee un refinamiento abierto, localmente finito.[20]

Lema 2.62. *Un espacio compacto es paracompacto.*

Demostración. Si X es compacto y $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X, entonces hay un subcubrimiento finito, el cual es evidentemente un refinamiento abierto que es localmente finito.

De hecho, si X es un espacio topológico en el cual cada cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ posee un refinamiento abierto *finito* $\mathcal{V}$, entonces X es compacto: si $\mathcal{V} = \{V_1, \dots, V_m\}$, elíjase $U_k \in \mathcal{U}$ tal que $U_k \supseteq V_k$ para $k = 1, \dots, m$; entonces $\{U_1, \dots, U_m\}$ es un subcubrimiento finito de $\mathcal{U}$, porque $U_1 \cup \cdots \cup U_m \supseteq V_1 \cup \cdots \cup V_m = X$. $\square$

Una proposición menos trivial, pero cierto, dice que *cualquier espacio métrico es paracompacto*.[21]

Lema 2.63. *Un espacio paracompacto y T_2 es normal.*

[20] El concepto de paracompacidad fue introducido en: Jean A. Dieudonné, *Une généralisation des espaces compacts*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **23** (1944), 65–76.

[21] Este es el **teorema de Stone**, que generaliza unos casos particulares probados por Dieudonné; fue demostrado en: Arthur H. Stone, *Paracompactness and product spaces*, Bulletin of the American Mathematical Society **54** (1948), 977–982. La demostración no es corta; para los detalles, véase cualquiera de los libros de Dugundji, Engelking, Munkres o Willard.

Demostración. Sea X un espacio paracompacto y de Hausdorff. En primer lugar, se demostrará que X es regular.

Sea F un cerrado en X y sea $x \in X \setminus F$. Para cada $y \in F$ hay un abierto U_y con $y \in U_y$ mientras $x \notin \overline{U}_y$, ya que X es de Hausdorff. Sea $\mathcal{U} := \{\, U_y : y \in F \,\} \cup \{X \setminus F\}$, el cual es un cubrimiento abierto de X. Sea $\mathcal{V}$ un refinamiento abierto localmente finito de $\mathcal{U}$.

La familia $\mathcal{W} = \{\, V \in \mathcal{V} : V \cap F \neq \emptyset \,\}$ es un cubrimiento de F por abiertos en X. Si $V \in \mathcal{W}$, entonces $V \subseteq U_y$ para algún $y \in F$ y por ende $\overline{V} \subseteq \overline{U}_y$; por lo tanto, $x \notin \overline{V}$. Si $W = \bigcup_{V \in \mathcal{W}} V$, entonces W es un abierto en X con $F \subset W$. El Lema 2.60 dice que $\overline{W} = \bigcup_{V \in \mathcal{W}} \overline{V}$ ya que $\mathcal{W}$ es localmente finito. Entonces $x \in X \setminus \overline{W}$ mientras $F \subseteq W$. Se concluye que el espacio X es regular.

Ahora si H es un cerrado en X con $F \cap H = \emptyset$, para cada $y \in F$ hay un abierto U'_y con $y \in U'_y \subseteq \overline{U}'_y \subseteq X \setminus H$, al aplicar el Lema 2.41 en el espacio regular X. La familia $\mathcal{U}' := \{\, U'_y : y \in F \,\} \cup \{X \setminus F\}$ es un cubrimiento abierto de X y como tal posee un refinamiento abierto localmente finito $\mathcal{V}'$. Los argumentos de la primera parte de la demostración, *mutatis mutandis*, producen un abierto W' tal que $F \subseteq W' \subseteq \overline{W}' \subseteq X \setminus H$. El Lema 2.43 muestra que X es normal. □

Definición 2.64. Sea $\mathcal{U} = \{\, U_\alpha : \alpha \in J \,\}$ un cubrimiento abierto de un espacio topológico X. Un **encogimiento** de $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto $\mathcal{V} = \{\, V_\alpha : \alpha \in J \,\}$, con el mismo conjunto índice, tal que $\overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$ para todo $\alpha \in J$.

Lema 2.65. *Si X es un espacio paracompacto y T_2, cualquier cubrimiento abierto de X posee un encogimiento localmente finito.*

Demostración. El espacio X es normal y en particular es regular, por el Lema 2.63. Si $\mathcal{U} = \{\, U_\alpha : \alpha \in J \,\}$ es un cubrimiento abierto de X, para cada $x \in X$ hay un U_α con $x \in U_\alpha$; por el Lema 2.41 hay un abierto $O_{x,\alpha}$ tal que $x \in O_{x,\alpha} \subseteq \overline{O}_{x,\alpha} \subseteq U_\alpha$. La totalidad de tales abiertos $O_{x,\alpha}$ forma un refinamiento abierto $\mathcal{O}$ de $\mathcal{U}$.

Como X es paracompacto, $\mathcal{O}$ posee un refinamiento abierto $\mathcal{W} = \{\, W_\beta : \beta \in K \,\}$ que es localmente finito . Para cada β tal que $W_\beta \subseteq O_{x,\alpha}$, vale $\overline{W}_\beta \subseteq \overline{O}_{x,\alpha}$ también. Entonces, para cada $\beta \in K$ se puede elegir un índice $\alpha =: \phi(\beta) \in J$ tal que $\overline{W}_\beta \subseteq U_{\phi(\beta)}$.

Sea $V_\alpha := \bigcup\{\, W_\beta : \phi(\beta) = \alpha \,\}$. Este V_α es un abierto en X; como $\mathcal{W}$ es localmente finito, el Lema 2.60 garantiza que $\overline{V}_\alpha = \bigcup_{\phi(\beta)=\alpha} \overline{W}_\beta$, así que $\overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$.

La familia $\mathcal{V} = \{\, V_\alpha : \alpha \in J \,\}$ cubre X porque $\mathcal{W}$ cubre X. Además, $\mathcal{V}$ es localmente finito: si $x \in X$ y si U es un vecindario abierto de x, hay índices $\beta_1, \dots, \beta_m$ tales que $U \cap W_\beta = \emptyset$ para $\beta \notin \{\beta_1, \dots, \beta_m\}$; luego $U \cap V_\alpha = \emptyset$ para $\alpha \notin \{\phi(\beta_1), \dots, \phi(\beta_m)\}$. □

► La utilidad de la noción de paracompacidad reside en la posibilidad de extender a todo el espacio ciertas funciones que se construyen inicialmente en vecindarios de ciertos puntos. Para efectuar dichas extensiones, hace falta expresar la función constante de valor 1 como una suma de funciones continuas que se anulan fuera de los vecindarios elegidos.

Definición 2.66. Si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función real sobre un espacio topológico x, el **soporte** de f es el conjunto cerrado

$$\operatorname{sop} f := \overline{\{ x : f(x) \neq 0 \}}.$$

Si la función f es continua, entonces $X \setminus \operatorname{sop}(f)$ es la unión de las partes abiertas de X en donde f se anula.

Sea $\mathcal{U} = \{ U_\alpha : \alpha \in J \}$ un cubrimiento abierto de X. Una **partición de la unidad** sobre X, **subordinado al cubrimiento** $\mathcal{U}$, es un juego de funciones continuas $\{ h_\alpha : X \to [0,1] : \alpha \in J \}$ tal que:

(a) $\operatorname{sop} h_\alpha \subseteq U_\alpha$ para todo $\alpha \in J$;

(b) la familia $\{ \operatorname{sop} h_\alpha : \alpha \in J \}$ es un cubrimiento localmente finito de X;

(c) $\sum_{\alpha \in J} h_\alpha(x) = 1$ para todo $x \in X$.

Obsérvese que, para cada $x \in X$, la condición (c) implica que $h_\alpha(x) \neq 0$ para algún índice α; y por la continuidad de h_α, el conjunto $\{ y \in X : h_\alpha(y) > 0 \}$ es un vecindario abierto de x. La condición (b) entonces dice que el número de tales índices α es finito, así que la suma $\sum_{\alpha \in J} h_\alpha(y)$ es una *suma finita* para y en un vecindario de x. Luego, la convergencia de la serie es automática, aun cuando el conjunto índice J sea infinito.

Proposición 2.67. *Si $\mathcal{U}$ es un cubrimiento abierto de X, un espacio paracompacto y T_2, hay una partición de la unidad sobre X subordinada a $\mathcal{U}$.*

Demostración. Aplíquese el Lema 2.65 dos veces, para obtener encogimientos localmente finitos $\mathcal{V} = \{ V_\alpha : \alpha \in J \}$ de $\mathcal{U}$ y luego $\mathcal{W} = \{ W_\alpha : \alpha \in J \}$ de $\mathcal{V}$, de tal modo que

$$\overline{W}_\alpha \subseteq V_\alpha \subseteq \overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha \quad \text{para cada} \quad \alpha \in J.$$

Como X es normal en vista del Lema 2.63, el Lema de Urysohn produce, para cada α, una función continua $g_\alpha : X \to [0,1]$ tal que $g_\alpha(\overline{W}_\alpha) = 1$ y $g_\alpha(X \setminus V_\alpha) = 0$.

Como $g_\alpha(x) > 0$ sólo si $x \in V_\alpha$, se obtiene $\operatorname{sop} g_\alpha \subseteq \overline{V}_\alpha \subseteq U_\alpha$. La familia $\{ \overline{V}_\alpha : \alpha \in J \}$ es localmente finito, porque cada abierto U tal que $U \cap \overline{V}_\alpha \neq \emptyset$ también cumple $U \cap V_\alpha \neq \emptyset$. Luego la familia $\{ \operatorname{sop} g_\alpha : \alpha \in J \}$ es localmente finito.

En particular, si $x \in X$ hay un vecindario U de x tal que la suma $\sum_{\alpha \in J} g_\alpha(y)$ es una suma finita de números positivos para $y \in U$. Por lo tanto, la suma $\sum_{\alpha \in J} g_\alpha$ es un función continua en x, con $\sum_{\alpha \in J} g_\alpha(x) > 0$. Como x es un punto arbitrario de X, la suma $g := \sum_{\alpha \in J} g_\alpha$ es un función *continua* sobre X, con $g(x) > 0$ para todo x. En consecuencia, se puede formar el cociente $h_\alpha(x) := g_\alpha(x)/g(x)$, para así obtener una familia $\{ h_\alpha : \alpha \in J \}$ de funciones continuas tales que $0 \leq h_\alpha(x) \leq 1$ para cada α y cada $x \in X$.

Fíjese que $h_\alpha(x) > 0$ si y sólo si $g_\alpha(x) > 0$; por ende, $\operatorname{sop} h_\alpha = \operatorname{sop} g_\alpha \subseteq U_\alpha$ para cada α. Además, $\sum_{\alpha \in J} h_\alpha(x) = \sum_{\alpha \in J} g_\alpha(x)/g(x) = 1$ para cada $x \in X$. Luego $\{ h_\alpha : \alpha \in J \}$ es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento $\mathcal{U}$. $\square$

2.6 El teorema de Tijonov

Históricamente, había que decidir entre diversas variantes del concepto de compacidad; por ejemplo, antes de la aceptación general de la noción de convergencia generalizada de Moore y Smith (por redes), algunos preferían la propiedad de que cualquier sucesión tuviera una subsucesión convergente (compacidad sucesional). Por otro lado, en la teoría de conjuntos había un debate acerca de la legitimidad del axioma de elección. Estas dos discusiones se acabaron con la demostración por Tijonov, en 1935, de un teorema[22] que elevó a primera plana el axioma de Borel y Lebesgue como la definición "correcta" de compacidad. Su formulación usa de modo esencial el axioma de elección; y de hecho, la veracidad de ese teorema es *equivalente* a dicho axioma.

Teorema 2.68 (Tijonov)**.** *Un producto cartesiano de una familia de espacios compactos es un espacio compacto.*

Demostración. Sea $\{ X_\alpha : \alpha \in J \}$ una familia cualquiera de espacios compactos (no vacíos). Obsérvese, en primer lugar, que si J es un conjunto no numerable, se requiere el axioma de elección para asegurar la *existencia* (como conjunto no vacío) del producto cartesiano $X := \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$.

Para mostrar que X es compacto, es suficiente (en vista de la Proposición 2.14) mostrar que cada colección $\mathcal{A}$ de partes cerradas de X con la propiedad de intersección finita tiene intersección no vacía.

Afirmación: hay una familia *maximal* $\mathcal{C}$ de partes de X con la propiedad de intersección finita, tal que $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$. Para la verificación, se aplica el Lema de Zorn[23] a la colección de familias en $\mathbf{2}^X$ que incluyen $\mathcal{A}$ y poseen la propiedad de intersección finita. Esta colección está parcialmente ordenada por inclusión; una subcolección $\{ \mathcal{B}_\beta : \beta \in K \}$ está linealmente ordenada si para cada par de índices α, β vale $\mathcal{B}_\alpha \subseteq \mathcal{B}_\beta$ o bien $\mathcal{B}_\beta \subseteq \mathcal{B}_\alpha$. Una "cota superior" para el orden de inclusión es la *unión* $\mathcal{B}_* := \bigcup_{\beta\in K} \mathcal{B}_\beta \supseteq \mathcal{A}$. Hay que comprobar que esta unión $\mathcal{B}_*$ también tiene la propiedad de intesección finita. En efecto, si $B_k \in \mathcal{B}_{\beta_k}$ para $k = 1,\dots,m$, se puede suponer (después de reordenar $\beta_1,\dots,\beta_m$ si fuera necesario) que $\mathcal{B}_{\beta_1} \subseteq \mathcal{B}_{\beta_2} \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{B}_{\beta_m}$; en cuyo caso se ve que $B_1,\dots,B_m \in \mathcal{B}_{\beta_m}$, así que $B_1 \cap \cdots \cap B_m \neq \emptyset$. Por lo tanto, el Lema de Zorn es aplicable y la existencia de la familia maximal $\mathcal{C}$ está asegurada.

Fíjese que, aunque cada $A \in \mathcal{A}$ sea cerrado, los miembros $C \in \mathcal{C}$ no son necesariamente cerrados; pero es cierto que $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} \overline{C} \subseteq \bigcap_{A\in\mathcal{A}} \overline{A} = \bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$. Para verificar que $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset$, es suficiente comprobar que $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} \overline{C} \neq \emptyset$.

[22]El artículo original que enunció el teorema fue: Andrei Nikolayevich Tijonov, *Ein Fixpunktsatz*, Mathematische Annalen **111** (1935), 767–776. Por un tiempo, el tipo de espacio contemplado en el teorema se llamó *bicompacto*, hasta que ese vocablo fue desplazado por el término *compacto*. Una demostración simplificada, en la cual la nuestra está basada, apareció en: Claude Chevalley y Orrin Frink Jr., *Bicompactness of Cartesian products*, Bulletin of the American Mathematical Society **47** (1941), 612–614.

[23]Aquí es donde se usa el axioma de elección, al cual el Lema de Zorn es equivalente.

La maximalidad de $\mathcal{C}$ garantiza que $\mathcal{C}$ tiene estas dos propiedades:

(a) si $C_1,\dots,C_r \in \mathcal{C}$, entonces $C_1 \cap \cdots \cap C_r \in \mathcal{C}$;

(b) si $B \subseteq X$ y si $B \cap C \neq \emptyset$ para todo $C \in \mathcal{C}$, entonces $B \in \mathcal{C}$.

De hecho, es cuestión de considerar las familias (a) $\mathcal{C} \cup \{C_1 \cap \cdots \cap C_r\}$; y (b) $\mathcal{C} \cup \{B\}$; las cuales incluyen $\mathcal{C}$ y tienen la propiedad de intersección finita.

Para cada $\alpha \in J$, la familia $\{\, \pi_\alpha(C) : C \in \mathcal{C} \,\}$ de partes de X_α tiene la propiedad de intersección finita. Como X_α es compacto, se concluye que $\bigcap_{C\in\mathcal{C}} \overline{\pi_\alpha(C)} \neq \emptyset$. Tómese un elemento $x_\alpha \in \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \overline{\pi_\alpha(C)}$ y considérese el punto del producto X con estas coordenadas: $x := (x_\alpha)_{\alpha\in J}$.

Para terminar la demostración, sólo hay que confirmar que $x \in \overline{C}$ para todo $C \in \mathcal{C}$. Si U_α es un vecindario de x_α en el espacio X_α, entonces $U_\alpha \cap \pi_\alpha(C) \neq \emptyset$, así que hay un punto $y \in C$ tal que $\pi_\alpha(y) \in U_\alpha$; luego $y \in \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \cap C$. Por la propiedad (b) anterior, se concluye que $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{C}$.

Ahora bien: por la definición de la topología del producto cartesiano, cada $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ es un elemento de una *subbase* para esta topología. Se ha mostrado que cada elemento de cierta subbase que contiene el punto x pertenece a la familia $\mathcal{C}$. La propiedad (a) anterior asegura que cada elemento V de cierta *base* de vecindarios de x cumple $V \cap C \neq \emptyset$ para todo $C \in \mathcal{C}$, así que $x \in \bigcap_{C\in\mathcal{C}} \overline{C}$, tal como había que mostrar. $\square$

Ejemplo 2.69. Denótese por $I := [0,1]$ el intervalo compacto estándar de la recta real. El **cubo de Tijonov** $I^{\mathbb{R}} = \prod_{t\in\mathbb{R}} I$ es un espacio compacto (y de Hausdorff), al igual que el *cubo de Hilbert* $I^{\mathbb{N}}$ y el *cubo de Cantor* $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ del Ejemplo 2.8. El *cubo de Alexandrov* $S^{\mathbb{N}}$ es compacto pero no es T_2. $\Diamond$

2.7 Espacios métricos completos

En esta subsección X será un espacio métrico, con la topología dada por una métrica ρ. Dado que, en general, hay muchas métricas "equivalentes" que inducen la misma topología, a veces se dice que X es un **espacio metrizable**, sin precisar una métrica específica.

Lema 2.70. *Un espacio topológico metrizable X es separable si y sólo si su topología tiene una base numerable.*

Demostración. Cualquier espacio topológico cuya topología tiene una base numerable (es decir, que satisface el segundo axioma de numerabilidad) es separable. En efecto, si $\mathcal{B} = \{\, B_k : k \in K \,\}$ es una base para su topología, donde $K \subseteq \mathbb{N}$, sea $A := \{\, x_k : k \in K \,\}$ donde $x_k \in B_k$ para cada k. Si $y \in X$, cada vecindario U de y incluye algún B_k, de modo que $U \cap A \neq \emptyset$; por tanto, $y \in \overline{A}$ para todo $y \in X$. Entonces A es numerable y denso en X, así que X es separable.

Inversamente, sea (X,ρ) un espacio métrico separable y sea $A = \{\, x_k : k \in K \,\}$, donde $K \subseteq \mathbb{N}$, una parte numerable densa de X. Para $k \in K$, $m \in \mathbb{N}$, sea $B_{km} := B_\rho(x_k; 1/m)$, una bola abierta en X. Si U es un abierto cualquiera en X, entonces $U \cap A \neq \emptyset$ porque A es denso en X; luego $x_k \in U$ para algún k. Entonces U es un vecindario de x_k, así que $B_{km} \subseteq U$ para algún m. Se concluye que la familia numerable de bolas $\{B_{km} : k \in K,\ m \in \mathbb{N}\}$ es una base para la topología métrica de X. □

Definición 2.71. Sea (X,ρ) un espacio métrico. Una parte $A \subseteq X$ se dice **acotada** si hay $x \in A$ y $M > 0$ tales que $\rho(x,y) < M$ para todo $y \in A$; dicho de otro modo, si hay $x \in A$ tal que $A \subseteq B_\rho(x;M)$ para algún $M > 0$.

Una parte $C \subseteq X$ se llama **totalmente acotada** (o bien **precompacta**) si para cada $\varepsilon > 0$ hay un juego finito de puntos $x_1,\dots,x_m \in B$ tales que $C \subseteq \bigcup_{k=1}^m B_\rho(x_k;\varepsilon)$.

► Un concepto importante que tiene sentido en cualquier espacio métrico, pero no en un espacio topológico en general,[24] es el de una *sucesión de Cauchy*. (Como un espacio métrico satisface el primer axioma de numerabilidad, no hace falta considerar "redes de Cauchy", en vista del Lema 1.69.) Varias propiedades esenciales de los espacios métricos pueden formularse en términos de las sucesiones de Cauchy.

Definición 2.72. Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un espacio métrico (X,ρ) es una **sucesión de Cauchy** si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $m,n \geq N \implies \rho(x_m,x_n) < \varepsilon$.

Fíjese que cualquier sucesión convergente es de Cauchy, como consecuencia de la desigualdad triangular.

El espacio métrico (X,ρ) es **completo** si cada sucesión de Cauchy en X es convergente. (Como X es de Hausdorff, el límite de sucesión es único.)

Obsérvese que si ρ,σ son dos métricas (métricamente) equivalentes sobre un espacio metrizable X, una sucesión en X es de Cauchy en (X,ρ) si y sólo si es de Cauchy en (X,σ).

Lema 2.73. *Una parte cerrada de un espacio métrico completo es también completa.*

Demostración. Sea (X,ρ) un espacio métrico completo y sea $A \subseteq X$ una parte cerrada. Si (x_n) es una sucesión de Cauchy en A, entonces tiene un límite $x \in X$ tal que $x_n \to x$. El Lema 1.67 muestra que $x \in \overline{A} = A$, así que (x_n) converge en el subespacio A. □

Lema 2.74. *Un espacio metrizable X está totalmente acotada si y sólo si cada sucesión en X posee una subsucesión de Cauchy.*

Demostración. Sea ρ una métrica sobre X que determina su topología.

Ad $(\Rightarrow)$: Si X está totalmente acotada, sea (x_n^0) una sucesión de elementos de X. Como X está cubierta por un número finito de bolas $B_\rho(y_i;1)$ de radio 1, al menos una de estas bolas

[24]Hay una clase de espacios topológicos no metrizables en donde cabe hablar de "redes de Cauchy": los que poseen una *estructura uniforme*. Para la teoría de dichas estructuras, véase los libros de Bourbaki, Engelking o Willard.

contiene una infinitud de los x_n^0; es decir, la sucesión está frecuentemente en una de estas bolas. Entonces hay una subsucesión (x_n^1) de (x_n^0) tal que $\rho(x_m^1, x_n^1) < 1$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Al cubrir X por un número finito de bolas de radio $\frac{1}{2}$, la sucesión (x_n^1) está frecuentemente en una de estas bolas. Luego hay una subsucesión (x_n^2) de (x_n^1) tal que $\rho(x_m^2, x_n^2) < \frac{1}{2}$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

Al continuar así por inducción, se obtiene para cada $k \in \mathbb{N}^*$ una subsucesión (x_n^k) de (x_n^{k-1}) tal que $\rho(x_m^k, x_n^k) < 1/k$ para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Defínase una nueva sucesión (y_n) al colocar $y_n := x_n^n$ para $n \in \mathbb{N}$. Es claro que (y_n) es una subsucesión de cada (x_n^k) y en particular de la sucesión original (x_n^0). También, esta (y_n) es una sucesión de Cauchy, porque si $\varepsilon > 0$ y $N > 1/\varepsilon$, entonces $\rho(y_r, y_s) < \varepsilon$ para $r, s \geq N$ porque y_r, y_s son elementos de la sucesión (x_n^N).

Ad $(\Leftarrow)$: Si X *no* está totalmente acotado, existe $\varepsilon > 0$ tal que X no puede cubrirse por un número finito de bolas de radio ε.

Defínase una sucesión (z_n) en X inductivamente, como sigue. Tómese $z_0 \in X$. Tómese $z_1 \in X \setminus B_\rho(z_0; \varepsilon)$. Tómese $z_2 \in X \setminus \bigl(B_\rho(z_0; \varepsilon) \cup B_\rho(z_1; \varepsilon)\bigr)$. Para $n \in \mathbb{N}$ en general, tómese $z_{n+1} \in X \setminus \bigcup_{k=0}^n B_\rho(z_k; \varepsilon)$. La sucesión (z_n) así formada es tal que $\rho(z_m, z_n) \geq \varepsilon$ para todo $m \neq n$; luego (z_n) es una sucesión en X que no posee subsucesión de Cauchy alguna. $\square$

Proposición 2.75. *Un espacio métrico es compacto si y sólo si es completo y totalmente acotado.*

Demostración. Un espacio métrico (X, ρ) satisface el primer axioma de numerabilidad. En vista de la Proposición 2.14 y del Lema 1.69, X es un espacio compacto si y sólo si cada sucesión en X tiene un punto adherente, si y sólo si cada sucesión en X tiene una subsucesión convergente.

Supóngase que X es compacto. Como una sucesión convergente es una sucesión de Cauchy para la métrica ρ, cada sucesión (x_n) en X tiene una subsucesión convergente $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que también es de Cauchy. Del Lema 2.74 se concluye que X está totalmente acotado.

Por otro lado, una sucesión de Cauchy (y_n) en X tiene una subsucesión convergente (y_{n_k}), por la compacidad de X; es decir, existe $y \in X$ tal que $y_{n_k} \to y$ conforme $k \to \infty$. Dado $\varepsilon > 0$, hay $K \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq K \implies \rho(y_{n_k}, y) < \frac{1}{2}\varepsilon$; además, hay $N \geq n_K$ tal que $m > N \implies \rho(y_m, y_{n_k}) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Luego $m > N \implies \rho(y_m, y) < \varepsilon$, así que $y_n \to y$ conforme $n \to \infty$. Se concluye que cada sucesión de Cauchy en X es convergente, es decir, (X, ρ) es completo.

Inversamente, supóngase que (X, ρ) es completo y totalmente acotado. Si (x_n) es una sucesión en X, el Lema 2.74 muestra que tiene una subsucesión de Cauchy (x_{n_k}), la cual es convergente en vista de la completitud. Por lo tanto, el espacio topológico X es compacto. $\square$

► Cada espacio métrico es una parte densa de un espacio métrico completo. Por ejemplo, los números racionales $\mathbb{Q}$ (con la métrica inducida por la inclusión $\mathbb{Q} \hookrightarrow \mathbb{R}$) forman un espacio métrico incompleto. Una de las construcciones clásicas de $\mathbb{R}$, dada por Cantor, consiste en agregar a $\mathbb{Q}$ un juego de límites para sus sucesiones de Cauchy.

Definición 2.76. Si (X,ρ) (Y,σ) son dos espacios métricos, una función $f\colon X\to Y$ es una **isometría** si $\sigma(f(x),f(z))=\rho(x,z)$ para todo $x,z\in X$.

Fíjese que una isometría es inyectiva, porque

$$f(x)=f(z)\iff \sigma(f(x),f(z))=0\iff \rho(x,z)=0\iff x=z.$$

Cada isometría es continua, porque $f^{-1}\big(B_\sigma(f(x);\varepsilon)\big)\supseteq B_\rho(x;\varepsilon)$ para $x\in X$, $\varepsilon>0$, lo cual implica que la preimagen de un vecindario de $f(x)$ es un vecindario de x, para todo $x\in X$.

Proposición 2.77. *Sea (X,ρ) un espacio métrico cualquiera. Entonces existe un espacio métrico completo $(\widehat{X},\hat{\rho})$ y una isometría $j\colon X\to\widehat{X}$ tal que $j(X)$ es denso en $\widehat{X}$.*

Además, si $(\widetilde{X},\tilde{\rho})$ es otro espacio métrico completo con una isometría $j'\colon X\to\widetilde{X}$ tal que $j'(X)$ es denso en $\widetilde{X}$, entonces hay una isometría biyectiva $i\colon\widetilde{X}\to\widehat{X}$ tal que $i\circ j'=j:X\to\widehat{X}$.

Demostración. Sea $\mathcal{X}$ la totalidad de sucesiones de Cauchy en X; escríbase $\mathbf{x}:=(x_n)$ para denotar un elemento típico de $\mathcal{X}$.

Si $\mathbf{x}=(x_n)$, $\mathbf{y}=(y_n)$ son dos elementos de $\mathcal{X}$, entonces $\{\,\rho(x_n,y_n):n\in\mathbb{N}\,\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathbb{R}$. En efecto, dado $\varepsilon>0$, sea N tal que $m,n\geq N\implies\rho(x_m,x_n)<\frac{1}{2}\varepsilon$ y $\rho(y_n,y_m)<\frac{1}{2}\varepsilon$; entonces

$$\rho(x_m,y_m)\leq\rho(x_m,x_n)+\rho(x_n,y_n)+\rho(y_n,y_m),$$

así que $|\rho(x_m,y_m)-\rho(x_n,y_n)|<\varepsilon$. Como $\mathbb{R}$ ya es completo, se puede definir

$$d(\mathbf{x},\mathbf{y}):=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

Esta "distancia" entre sucesiones es simétrica, $d(\mathbf{y},\mathbf{x})=d(\mathbf{x},\mathbf{y})$, y cumple la desigualdad triangular:

$$d(\mathbf{x},\mathbf{z})\leq d(\mathbf{x},\mathbf{y})+d(\mathbf{y},\mathbf{z}),\quad\text{para}\quad\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathcal{X},$$

pero no es una métrica[25] porque es posible que $d(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ aun cuando $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$; por ejemplo, si $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ son dos sucesiones que convergen al mismo límite.

Ahora bien: la ecuación $d(\mathbf{x},\mathbf{y})=0$ determina una *relación de equivalencia* entre elementos de $\mathcal{X}$. Sea $\widehat{X}$ el conjunto de sus clases de equivalencia; defínase

$$\hat{\rho}([\mathbf{x}],[\mathbf{y}]):=d(\mathbf{x},\mathbf{y})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n).$$

Entonces $\hat{\rho}$ es una métrica sobre $\widehat{X}$. Si $x\in X$, sea $\hat{x}\in\mathcal{X}$ la sucesión constante $x_n\equiv x$ (la cual es trivialmente convergente a x); colóquese $j(x):=[\hat{x}]\in\widehat{X}$.

[25]Dícese que d es una **pseudométrica**, esto es, una función simétrica de dos variables que cumple la desigualdad triangular.

Obsérvese que j es una isometría:

$$\hat\rho(j(x),j(y)) = d(\hat x,\hat y) = \lim_{n\to\infty} \rho(x,y) = \rho(x,y).$$

Si $([\mathbf{x}_m])_{m\in\mathbb{N}}$, con $\mathbf{x}_m = (x_{mn})_{n\in\mathbb{N}}$ para cada m, es una sucesión de Cauchy en $(\widehat{X},\hat\rho)$, sea $\mathbf{z} = (z_n)$ la sucesión en X formado por las entradas diagonales, $z_n := x_{nn}$ para cada n. Dado $\varepsilon > 0$, tómese N tal que

$$\begin{aligned} m,n \geq N \implies \hat\rho([\mathbf{x}_m],[\mathbf{x}_n]) < \varepsilon &\implies \lim_{k\to\infty} \rho(x_{mk},x_{nk}) < \varepsilon \\ &\implies \lim_{k\to\infty} \rho(x_{mk},x_{kk}) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En otras palabras, $\hat\rho([\mathbf{x}_m],[\mathbf{z}]) \leq \varepsilon$ para $m \geq N$. Entonces $[\mathbf{x}_m] \to [\mathbf{z}]$ en $\widehat{X}$. Se concluye que $(\widehat{X},\hat\rho)$ es completo.

Dado un elemento $[\mathbf{y}] \in \widehat{X}$ y algún $\varepsilon > 0$, tómese $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m,n \geq N(\varepsilon) \implies \rho(y_m,y_n) < \varepsilon$. Sea $z := y_{N(\varepsilon)}$. Entonces $\hat\rho([\mathbf{y}],[\hat z]) = \lim_{m\to\infty} \rho(y_m,y_{N(\varepsilon)}) \leq \varepsilon$. Se ha comprobado que $\overline{B}_{\hat\rho}([\mathbf{y}];\varepsilon) \cap j(X) \neq \emptyset$ para todo $\varepsilon > 0$, lo cual dice que $j(X)$ es denso en $\widehat{X}$.

Ahora sea $(\widetilde{X},\tilde\rho)$ con $j'\colon X \to \widetilde{X}$ otro espacio métrico completo e isometría desde X con imagen densa. Cada $\tilde x \in \widetilde{X}$ es el límite de una sucesión $j'(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Como j' es una isometría y la sucesión $j'(x_n)$ es de Cauchy en $\widetilde{X}$ —por ser convergente— la sucesión $\mathbf{x} := (x_n)$ es de Cauchy en X. Defínase $i\colon \widetilde{X} \to \widehat{X}$ por $i(\tilde x) := [\mathbf{x}]$.

Para ver que i está bien definida, sea $\mathbf{y} = (y_n)$ otra sucesión de Cauchy en X tal que $j'(y_n) \to \tilde x$ en $\widetilde{X}$. Entonces

$$\rho(x_n,y_n) = \tilde\rho(j'(x_n),j'(y_n)) \leq \tilde\rho(j'(x_n),\tilde x) + \tilde\rho(\tilde x,j'(y_n)) \to 0 \quad \text{como } n \to \infty,$$

lo cual dice que $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = 0$ así que $[\mathbf{x}] = [\mathbf{y}]$ en $\widehat{X}$. Es evidente de su definición que $i \circ j' = j$. Ahora tómese $\tilde z \in \widetilde{X}$, $\mathbf{z} = (z_n) \in \mathcal{X}$ con $j'(z_n) \to \tilde z$. Entonces

$$\tilde\rho(\tilde x,\tilde z) = \lim_{n\to\infty} \tilde\rho(j'(x_n),j'(z_n)) = \lim_{n\to\infty} \rho(x_n,z_n) = \hat\rho([\mathbf{x}],[\mathbf{z}]).$$

De ahí es claro que $i\colon \widetilde{X} \to \widehat{X}$ es una isometría.

La isometría i es sobreyectiva porque $\widetilde{X}$ es completo. En efecto, si $[\mathbf{x}] \in \widehat{X}$, la sucesión $\mathbf{x} = (x_n)$ es de Cauchy en (X,ρ). Su imagen $j'(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(\widetilde{X},\tilde\rho)$. Entonces esta sucesión converge a un límite $\tilde x \in \widetilde{X}$, necesariamente único porque $\widetilde{X}$ es de Hausdorff; es inmediato que $i(\tilde x) := [\mathbf{x}]$. $\square$

La función inversa de una isometría biyectiva es otra isometría y como tal es continua: la función $i\colon \widetilde{X} \to \widehat{X}$ de la demostración anterior es un *homeomorfismo* entre $\widetilde{X}$ y $\widehat{X}$.

Definición 2.78. Sea (X,ρ) un espacio métrico. El espacio métrico completo $(\widehat{X},\hat{\rho})$ de la Proposición 2.77 se llama la **compleción** de (X,ρ).

De modo más abstracta, es permisible decir que cualquier espacio métrico completo $(\widetilde{X},\tilde{\rho})$, provisto de una isometría $j'\colon X\to\widetilde{X}$ con imagen denso, es *una compleción* de (X,ρ). La Proposición anterior muestra que dos compleciones son homeomorfos mediante una única isometría biyectiva, que entrelaza las inclusiones isométricas densas de una copia de (X,ρ). De este modo, la construcción concreta de $(\widehat{X},\hat{\rho})$ es un asunto secundario.[26]

2.8 El teorema de Baire

La tesis doctoral de René-Louis Baire, en 1899, describió una propiedad interesante de la recta real,[27] que se generaliza inmediatamente a los espacios vectoriales $\mathbb{R}^n$, para $n\geq 1$. En su libro de 1914, Hausdorff mostró que este fenómeno es una propiedad topológica de espacios métricos completos. Su importancia emergió posteriormente con los estudios de Stefan Banach sobre espacios vectoriales normados completos (hoy en día llamados "espacios de Banach"), porque el resultado de Baire es el sustrato topológico de dos teoremas fundamentales del propio Banach.

Definición 2.79. Una parte A de un espacio topológico X es un conjunto **nunca denso** si su clausura tiene interior vacío: $(\overline{A})^\circ=\emptyset$.

Una parte $B\subseteq X$ es un conjunto **magro** (o **de primera categoría**)[28] si $B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n$ es una unión numerable de conjuntos nunca densos A_n.

Ejemplo 2.80. Cualquier parte numerable de $\mathbb{R}$ (los números racionales $\mathbb{Q}$, por ejemplo) es magra, porque cada conjunto solitario $\{x\}$ es nunca denso.

El **conjunto de Cantor** $C\subseteq[0,1]$ es una parte nunca densa del intervalo $[0,1]$. Este conjunto se construye de la siguiente forma. Sea $C_0:=[0,1]$; y sea

$$C_1:=[0,1]\setminus(\tfrac13,\tfrac23)=[0,\tfrac13]\uplus[\tfrac23,1].$$

Inductivamente, se expresa C_n como una unión disjunta de 2^n intervalos cerrados de longitud 3^{-n} cada uno. Sea C_{n+1} la parte de C_n que queda al remover el tercio $(\frac23 a+\frac13 b,\frac13 a+\frac23 b)$ de cada subintervalo $[a,b]\subseteq C_n$. Entonces $C:=\downarrow\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C_n$ es la intersección (decreciente) de esta familia de partes encajadas de $[0,1]$.

[26] La compleción de un espacio métrico es un ejemplo de una **construcción categórica**: dos instancias particulares de la construcción están ligadas mediante un isomorfismo único.

[27] La tesis fue publicado como artículo en: René-Louis Baire, *Sur les fonctions de variables réeles*, Annali di Matematica **3** (1899), 1–123.

[28] En su tesis, Baire clasificó las partes de $\mathbb{R}$ en dos tipos: las de *primera categoría* (los conjuntos magros) y las de *segunda categoría* (los conjuntos no magros). Por desgracia, esta pobre terminología fue adoptado por todos, hasta que la escuela de Bourbaki propuso el término *magro* para los conjuntos de la primera categoría.

Cada C_n es un cerrado en $[0,1]$ y su intersección C también es cerrado. Para ver que C es nunca denso, basta ver que $C^\circ = \emptyset$. De lo contrario, habría un intervalo abierto $(s,t) \subset C$, con $0 \leq s < t \leq 1$, lo cual implicaría $(s,t) \subset C_n$ para todo n; pero eso es imposible cuando $3^{-n} < t - s$. ◊

Lema 2.81. *Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Entonces:*

(a) *A es nunca denso en X si y sólo si $X \setminus \overline{A}$ es denso en X.*

(b) *Si A es nunca denso en X, entonces $\overline{A}$ es nunca denso en X también.*

(c) *Si A y B son nunca densos en X, entonces $A \cup B$ es nunca denso en X.*

Demostración. Ad (a): Fíjese que $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ si y sólo si $X \setminus (\overline{A})^\circ = X$, si y sólo si $\overline{X \setminus \overline{A}} = X$, si y sólo si $X \setminus \overline{A}$ es denso en X.

Ad (b): La operación $A \mapsto (\overline{A})^\circ$ lleva $\overline{A}$ en $(\overline{A})^\circ$, porque $\overline{A}$ coincide con su propia clausura. Entonces la ecuación $(\overline{A})^\circ = \emptyset$ dice que tanto A como $\overline{A}$ son nunca densos en X.

Ad (c): Si A y B son nunca densos en X y si U es cualquier abierto no vacío en X, entonces $V := U \setminus \overline{A} = U \cap (X \setminus \overline{A})$ es un abierto no vacío, por la parte (a). Luego $U \setminus \overline{A \cup B} = U \setminus (\overline{A} \cup \overline{B}) = V \setminus \overline{B}$ es un abierto no vacío. Como $U \setminus \overline{A \cup B} = U \cap (X \setminus \overline{A \cup B})$, se concluye que $X \setminus \overline{A \cup B}$ es denso en X. Por lo parte (a) de nuevo, $A \cup B$ es nunca denso en X. □

Lema 2.82. *Para un espacio topológico X, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *Si $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia numerable de abiertos densos en X, su intersección $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso en X.*

(b) *Si $\{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una familia numerable de cerrados nunca densos en X, su unión $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ tiene interior vacío.*

(c) *Si $A \subseteq X$ es un conjunto magro, entonces $X \setminus A$ es denso en X.*

Demostración. Ad (a) $\Longrightarrow$ (b): Sea F_n un cerrado en X con $F_n^\circ = \emptyset$, para $n \in \mathbb{N}$. Entonces $U_n := X \setminus F_n$ es un abierto denso, ya que $\overline{U}_n = X \setminus F_n^\circ = X$. Por hipótesis, la intersección $B := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ es denso en X. Si $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = X \setminus B$, entonces $A^\circ = X \setminus \overline{B} = X \setminus X = \emptyset$.

Ad (b) $\Longrightarrow$ (c): Si A es magro en X, entonces $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ donde cada A_n es nunca denso en X. Sus clausuras $\overline{A}_n$ son también nunca densos, por el Lema 2.81. Entonces

$$\overline{X \setminus A} = X \setminus A^\circ \supseteq X \setminus \Bigl(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A}_n\Bigr)^\circ = X \setminus \emptyset = X,$$

así que $X \setminus A$ es denso en X.

Ad (c) $\Longrightarrow$ (a): Sea U_n un abierto denso en X, para $n \in \mathbb{N}$, y sea $B := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Cada $X \setminus U_n$ es un cerrado con interior vacío, el cual es nunca denso. Luego $X \setminus B = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (X \setminus U_n)$ es magro, así que $X \setminus \overline{B} = (X \setminus B)^\circ = \emptyset$; se concluye que $\overline{B} = X$. □

Definición 2.83. Un espacio topológico X es un **espacio de Baire** si cumple (una de) las condiciones equivalentes del Lema 2.82.

Proposición 2.84. *Un espacio localmente compacto y T_2 es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea X un espacio localmente compacto y de Hausdorff. Entonces X es completamente regular, por el Lema 2.53 y por ende X es regular.

Sea $\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ una familia numerable de abiertos densos en X y sea $B := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Hay que mostrar que B es denso en X o bien, lo que es lo mismo, que $W \cap B \neq \emptyset$ para todo abierto no vacío W.

Como U_0 es abierto y denso, es $W \cap U_0 \neq \emptyset$. Tómese $x_0 \in W \cap U_0$. Como X es regular, el Lema 2.41 muestra que hay un abierto V_0 tal que $x_0 \in V_0 \subseteq \overline{V}_0 \subseteq (W \cap U_0)$. Además, como X es localmente compacto, se puede suponer que $\overline{V}_0$ es compacto.

Como U_1 es abierto y denso, es $V_0 \cap U_1 \neq \emptyset$. Tómese $x_1 \in V_0 \cap U_1$. Luego hay un abierto V_1 tal que $x_1 \in V_1 \subseteq \overline{V}_1 \subseteq (V_0 \cap U_1)$.

Al seguir de esta manera, se puede encontrar abiertos $V_1, \dots, V_{n-1}$ y puntos $x_1, \dots, x_{n-1}$ tales que $x_k \in V_k \subseteq \overline{V}_k \subseteq (V_{k-1} \cap U_k)$, para $k = 1, \dots, n-1$. Como U_n es abierto y denso, es $V_{n-1} \cap U_n \neq \emptyset$; puede tomarse $x_n \in V_{n-1} \cap U_n$. Luego hay un abierto V_n tal que $x_n \in V_n \subseteq \overline{V}_n \subseteq (V_{n-1} \cap U_n)$. Por inducción, se produce así V_n y x_n para todo $n \in \mathbb{N}$.

Entonces $\{ \overline{V}_n : n \in \mathbb{N} \}$ es una familia de partes cerradas del conjunto compacto $\overline{V}_0$. Como esta familia es decreciente, porque $\overline{V}_n \subseteq V_{n-1} \subseteq \overline{V}_{n-1}$ para todo $n \geq 1$, tiene la propiedad de intersección finita. La compacidad de $\overline{V}_0$ garantiza que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{V}_n \neq \emptyset$. Pero $\overline{V}_n \subseteq W \cap U_n$ para cada n; en consecuencia, $W \cap B = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} W \cap U_n \neq \emptyset$. Se concluye que B es denso en X. □

Teorema 2.85 (Baire)**.** *Un espacio métrico completo es un espacio de Baire.*

Demostración. Sea (X, ρ) un espacio métrico completo. Sea $\{ U_n : n \in \mathbb{N} \}$ una familia numerable de abiertos densos en X y sea $B := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Hay que mostrar que $W \cap B \neq \emptyset$ para todo abierto no vacío W.

Por inducción, se construye una sucesión de puntos (x_n) en X y un juego de bolas abiertos $B_\rho(x_n; r_n)$ de la siguiente manera.

Tómese $x_0 \in W \cap U_0$. Como $W \cap U_0$ es un vecindario abierto de x, hay un radio $r_0 \leq 1$ tal que $\overline{B}_\rho(x_0; r_0) \subseteq W \cap U_0$. (Recuérdese que $\overline{B}_\rho(x; r) = \{ y \in X : \rho(x, y) \leq r \}$ denota la *bola cerrada* con centro x y radio r.)

Inductivamente, como U_n es abierto y denso en X, la intersección $B_\rho(x_{n-1}; r_{n-1}) \cap U_n$ es un abierto no vacío, para $n \geq 1$, así que hay un punto x_n y un radio $r_n \leq 1/(n+1)$ tales que $\overline{B}_\rho(x_n; r_n) \subseteq B_\rho(x_{n-1}; r_{n-1}) \cap U_n$.

Si $m \geq n \geq 1/\varepsilon$, entonces $\rho(x_m, x_n) \leq r_n \leq 1/(n+1) < \varepsilon$; esto muestra que (x_n) es una sucesión de Cauchy en X. Como (X, ρ) es completo, hay un punto $z \in X$ tal que $x_n \to z$. Como $x_m \in \overline{B}_\rho(x_n; r_n)$ para $m \geq n$ y el conjunto $\overline{B}_\rho(x_n; r_n)$ es cerrado, se ve que $z \in \overline{B}_\rho(x_n; r_n)$ para todo n. Entonces $z \in W$ y $z \in U_n$ para cada n, luego $z \in W \cap B$; en particular, es $W \cap B \neq \emptyset$. Se concluye que B es denso en X. □

Corolario 2.86. *Si $n \in \mathbb{N}^*$, el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Baire.* $\boxminus$

► El corolario anterior sigue de la Proposición 2.84 y del Teorema 2.85, porque $\mathbb{R}^n$ es, por un lado, un espacio localmente compacto y T_2, y por otro lado, un espacio completamente metrizable: cualquiera de las normas equivalentes del Ejemplo 1.21 define una métrica sobre $\mathbb{R}^n$ cuyas sucesiones de Cauchy convergen. Sin embargo, la segunda opción resulta más útil en espacios normados de dimensión infinita.

Definición 2.87. Sea E un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, dotado con una *norma* $\|\cdot\|$ y sea ρ la métrica asociada, $\rho(x,y) := \|x-y\|$. Con la topología inducida por esta métrica, E es un **espacio normado**. Si el espacio métrico (E,ρ) es completo, dícese que E es un **espacio de Banach**.

Ejemplo 2.88. Sea X un espacio compacto y T_2. Las funciones continuas $f\colon X \to \mathbb{R}$ son elementos de un espacio vectorial real $C(X,\mathbb{R})$. [De la Definición 1.38, $C(X,\mathbb{R})$ es un álgebra sobre $\mathbb{R}$, pero aquí se hace caso omiso del producto puntual de las funciones.] Como cada $f \in C(X,\mathbb{R})$ es una función acotada, en vista del Lema 2.28, la receta

$$\|f\|_\infty := \sup\{\,|f(x)| : x \in X\,\}$$

define una norma sobre $C(X,\mathbb{R})$. Una sucesión (f_n) es de Cauchy para [la métrica asociada con] esta norma si para todo $\varepsilon > 0$, hay $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$m,n \geq N(\varepsilon) \implies |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Entonces, para cada punto $x \in X$, la sucesión $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ es completo, hay un número $f(x) \in \mathbb{R}$ tal que $f_n(x) \to f(x)$ conforme $n \to \infty$. Al dejar $n \to \infty$ en el estimado anterior, se ve que

$$m \geq N(\varepsilon) \implies |f_m(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{para todo} \quad x \in X.$$

Resulta que la función $f\colon X \to \mathbb{R}$ es continua, por un "argumento de $\varepsilon/3$"; se concluye que $\|f_m - f\|_\infty \to 0$ conforme $m \to \infty$; es decir. $f_m \to f$ en $C(X,\mathbb{R})$. Por lo tanto, $C(X,\mathbb{R})$ es un espacio de Banach.

Obsérvese que la convergencia $f_n(x) \to f(x)$ es *uniforme* en x. La topología métrica sobre $C(X,\mathbb{R})$ determinada por esta norma se llama la **topología de convergencia uniforme**. $\Diamond$

Lema 2.89. *Si E y F son dos espacios normados, una aplicación lineal $\varphi\colon E \to F$ es continua si y sólo si es continua en* 0.

Demostración. Cualquier función continua de E en F es continua en 0. Supóngase, entonces, que la aplicación lineal $\varphi\colon E \to F$ es continua en 0; falta mostrar que φ es continua en todo vector $x \in F$.

Si (x_n) es una sucesión en E tal que $x_n \to x$, entonces $\rho(x_n, x) \to 0$, es decir, $\|x_n - x\| \to 0$; en consecuencia, $x_n - x \to 0$ en E. Luego

$$\varphi(x_n) - \varphi(x) = \varphi(x_n - x) \to \varphi(0) = 0,$$

por la linealidad de φ y su continuidad en 0. Por lo tanto, $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ en F. La continuidad de φ sigue del Lema 1.60. □

Lema 2.90. *Si F es un espacio normado real*[29] *de dimensión m y si $\mathbb{R}^m$ es normado por su norma euclidiana, cualquier isomorfismo lineal entre $\mathbb{R}^m$ y F es un homeomorfismo.*

Demostración. Un isomorfismo lineal $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to F$ lleva la base estándar $\{e_1, \dots, e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$ en una base vectorial $\{v_1, \dots, v_m\}$ para F, al colocar $v_k := \varphi(e_k)$ para $k = 1, \dots, m$. Si $t = (t^1, \dots, t^m) \in \mathbb{R}^m$, la linealidad de φ dice que $\varphi(t) = t^1 v_1 + \cdots + t^m v_m \in F$. Por lo tanto,

$$\|\varphi(t)\| \le \sum_{k=1}^{m} |t^k| \, \|v_k\|.$$

Si (t_n) es una sucesión en $\mathbb{R}^m$ tal que $t_n \to t$, entonces $t_n^k - t^k \to 0$ en $\mathbb{R}$ para cada k, así que $\|\varphi(t_n) - \varphi(t)\| = \|\varphi(t_n - t)\| \to 0$ conforme $n \to \infty$, luego $\varphi(t_n) \to \varphi(t)$ en F. Se concluye que $\varphi\colon \mathbb{R}^m \to F$ es continua.

Denótese la norma euclidiana de $\mathbb{R}^m$ por $\|\cdot\|_2$. Sea $\psi\colon F \to \mathbb{R}^m : v_k \mapsto e_k$ la aplicación lineal inversa para φ. Si ψ no fuera continua en 0, habría $\varepsilon > 0$ y una sucesión (x_n) en F tal que $x_n \to 0$ en F pero $\|\psi(x_n)\|_2 \ge \varepsilon$.

Sea $y_n := x_n / \|\psi(x_n)\|_2$ para $n \in \mathbb{N}$; entonces (y_n) es una sucesión en F tal que $y_n \to 0$ mientras $\|\psi(y_n)\|_2 = 1$, es decir, $\psi(y_n) \in \mathbb{S}^{m-1} = \{\, t \in \mathbb{R}^m : \|t\|_2 = 1 \,\}$.

La esfera unitaria $\mathbb{S}^{m-1}$ es compacta, por ser acotada y cerrada en $\mathbb{R}^m$. Luego, $(\psi(y_n))$ posee una subsucesión convergente $\psi(y_{n_r}) \to s \in \mathbb{S}^{m-1}$. La continuidad de φ implica que $y_{n_r} \to \varphi(s)$, así que $\varphi(s) = 0$ y por ende $s = 0$; lo cual es imposible. Se concluye que ψ es continua en 0; por su linealidad, ψ es continua en todo F. □

Corolario 2.91. *Dos normas cualesquiera $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ sobre $\mathbb{R}^m$ son* equivalentes*, en el sentido de que hay constantes m, M con $0 < m \le M < \infty$ tales que $m\|t\| \le |||t||| \le M\|t\|$ para todo $t \in \mathbb{R}^m$.*

Demostración. Basta mostrar el resultado en el caso particular de $|||\cdot||| = \|\cdot\|_2$. Si F denota $\mathbb{R}^m$ dotado de la otra norma $\|\cdot\|$, con la misma base estándar $\{e_1, \dots, e_n\}$ la demostración del Lema 2.90 muestra que los isomorfismos lineales φ y su inverso ψ son continuas; en particular, son continuas en 0.

Al usar la misma base vectorial en $\mathbb{R}^m$ y en F, φ y ψ coinciden con la aplicación identidad sobre $\mathbb{R}^m$. La continuidad de ψ en 0 dice que $\|t\|_2 \le M\|t\|$ para algún $M > 0$; la continuidad de φ en 0 dice que $\|t\| \le C\|t\|_2$ para algún $C > 0$; tómese $m := 1/C$. □

[29] Para espacios normados complejos, los mismos argumentos son aplicables, con $\mathbb{C}$ en lugar de $\mathbb{R}$.

Lema 2.92. *Si E es un espacio normado infinitodimensional y si $F \leq E$ es un subespacio vectorial finitodimensional, entonces F es una parte cerrada de E.*

Demostración. Sea $m := \dim F$. El Lema 2.90 dice que hay un homeomorfismo lineal entre $\mathbb{R}^m$ y F que entrelaza sus topologías métricas; luego F es completo en la norma de E porque $\mathbb{R}^m$ es completo en la norma euclidiana.

Si $x \in \overline{F}$, entonces hay una sucesión (x_n) en F tal que $x_n \to x$. La sucesión (x_n) es de Cauchy, por ser convergente en E, así que converge en F; luego $x \in F$. $\square$

Lema 2.93. *Un espacio de Banach infinitodimensional tiene dimensión no numerable.*

Demostración. Sea E un espacio normado de dimensión infinito pero numerable; entonces E posee una base vectorial numerable $\{ v_n : n \in \mathbb{N} \}$. Sea $F_n := \operatorname{lin}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ el subespacio n-dimensional generado por los primeros n vectores de esta base. Es evidente que E es la unión creciente de esta cadena de subespacios, $E = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Por el Lema 2.92, cada F_n es cerrado en E. Además, F_n tiene interior vacío: si $x \in F_n$ y $\varepsilon > 0$, el vector $y := x + \frac{1}{2}\varepsilon\, v_{n+1}$ queda en $B(x;\varepsilon) \setminus F_n$, así que ningún vecindario abierto de x está incluido en F_n. Entonces F_n es nunca denso en E.

Por lo tanto, $E = \uparrow\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ es magro. Si E fuera un espacio de Banach, sería un espacio de Baire por el Teorema 2.85; pero un espacio de Baire (no vacío) no puede ser magro, por el Lema 2.82(c). En consecuencia, E no puede ser un espacio de Banach. $\square$

Ejemplo 2.94. El espacio vectorial $\mathbb{R}[X] := \operatorname{lin}\langle X^n : n \in \mathbb{N} \rangle$, de todos los polinomios reales en un indeterminado X, no puede ser completo en norma alguna. $\Diamond$

Un espacio normado real (o complejo) infinitodimensional *no es localmento compacto*, en vista del siguiente resultado.[30]

Lema 2.95 (Riesz)**.** *Sea F un subespacio cerrado de un espacio normado E, con $F \neq E$. Para todo $t \in (0,1)$, hay un punto $x_t \in E$ tal que $\|x_t\| = 1$ pero $d(x_t, F) := \inf_{y\in F} \|x_t - y\| \geq 1 - t$.*

Demostración. Tómese $z \in E \setminus F$. Entonces $d(z,F) := \inf_{y\in F} \|z - y\| > 0$; de lo contrario, se podría hallar una sucesión (y_n) en F tal que $y_n \to z$.

Escríbase $r := d(z,F)$. Si $0 < t < 1$, hay un punto $y_t \in F$ tal que $\|z - y_t\| \leq r/(1-t)$.

Sea $x_t := (z - y_t)/\|z - y_t\|$. Es claro que $\|x_t\| = 1$. Además, para todo $y \in F$, resulta que

$$\|x_t - y\| = \frac{\big\|z - y_t - \|z - y_t\|\, y\big\|}{\|z - y_t\|} \geq \frac{r}{\|z - y_t\|} \geq 1 - t. \qquad \square$$

[30]El Lema 2.95 apareció en el artículo: Frigyes Riesz, *Über lineare Funktionalgleichungen*, Acta Mathematica **41** (1918), 71–98. En un espacio de Hilbert, es posible hallar un vector unitario x_0 que sea ortogonal a F, así que $\|x_0\| = 1$, $d(x_0, F) = 1$. En otros espacios de Banach que no admiten el concepto de ortogonalidad, el Lema de Riesz proporciona una familia de vectores unitarios "casi ortogonales" al subespacio F.

Proposición 2.96. *Si E es un espacio normado infinitodimensional, su esfera unitaria $S := \{ x \in E : \|x\| = 1 \}$ no es localmente compacto.*

Demostración. Tómese $v_1 \in S$. Si $F_1 := \operatorname{lin}\langle v_1 \rangle$, el Lema 2.95 muestra que hay $v_2 \in S$ tal que $d(v_2, F_1) \geq \frac{1}{2}$.

Si $v_1, \dots, v_n \in S$ son vectores linealmente independientes tales que $\|v_i - v_j\| \geq \frac{1}{2}$ para $i \neq j$ en $\{1, 2, \dots, n\}$, y si $F_n := \operatorname{lin}\langle v_1, \dots, v_n \rangle$, el Lema 2.95 produce $v_{n+1} \in S$ con $d(v_{n+1}, F_n) \geq \frac{1}{2}$. Por inducción, se ha creado una sucesión $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en S cuyas entradas cumplen $\|v_i - v_j\| \geq \frac{1}{2}$ para $i \neq j$ en $\mathbb{N}$.

Esta sucesión (v_n) no puede tener una subsucesión de Cauchy, ni tampoco una subsucesión convergente. Por lo tanto, S no es compacto, ni siquiera totalmente acotado. □

Corolario 2.97. *Un espacio normado infinitodimensional no es localmente compacto.*

Demostración. Sea E un espacio normado. Si algún $x \in E$ posee un vecindario compacto K, hay $\varepsilon > 0$ tal que K incluye la bola abierta $B(x; \varepsilon)$. Esto implica[31] que $\overline{B}(x; \varepsilon) \subseteq K$. Luego, la bola cerrada $\overline{B}(x; \varepsilon)$ es compacto. La función afín $f : E \to E : y \mapsto (y - x)/\varepsilon$ es un homeomorfismo, así que la bola unitaria $\overline{B}(0; 1)$ es compacta. La esfera unitaria S es una parte cerrada de esta bola y por ende también es compacta. La Proposición 2.96 ahora implica que E debe ser finitodimensional. □

[31]En un espacio normado, la clausura de la bola abierta $B(x; \varepsilon)$ es la bola cerrada $\overline{B}(x; \varepsilon)$. Fíjese, sin embargo, que esta afirmación no necesariamente es válida para espacios métricos en general.

3 Introducción a la Homotopía

La topología general forma la base de muchos otros subdivisiones de la matemática, como la geometría diferencial, la geometría algebraica y el análisis infinitodimensional. Antes de aplicar esa teoría en dichos campos, hay que enfrentar un problema básico de identificación: dados dos espacios topológicos en un ejemplo concreto, ¿cómo saber si son homeomorfos o no? Una estrategia posible es asociar a los espacios topológicos algunos *invariantes* (cosas que coinciden cuando los dos espacios son homeomorfos) que son calculables en forma explícita. Durante el siglo XX, se desarrollaron dos formas de asociar ciertos *grupos* (en su mayoría, grupos abelianos) a un espacio topológico: la *homología* y la *homotopía*.

3.1 Una excursión sobre categorías y funtores

Antes de abordar estas teorías que establecen vínculos entre la topología y el álgebra, conviene echar una mirada a una formulación general de las estructuras matemáticas, que ha sido denominado la *teoría de categorías*. Esta es una manera de sintetizar diversos procedimientos bajo un esquema general.[1]

Definición 3.1. Una **categoría** C reúne tres cosas:

1. Una clase de **objetos** $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$;

2. una familia de conjuntos $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$, uno para cada par de objetos $A,B \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$; los elementos de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ se llaman **morfismos** de A en B;

3. una familia de aplicaciones
$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B) \times \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,C),$$
llamada **composición** de morfismos, para cada triple de objetos $A,B,C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$; la composición de $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ y $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,C)$ se denota por $gf \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,C)$.

Estos datos deben cumplir tres requisitos:

(a) Los conjuntos de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ son *disjuntos*: cada morfismo f determina unívocamente dos objetos A,B tales que $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$.

(b) Para cada objeto $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ existe un único **morfismo idéntico** $1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,A)$ tal que $\underline{f\,1_A = f}$ para todo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ y $\underline{1_A\,g = g}$ para todo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C,A)$.

[1]El trabajo germinal fue el artículo de: Samuel Eilenberg y Saunders MacLane, *General theory of natural equivalences*, Transactions of the American Mathematical Society **58** (1945), 231–294. En este ensayo el término "categoría" fue introducido por primera vez, amén de los conceptos de "funtor" y "transformación natural", con gran cantidad de ejemplos. Las notaciones usuales para categorías siguen el libro de referencia: Sergei I. Gelfand y Yuri I. Manin, *Methods of Homological Algebra*, Springer, Berlin, 2003.

(c) La composición es *asociativa*: si $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$, $g \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(B,C)$ y $h \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(C,D)$, entonces
$$h(gf) = (hg)f \quad \text{en} \quad \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A,D).$$

Ejemplo 3.2. La categoría más sencilla es Set, cuyos objetos son los **conjuntos**. Los morfismos en $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Set}}(X,Y)$ son las **funciones** $f\colon X \to Y$.

En muchas categorías, los morfismos son funciones: la notación $g \circ f$ es usada como sinónimo de gf. En lugar de decir "$f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$", es cómodo escribir $f\colon A \to B$, aun cuando f no sea una función de A en B. $\lozenge$

Ejemplo 3.3. En la categoría Gr de **grupos** (cuyos objetos son los grupos, desde luego) los morfismos en $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Gr}}(G,H)$ son los **homomorfismos de grupos** $\varphi\colon G \to H$.

La categoría Ab de los **grupos abelianos** es una *subcategoría* de Gr, es decir, todos los objetos y morfismos de Ab son objetos y morfismos (respectivamente) de Gr. Esta subcategoría es *plena*, por cuanto $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Ab}}(G,H) = \operatorname{Hom}_{\mathsf{Gr}}(G,H)$ cuando G y H son grupos abelianos. $\lozenge$

Ejemplo 3.4. En la categoría An de **anillos**, los morfismos en $\operatorname{Hom}_{\mathsf{An}}(A,B)$ son los **homomorfismos de anillos** $\psi\colon A \to B$.

Si A es un anillo, los **A-módulos** (a la izquierda) son los objetos de una categoría ${}_A\mathsf{Mod}$: en este caso se escribe $\operatorname{Hom}_A(M,N)$ en vez de $\operatorname{Hom}_{{}_A\mathsf{Mod}}(M,N)$ para denotar los homomorfismos de A-módulos $\varphi\colon M \to N$.

(Un $\mathbb{Z}$-módulo es simplemente un grupo abeliano; así que $\mathsf{An} = {}_{\mathbb{Z}}\mathsf{Mod}$.) $\lozenge$

Ejemplo 3.5. Hay una categoría Top cuyos objetos son los **espacios topológicos**. Los morfismos en $\operatorname{Hom}_{\mathsf{Top}}(X,Y)$ son todas las **funciones continuas** $f\colon X \to Y$. $\lozenge$

Un morfismo $f \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ es un **isomorfismo** si posee un morfismo inverso $g \in \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(B,A)$ tal que $gf = 1_A$, $fg = 1_B$. Es fácil ver que este morfismo inverso, si existe, es único. En las categoría Set, un isomorfismo es simplemente una *biyección*; en las categorías Gr y Ab, es un isomorfismo de grupos; en la categoría Top, es un *homeomorfismo*.

Ejemplo 3.6. Hay una categoría Top_* cuyos objetos son los **espacios topológicos puntuados**.[2] Un objeto en Top_* es un par (X,p) donde X es un espacio topológico con $p \in X$. Un morfismo $f\colon (X,p) \to (Y,q)$ es una función continua $f\colon X \to Y$ tal que $f(p) = q$.

Más generalmente, hay una categoría TopPar de **pares de espacios topológicos** cuyos objetos son pares (X,A) donde X es un espacio topológico y $A \subseteq X$ (con la topología relativa). Un morfismo $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ es una función continua $f\colon X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$. $\lozenge$

Ejemplo 3.7. Si $\mathrm{Ob}(\mathsf{C})$ es un *conjunto*, dícese que C es una **categoría pequeña**. Por ejemplo, sea J un conjunto parcialmente ordenado. Los elementos de J son los objetos de una categoría

[2] Un nombre menos inelegante sería "espacios topológicos con un punto distinguido".

pequeña J, donde $\mathrm{Hom}_{\mathsf{J}}(i,j) := \{f_{ji}\}$ (un solo morfismo) si $i \leq j$, mientras $\mathrm{Hom}_{\mathsf{J}}(i,j) := \emptyset$ si $i \not\leq j$.

Fíjese que para todo $j \in J$, vale $1_k = f_{kk} \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{J}}(k,k)$, por reflexividad. De la transitividad del orden parcial, se obtiene $f_{kj} f_{ji} = f_{ki}$ si $i \leq j \leq k$. La composición de morfismos es asociativa, por la unicidad del morfismo f_{li}, si $i \leq j \leq k \leq l$. $\Diamond$

Ejemplo 3.8. Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico. Entonces hay una categoría pequeña Top_X donde $\mathrm{Ob}(\mathsf{Top}_X) = \mathcal{T}$; sus objetos son los *abiertos* en X. Si $U \subseteq V$ en $\mathcal{T}$, sea $i_{VU} \colon U \hookrightarrow V$ la inclusión y defínase $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}_X}(U,V) := \{i_{VU}\}$ (un solo morfismo). Si U, V son abiertos en X con $U \not\subseteq V$, tómese $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}_X}(U,V) := \emptyset$ (ningún morfismo). $\Diamond$

Ejemplo 3.9. Para $n \in \mathbb{N}$, escríbase $[n] := \{0,1,2,\dots,n\}$. Una función $f \colon [m] \to [n]$ es *creciente* (a veces, “no decreciente”) si $f(j-1) \leq f(j)$ para $j = 1,\dots,m$. Hay una categoría pequeña Δ dada por $\mathrm{Ob}(\Delta) := \{\, [n] : n \in \mathbb{N} \,\}$, donde cada $\mathrm{Hom}_{\Delta}([m],[n])$ es el conjunto de funciones crecientes $f \colon [m] \to [n]$. $\Diamond$

Definición 3.10. Si C es cualquier categoría, C° denota la **categoría opuesta** definida por

$$\mathrm{Ob}(\mathsf{C}^\circ) := \mathrm{Ob}(\mathsf{C}), \qquad \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^\circ}(A,B) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,A).$$

Es decir, C° posee los mismos objetos que C pero “las flechas apunten en la dirección contraria”. Si f° denota (por esta sola vez) el morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ visto como elemento de $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^\circ}(B,A)$, entonces la ley de composición en C° es $f^\circ g^\circ := (gf)^\circ$.

► En seguida, hay que considerar correspondencias entre dos categorías. Hay que advertir, como los objetos de una categoría forman una clase que no es necesariamente un conjunto, las aplicaciones entre dichas clases no siempre son funciones en el sentido ordinario. Sin embargo, los morfismos entre dos objetos sí forman conjuntos: y al final de cuentas, lo más importante es hacer corresponder los morfismos. Esta circunstancia motivó a Eilenberg y MacLane a introducir el concepto siguiente.

Definición 3.11. Un **funtor covariante** $\mathcal{F}$ de una categoría C en otra categoría D consta de:

- ⋆ una aplicación $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathsf{D}) : A \mapsto \mathcal{F}A$; y
- ⋆ una familia de funciones $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{F}B) : \varphi \mapsto \mathcal{F}\varphi$;

que cumplen las siguientes condiciones:

(a) $\mathcal{F}(\psi\varphi) = (\mathcal{F}\psi)(\mathcal{F}\varphi)$, toda vez que $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,C)$;

(b) $\mathcal{F}1_A = 1_{\mathcal{F}A}$ para todo $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$.

Se escribe $\mathcal{F} \colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ si $\mathcal{F}$ es un funtor de C en D.

Definición 3.12. Un **funtor contravariante** de una categoría C en otra categoría D se define como un funtor covariante $\mathcal{G}\colon \mathsf{C}^\circ \to \mathsf{D}$.

La aplicación $\mathrm{Ob}(\mathsf{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathsf{D}) : A \mapsto \mathcal{G}A$ y las $\mathrm{Hom}_\mathsf{C}(A,B) \to \mathrm{Hom}_\mathsf{D}(\mathcal{G}B,\mathcal{G}A) : \varphi \mapsto \mathcal{G}\varphi$ cumplen

(a′) $\mathcal{G}(\psi\varphi) = (\mathcal{G}\varphi)(\mathcal{G}\psi)$, toda vez que $\varphi \in \mathrm{Hom}_\mathsf{C}(A,B)$, $\psi \in \mathrm{Hom}_\mathsf{C}(B,C)$;

(b′) $\mathcal{G}\,1_A = 1_{\mathcal{G}A}$ para todo $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$.

En otras palabras, un funtor contravariante “revierte el sentido de las flechas”.

Ejemplo 3.13. Si C es una categoría cuyos objetos son conjuntos y cuyos morfismos son aplicaciones entre los conjuntos respectivos, hay un **funtor olvidadizo** $\mathcal{F}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{Set}$ dado por $\mathcal{F}A := A$ y $\mathcal{F}\varphi := \varphi$ para $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_\mathsf{C}(A,B)$. ◊

Ejemplo 3.14. Si X es un conjunto, escríbase $\mathcal{P}(X) := \mathbf{2}^X$ para denotar el conjunto de todas las partes de X. Dada una función $f\colon X \to Y$, defínase $\mathcal{P}f\colon A \mapsto f(A) \subseteq Y$ para todo $A \subseteq X$. Estas correspondencias $X \mapsto \mathcal{P}(X)$, $f \mapsto \mathcal{P}f$ definen un funtor covariante $\mathcal{P}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$. ◊

Ejemplo 3.15. Para $n \in \mathbb{N}$, el **símplice** de dimensión n es el conjunto[3]

$$\Delta_n := \{\, t = (t_0,\dots,t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_j \geq 0,\ t_0 + \cdots + t_n = 1 \,\}.$$

Los vectores $\{e_0, e_1, \dots, e_n\}$, que forman la base estándar de $\mathbb{R}^{n+1}$, son los **vértices** de Δ_n. (El símplice Δ_n es la envoltura convexa de estos vértices.) Si $I \subseteq [n]$, la **faceta** I-ésima de Δ_n es el conjunto convexo $\{\, t \in \Delta_n : t_j = 0 \text{ para } j \notin I \,\}$. Si $\#(I) = m+1$, hay una única función (estrictamente) creciente $f\colon [m] \to [n]$ que se extiende a una función *lineal* inyectiva $\Delta_f\colon \Delta_m \to \Delta_n$ cuya imagen es la faceta I-ésima de Δ_n.

Si $f\colon [m] \to [n]$ es creciente pero no estrictamente creciente (por ejemplo, si $m > n$), la extensión lineal Δ_f de f no es inyectiva.

Las correspondencias $[n] \mapsto \Delta_n$, $f \mapsto \Delta_f$ definen un funtor covariante $\Delta \to \mathsf{Set}$ que lleva los morfismos estrictamente crecientes de Δ en las inserciones de facetas en símplices de mayor dimensión. ◊

Ejemplo 3.16. Si G es un grupo, no necesariamente abeliano, se sabe que el subgrupo G' generado por productos finitos de *conmutadores* $ghg^{-1}h^{-1}$ es un subgrupo normal de G y que el cociente $\alpha(G) := G/G'$ es un grupo abeliano. Si $\varphi\colon G \to H$ es un homomorfismo de grupos, es claro que $\varphi(G') \subseteq H'$, lo cual induce un homomorfismo $\alpha\varphi = \bar\varphi : G/G' \to H/H'$. De este modo, se define un funtor $\alpha\colon \mathsf{Gr} \to \mathsf{Ab}$, llamado **abelianización**. ◊

[3] La palabra *símplice* no está en el Diccionario de la Real Academia; es una traducción *ad hoc* de **simplex**, en latín. Algunos autores escriben *simplejo*, por analogía con “complejo” como traducción de **complex**; preferimos no ser cómplices en ese adefesio lingüístico.

Ejemplo 3.17. Hay un funtor covariante $H_0\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Ab}$ que asocia a cada espacio topológico X el grupo abeliano libre $H_0(X)$ generado por las *componentes conexas* de X. (Un elemento de dicho grupo es una suma finita $\sum_j n_j C_j$ donde los C_j son las componentes conexas de X y cada $n_j \in \mathbb{Z}$, con la regla de adición obvia.)

Si $f\colon X \to Y$ es una función continua y C es una componente conexa de X, entonces $f(C)$ es una parte conexa de Y; como tal, hay una única componente conexa C' de Y tal que $f(C) \subseteq C'$. Defínase $H_0 f\colon H_0(X) \to H_0(Y)$ por $H_0 f(C) := C'$; esta receta se extiende por aditividad a un homomorfismo de grupos abelianos. Es fácil verificar que H_0 es un funtor, llamado la **homología en grado cero**. (Más adelante, este funtor aparecerá como el primero de una familia de "funtores de homología" de Top en Ab.) $\Diamond$

Definición 3.18. Si C es una categoría y si $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, hay un funtor covariante de C en Set, denotado $\mathsf{h}_A\colon B \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$, dado por composición de morfismos (a la izquierda): para cada morfismo $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,C)$, escríbase

$$g_* \equiv \mathsf{h}_A(g) : f \mapsto gf : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,C).$$

Si $h \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C,D)$, entonces $\mathsf{h}_A(hg) : f \mapsto hgf$ compone $f \mapsto gf$ con $gf \mapsto hgf$, así que

$$(hg)_* = \mathsf{h}_A(hg) = \mathsf{h}_A(h) \circ \mathsf{h}_A(g) = \mathsf{h}_* \circ g_* .$$

Si $B \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, hay un funtor *contravariante* de C en Set, denotado $\mathsf{h}^B : A \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$, dado por composición de morfismos a la derecha: para cada morfismo $k \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C,D)$, escríbase

$$k^* \equiv \mathsf{h}^B(k) : f \mapsto fk : \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(D,B) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C,B).$$

Si $l \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,C)$, entonces $\mathsf{h}^B(kl) : f \mapsto fkl$ compone $f \mapsto fk$ con $fk \mapsto fkl$, de modo que

$$(kl)^* = \mathsf{h}^B(kl) = \mathsf{h}^B(l) \circ \mathsf{h}^B(k) = l^* \circ k^* .$$

Una de las motivaciones para considerar el funtor $\mathsf{h}^B\colon \mathsf{C}^\circ \to \mathsf{Set}$ es la de generalizar el concepto de *punto*. Si X es un conjunto y $P = \{p\}$ es un conjunto solitario, los puntos de X están dados por las funciones en $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}}(P,X)$. En otras categorías conviene considerar los morfismos de todo objeto posible A en un objeto dado B; los morfismos en $\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ a veces se llaman *A-puntos* de B.

► Un funtor relaciona dos categorías, conservando sus estructuras (objetos, morfismos, ley de composición). También es posible relacionar dos funtores $\mathcal{F}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$, $\mathcal{G}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ entre dos categorías dadas.

Definición 3.19. Una **transformación natural** entre dos funtores $\mathcal{F}, \mathcal{G}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ es una familia de morfismos $\theta_A \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{D}}(\mathcal{F}A, \mathcal{G}A)$, uno para cada $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$, que satisfacen

$$\mathcal{G}\varphi \circ \theta_A = \theta_B \circ \mathcal{F}\varphi, \quad \text{para cada} \quad \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B).$$

Dicho de otro modo: para cada $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$, *el siguiente diagrama es conmutativo*:[4]

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}A & \xrightarrow{\theta_A} & \mathcal{G}A \\
{\scriptstyle \mathcal{F}\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{G}\varphi} \\
\mathcal{F}B & \xrightarrow{\theta_B} & \mathcal{G}B
\end{array}$$

Se escribe $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$, en forma abreviada. Se dice que θ es un **isomorfismo natural** si cada θ_A es un isomorfismo en la categoría D.

En síntesis, hay una categoría $\mathsf{Fun}(\mathsf{C},\mathsf{D})$ cuyos objetos son los funtores $\mathcal{F}\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ y cuyos morfismos son las transformaciones naturales $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$. Cada funtor conlleva la transformación idéntica $1_{\mathcal{F}} : A \mapsto 1_{\mathcal{F}A}$; la ley de composición está dada por $(\theta\eta)_A := \theta_A \circ \eta_A$ para $A \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$. Por eso, una transformación natural también se llama **morfismo de funtores**.

► El siguiente lema sobre funciones entre conjuntos permite reformular los conceptos de inyectividad y sobreyectividad de una manera puramente algebraica.

Lema 3.20. *Una función $f\colon X \to Y$ puede componerse con funciones $g,h\colon W \to X$ o bien con funciones $k,l\colon Y \to Z$. Entonces:*

(a) f es inyectiva *si y sólo si $f \circ g = f \circ h \implies g = h$ (cancelación de f a la izquierda);*

(b) f es sobreyectiva *si y sólo si $k \circ f = l \circ f \implies k = l$ (cancelación de f a la derecha).*

Demostración. Ad (a): Si f es inyectiva y si $w \in W$, vale $f(g(w)) = f(h(w))$ si y sólo si $g(w) = h(w)$; luego $f \circ g = f \circ h$ implica $g = h$.

Inversamente, si f es cancelable a la izquierda, sean $x_1, x_2 \in X$ tales que $f(x_1) = f(x_2)$ en Y. Sea $\mathbf{1} := \{0\}$ un conjunto solitario y defínase $g,h\colon \mathbf{1} \to X$ por $g(0) := x_1$, $h(0) := x_2$. Entonces $f \circ g(0) = f \circ h(0)$, así que $f \circ g = f \circ h$, luego $g = h$ por hipótesis y por tanto $x_1 = x_2$.

Ad (b): Si f es sobreyectiva, entonces $Y = \{\, f(x) : x \in X \,\}$; luego, vale $k(f(x)) = l(f(x))$ para todo $x \in X$ si y sólo si $k(y) = l(y)$ para todo $y \in Y$; es decir, $k \circ f = l \circ f$ implica $k = l$.

Inversamente, si f es cancelable a la derecha, defínase $k,l\colon Y \to \{0,1\}$ por $k(y) := 0$ si $y \in f(X)$; $k(y) := 1$ si $y \notin f(X)$; mientras $l(y) := 0$ para todo $y \in Y$. Es claro que $k(f(x)) = l(f(x)) = 0$ para todo $x \in X$, de modo que $k \circ f = l \circ f$; se concluye que $k = l$, lo cual implica que $f(X) = Y$, es decir, f es sobreyectiva. □

[4] Un **diagrama** es **conmutativo** si cada cadena de flechas que une dos vértices dados tiene la misma composición.

Definición 3.21. En una categoría C, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ es un **monomorfismo** (o bien: f es **mónico**) si $fg = fh \implies g = h$ toda vez que $g,h \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(D,A)$ con $D \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$.

Por otro lado, un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ es un **epimorfismo** (o bien: f es **épico**) si $kf = lf \implies k = l$ toda vez que $k,l \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,C)$ con $C \in \mathrm{Ob}(\mathsf{C})$.

En la terminología de la Definición 3.18, resulta que

- $\star$ f es *mónico* si y sólo si $f_*\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(D,A) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(D,B)$ es *inyectivo* para todo D;
- $\star$ f es *épico* si y sólo si $f^*\colon \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,C) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,C)$ es *inyectivo* para todo C.

Dícese que un morfismo $f \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ es un **isomorfismo** si posee un morfismo inverso $g \in \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(B,A)$ tal que $gf = 1_A$ y $fg = 1_B$. (Este morfismo inverso, si existe, es único.) Es fácil ver que cada isomorfismo es a la vez mónico y épico.

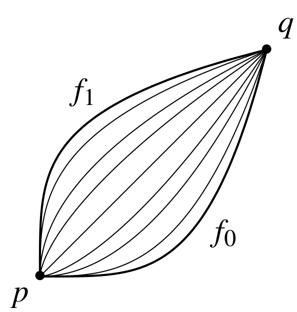
3.2 El concepto de homotopía

En esta subsección, se escribe $I := [0,1]$ para denotar el intervalo compacto en $\mathbb{R}$ cuya frontera es $\partial I := \{0,1\}$.

Definición 3.22. Dos funciones continuas $f_0, f_1\colon Z \to X$ se llaman **homotópicas**, escrito $f_0 \simeq f_1$, si hay una función continua $F\colon Z \times I \to X$ tal que

$$F(z,0) = f_0(z) \quad \text{y} \quad F(z,1) = f_1(z) \quad \text{para todo} \quad z \in Z.$$

Esta función F es una **homotopía** entre f_0 y f_1.



Para cada $t \in I$, sea $f_t(z) := F(z,t)$. Estas *tajadas* $\{\, f_t : 0 \leq t \leq 1 \,\}$ forman una familia de funciones continuas $f_t\colon Z \to X$ cuyos miembros extremos son f_0 y f_1. La continuidad de F en sus dos variables conjuntamente (es decir, su continuidad sobre el dominio $Z \times I$ con la topología del producto) implica que $t \mapsto f_t$ es una aplicación continua de I en $C(Z,X)$. En otras palabras, una homotopía entre f_0 y f_1 define un camino continuo en $C(Z,X)$ entre estos dos extremos.[5]

[5]Para asegurar la continuidad del camino $t \mapsto f_t$, hay que precisar cuál es la topología de $C(Z,X)$. Para $K \subseteq Z$ compacto y $U \subseteq X$ abierto, sea $S(K,U) := \{\, g \in C(Z,X) : g(K) \subseteq U \,\}$. Las partes $S(K,U)$ forman una subbase para la llamada **topología compacto-abierta**; con esa topología, la homotopía F determina un camino continuo $f_\bullet\colon I \to C(Z,X)$.

Definición 3.23. Si $f_0, f_1 \colon Z \to X$ son dos funciones continuas tales que $f_0(z) = f_1(z)$ para $z \in C \subseteq Z$, una **homotopía** entre f_0 y f_1 **relativa a** C es una homotopía $F \colon Z \times I \to X$ (cuyas tajadas extremas son f_0 y f_1) tal que $f_t(z) = f_0(z) = f_1(z)$ para todo $z \in C$, $t \in I$. Si tal F existe, se escribe: $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} C$.

En particular, si $f_0, f_1 \colon I \to X$ son *dos caminos* en X con el mismo punto inicial $f_0(0) = f_1(0) = p$ y el mismo punto final $f_0(1) = f_1(1) = q$, una **homotopía de caminos** es una homotopía F entre f_0 y f_1 relativa a $\partial I = \{0,1\}$. La función continua $F \colon I \times I \to X$ cumple:

$$\left.\begin{aligned} F(s,0) &= f_0(z), & F(0,t) &= p, \\ F(s,1) &= f_1(z), & F(1,t) &= q, \end{aligned}\right\} \quad \text{para todo} \quad s,t \in I.$$

Si existe tal homotopía de caminos F, se escribe $f_0 \mathrel{\dot{\simeq}} f_1$ (en lugar de: $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} \partial I$).

Lema 3.24. *La homotopía y la homotopía de caminos son relaciones de equivalencia.*

Demostración. Basta mostrar, para miembros de $C(Z,X)$ que coinciden sobre una determinada parte $C \subseteq X$, que la homotopía relativa, $\simeq \operatorname{rel} C$, es una relación de equivalencia. Los casos del enunciado son (a) $C = \emptyset$; y (b) $Z = I$, $C = \partial I$.

Reflexividad: Para obtener $f \simeq f \operatorname{rel} C$, basta tomar $F(z,t) := f(z)$ para todo $z \in Z$, $t \in I$.

Simetría: Si $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} C$ mediante una homotopía F, defínase

$$G(z,t) := F(z, 1-t).$$

La continuidad de $G = F \circ \varphi$ es evidente, porque $\varphi \colon (z,t) \mapsto (z, 1-t)$ es un homeomorfismo de $Z \times I$. También es claro que $g_0 = f_1$ y $g_1 = f_0$ y que $g_t = f_{1-t}$ coincide con f_0 y f_1 sobre C. Luego $f_1 \simeq f_0 \operatorname{rel} C$ mediante la homotopía G.

Transitividad: Si $f_0 \simeq f_1 \operatorname{rel} C$ y además $f_1 \simeq f_2 \operatorname{rel} C$ mediante las homotopías respectivas F y G, defínase $H \colon Z \times I \to X$ por

$$H(z,t) := \begin{cases} F(z,2t) & \text{si } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ G(z,2t-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Para $t = \frac{1}{2}$, vale $F(z,1) = f_1(z) = G(z,0)$, así que H está bien definida sobre $Z \times I$. Las restricciones de H tanto a $Z \times [0, \frac{1}{2}]$ como a $Z \times [\frac{1}{2}, 1]$ son funciones continuas; y estas restricciones coinciden sobre el dominio común $Z \times \{\frac{1}{2}\}$. Luego H es continua sobre $Z \times I$. Es claro que $h_0 = f_0$ y $h_1 = f_2$, mientras $h_t(z) = f_0(z) = f_1(z) = f_2(z)$ para $z \in C$. Luego $f_0 \simeq f_2 \operatorname{rel} C$ mediante la homotopía H. □

Lema 3.25. *Si $f_0 \simeq f_1$ en $C(Z,X)$ y si $g_0 \simeq g_1$ en $C(X,Y)$, entonces $g_0 \circ f_0 \simeq g_1 \circ f_1$ en $C(Z,Y)$.*

Demostración. Por transitividad de la relación de homotopía en $C(Z,Y)$, basta mostrar que $g_0 \circ f_0 \simeq g_0 \circ f_1$ y que $g_0 \circ f_1 \simeq g_1 \circ f_1$.

Si $F\colon Z \times I \to X$ es una homotopía entre f_0 y f_1, entonces $g_0 \circ F\colon Z \times I \to Y$ es una homotopía entre $g_0 \circ f_0$ y $g_0 \circ f_1$.

Si $G\colon X \times I \to Y$ es una homotopía entre g_0 y g_1, defínase $\tilde{f}_1 \in C(Z \times I, X \times I)$ por $\tilde{f}_1(z,t) := (f_1(z),t)$. Entonces $G \circ \tilde{f}_1\colon Z \times I \to Y$ es una homotopía entre $g_0 \circ f_1$ y $g_1 \circ f_1$. $\square$

Corolario 3.26. *Si $f_0 \doteq f_1$ en $C(I,X)$ y si $g \in C(X,Y)$, entonces $g \circ f_0 \doteq g \circ f_1$ en $C(I,Y)$.*

Demostración. Basta observar que si F es una homotopía entre f_0 y f_1 tal que $f_t(0) = f_0(0)$ y $f_t(1) = f_0(1)$ para todo t, entonces $g(f_t(0)) = g(f_0(0))$ y $g(f_t(1)) = g(f_0(1))$ para todo t. La homotopía $g \circ F\colon I \times I \to Y$ entonces muestra que $g \circ f_0 \simeq g \circ f_1$ rel ∂I. $\square$

Definición 3.27. Si X, Y son espacios topológicos, sea $[f]$ la **clase de homotopía** de $f \in C(X,Y)$. Hay un convenio de denotar la totalidad de estas clases de homotopía por $[X,Y]$; este es el conjunto cociente $C(X,Y)/\simeq$. El Lema 3.25 asegura que las clases de homotopía tiene una regla de composición: $[g]\,[f] := [g \circ f]$, para $[f] \in [Z,X]$ y $[g] \in [X,Y]$, es un elemento bien definido de $[Z,Y]$.

Entonces, hay una categoría $\underline{\mathsf{Htp}}$ cuyos objetos son todos los espacios topológicos, pero los morfismos son las *clases de homotopía* de funciones continuas: $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Htp}}(X,Y) = [X,Y]$. Este es un ejemplo de una categoría cuyos morfismos no son funciones, pero todas las reglas de "composición de flechas" siguen válidas como si fueran funciones.

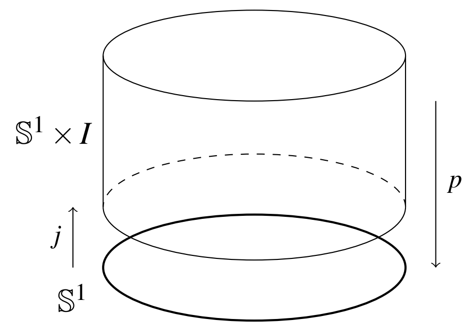
Las asignaciones $\mathcal{H}X := X$, $\mathcal{H}f := [f]$ definen un funtor $\mathcal{H}\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Htp}$.

Definición 3.28. Una función continua $f\colon X \to Y$ es una **equivalencia de homotopía** si $[f]$ es un isomorfismo en la categoría Htp. En otras palabras: hay un morfismo $[g] \in [Y,X]$ tal que $[g]\,[f] = [1_X]$ y $[f]\,[g] = [1_Y]$. Más explícitamente, hay una función continua $g \in C(Y,X)$ tal que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_Y$.

Dos espacios topológicos X, Y son **homotópicamente equivalentes** (o *del mismo tipo de homotopía*) si son isomorfos en la categoría Htp; esto es, si hay una equivalencia de homotopía $f\colon X \to Y$.

Un espacio topológico X es **contractible** si la aplicación identidad 1_X es homotópica a una función constante: $1_X \simeq c$, donde $c\colon X \to X$ tiene imagen puntual $\{p\}$.

Ejemplo 3.29. El *círculo* $\mathbb{S}^1$ y el *cilindro recto circular* $\mathbb{S}^1 \times I$ no son homeomorfos, pero sí son homotópicamente equivalentes. Sea $j\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 \times I : z \mapsto (z,0)$ la inclusión del círculo como la base inferior del cilindro; y sea $p\colon \mathbb{S}^1 \times I \to \mathbb{S}^1 : (z,s) \mapsto z$. Entonces $p \circ j = 1_{\mathbb{S}^1}$ obviamente. Por otro lado, $j \circ p$ es la proyección del cilindro sobre su base inferior. Defínase $F(z,s,t) := (z,st)$; esta es una homotopía, evidentemente continua, de $f_0 = j \circ p$ en $f_1 = 1_{\mathbb{S}^1 \times I}$. Se concluye que $j \circ p \simeq 1_{\mathbb{S}^1 \times I}$. Obsérvese que F es una homotopía relativa a la base inferior $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$.



Más generalmente, un subespacio $A \subseteq X$ es una **retracción** de X si la inclusión $i\colon A \rightarrowtail X$ tiene un inverso a la izquierda $r\colon X \to A$ en la categoría Top; es decir, r es continua y $r \circ i = 1_A$. Dícese que A es una **retracción por deformación** si $i \circ r \simeq 1_X$. Por lo visto, una retracción por deformación de X es del mismo tipo de homotopía que el espacio X. $\Diamond$

Lema 3.30. *Un espacio topológico X es contractible si y sólo si es homotópicamente equivalente a un punto $\{p\}$.*

Demostración. Si X es contractible, hay una homotopía F entre 1_X y una función constante c con $c(x) = x_0$ para algún $x_0 \in X$. Si $A = \{x_0\}$, sea $i\colon A \rightarrowtail X$ la inclusión. Entonces $c \circ i = 1_A$, mientras $i \circ c \simeq 1_X$ mediante F.

Por otro lado, si el espacio puntual $P = \{p\}$ es homotópicamente equivalente a X, hay equivalencias de homotopía $f\colon X \to P$ y $g\colon P \to X$ tales que $g \circ f \simeq 1_X$ y $f \circ g \simeq 1_P$. (De hecho, en este caso $f \circ g = 1_P$ porque no hay otra alternativa.) La función $c := g \circ f : X \to X$ es la función constante de valor $g(p)$ y vale $c \simeq 1_X$. $\square$

Ejemplo 3.31. El *espacio vectorial* $\mathbb{R}^n$ es contractible, para cada $n \in \mathbb{N}$. En efecto, la función $F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n : (x,t) \mapsto tx$ es una homotopía entre $1_{\mathbb{R}^n}$ y la función constante 0.

Del mismo modo, la **bola unitaria cerrada** $\mathbb{B}^n := \{\, x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1 \,\}$ es también contractible. $\Diamond$

3.3 El grupo fundamental de un espacio puntuado

Los *caminos* $f\colon I \to X$ en un espacio topológico X están ligados (literalmente) por una operación llamado *concatenación*[6] o simplemente *producto*.

Definición 3.32. Si $f\colon I \to X$ es un camino de p a q y si $g\colon I \to X$ es un camino de q a r, su **producto** $f * g$ ("f seguido por g") es el camino h de p a r dado por

$$h(s) := \begin{cases} f(2s) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ g(2s-1) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

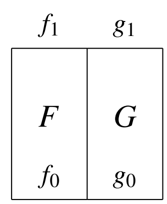
[6] La palabra *concatenación* significa "unión en cadena".

Lema 3.33. *Si f_0, f_1 son caminos en X de p a q y si g_0, g_1 son caminos de q a r, tales que $f_0 \doteq f_1$ y $g_0 \doteq g_1$, entonces $f_0 * g_0 \doteq f_1 * g_1$.*

Demostración. Sea F una homotopía de caminos entre f_0 y f_1 y sea G una homotopía de caminos entre g_0 y g_1. Defínase $H \colon I \times I \to X$ por

$$H(s,t) := \begin{cases} F(2s,t) & \text{si } 0 \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ G(2s-1,t) & \text{si } \frac{1}{2} \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Fíjese que H está bien definida porque $F(1,t) = x_1 = G(0,t)$ pata todo t. Es fácil comprobar ahora que H es una homotopía de caminos entre $f_0 * g_0$ y $f_1 * g_1$.



El cuadro arriba ilustra el dominio $I \times I$ de la homotopía H, con coordenadas (s,t). □

Si $[f]$ ahora denota la clase de homotopía del camino f (para la relación $\doteq$ de equivalencia), el producto de clases $[f] * [g] := [f * g]$ está bien definido, pero solamente para caminos que son concatenables —esto es, cuando $f(1) = g(0)$. Para obtener un producto de clases sin esta restricción,[7] conviene considerar el caso de los caminos que empiezan y termina en el mismo punto.

Definición 3.34. Sea X un espacio topológico; elíjase un punto $p \in X$, arbitrario pero fijo,[8] llamado **punto de base** del espacio puntuado (X,p). Un camino $f \colon I \to X$ tal que $f(0) = f(1) = p$ se llama un **lazo** basado en p.

Lema 3.35. *Las clases de homotopía de los lazos basados en p forman un grupo.*

Demostración. Hay que mostrar que la operación de producto $[f] * [g] := [f * g]$ (a) posee un elemento unidad; (b) es asociativa; y (c) tiene un inverso para cada clase.

Ad (a): El elemento unidad es, desde luego, la clase $1 := [c]$ del *lazo constante*: $c(s) = p$ para $0 \leq s \leq 1$. Hay que comprobar que $[f * c] = [f] = [c * f]$, es decir, que $f * c \doteq f \doteq c * f$, para cada lazo f basado en p.

[7] Las clases de caminos en X, sin restricción alguna sobre sus puntos extremos, forman un *grupoide*, llamado el **grupoide fundamental** de X. Un grupoide es un conjunto con una multiplicación parcialmente definida, pero asociativa y con unidades e inversos; más formalmente, un **grupoide** es una categoría pequeña en donde cada morfismo es un isomorfismo.

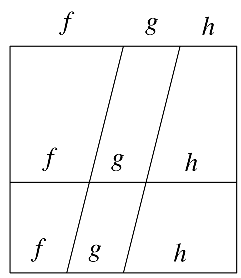
[8] Si el espacio X es conexo por caminos, la discusión que sigue no depende de la posición de p.

Una homotopía de caminos F entre $f * c$ y f viene dada por

$$F(s,t) := \begin{cases} f(2s/(1+t)) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2}(1+t), \\ p & \text{si} \quad \frac{1}{2}(1+t) \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Para el caso de $f \simeq c * f$, hay una homotopía similar (véase el cuadro anterior).

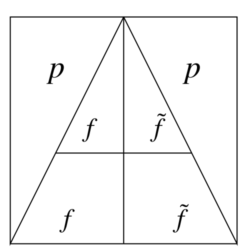
Ad (b): Para la asociatividad, hay que mostrar que $(f * g) * h \simeq f * (g * h)$ cuando f, g, h son tres lazos basados en p.



He aquí una homotopía de caminos G que logra ese propósito:

$$G(s,t) := \begin{cases} f(4s/(1+t)) & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{4}(1+t), \\ g(4s-t-1) & \text{si} \quad \frac{1}{4}(1+t) \leq s \leq \frac{1}{4}(2+t), \\ h((4s-t-2)/(2-t)) & \text{si} \quad \frac{1}{4}(2+t) \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Ad (c): Dado un lazo f basado en p, su *lazo inverso* g es dado por $\tilde{f}(s) := f(1-s)$. Hay que mostrar que $f * \tilde{f} \simeq c$.



Una homotopía de caminos entre $f * \tilde{f}$ y c está dada por

$$H(s,t) := \begin{cases} p & \text{si} \quad 0 \leq s \leq \frac{1}{2}t, \\ f(2s-t) & \text{si} \quad \frac{1}{2}t \leq s \leq \frac{1}{2}, \\ \tilde{f}(2-2s-t) & \text{si} \quad \frac{1}{2} \leq s \leq \frac{1}{2}(2-t), \\ p & \text{si} \quad \frac{1}{2}(2-t) \leq s \leq 1. \end{cases}$$

El cambio de variable $s \mapsto 1-s$ ahora implica que $\tilde{f} * f \simeq c$ también. □

Definición 3.36. Si (X,p) es un espacio topológico puntuado, el grupo $\pi_1(X,p)$ de las clases de homotopía de lazos basados en p se llama el **grupo fundamental** de (X,p).

Lema 3.37. *Sea $u\colon I \to X$ un camino en X de p a q y sea $\tilde{u}$ su camino inverso de q a p. Entonces la correspondencia*

$$\beta_u : \pi_1(X,q) \to \pi_1(X,p) : [f] \mapsto [u * f * \tilde{u}]$$

es un isomorfismo de grupos.

Demostración. Fíjese que si f es un lazo basado en q, entonces $u * f * \tilde{u}$ es un lazo basado en p; y que la clase de homotopía $[u * f * \tilde{u}]$ depende sólo de $[f]$, en vista del Lema 3.33. Esto dice que la correspondencia β_u está bien definida.

Si f, g son dos lazos basados en q, entonces

$$\beta_u[f*g] = [u*f*g*\tilde{u}] = [u*f*\tilde{u}*u*g*\tilde{u}] = \beta_u[f]*\beta_u[g],$$

así que β_u es un homomorfismo de grupos. Del mismo modo, $\beta_{\tilde{u}}\colon [k] \mapsto [\tilde{u}*k*u]$ es un homomorfismo de grupos de $\pi_1(X,p)$ en $\pi_1(X,q)$, y las identidades $\beta_{\tilde{u}}(\beta_u[f]) = [f]$ y $\beta_u(\beta_{\tilde{u}}[k]) = [k]$ muestran que β_u es un isomorfismo con inverso $\beta_{\tilde{u}}$. □

En consecuencia, si X es un espacio conexo por caminos, la *clase de isomorfismo* del grupo fundamental no depende del punto de base. Sin embargo, los isomorfismos concretos β_u dependen de $[u]$; aun en este caso, es preferible mantener una mención explícita del punto de base. Dicho de otra manera, se trabaja con la categoría de espacios topológicos puntuados.

Definición 3.38. Un espacio topológico X es **simplemente conexo** si es conexo por caminos y además $\pi_1(X,p) = 0$ es el grupo trivial[9] (de un sólo elemento) para algún $p \in X$; y por tanto, para todo $p \in X$.

[9] Algunos autores denotan el grupo trivial por 1, otros por 0. El segundo convenio es más natural para grupos abelianos. Aunque $\pi_1(X,p)$ no es abeliano en general, la denotación de su caso trivial por 0 es un convenio socialmente aceptado.

Lema 3.39. *En un espacio simplemente conexo, cualquier par de caminos con el mismo punto inicial y el mismo punto final son homotópicos.*

Demostración. Si X es simplemente conexo y si f, g son dos caminos en X de p a q, entonces $f * \tilde{g}$ es un lazo basado en p. Sea c el lazo constante basado en p. La hipótesis $\pi_1(X, p) = 0$ implica que $f * \tilde{g} \dot{\simeq} c$, así que $[g] = [c * g] = [f * \tilde{g} * g] = [f]$. □

► La correspondencia entre un espacio puntuado y su grupo fundamental es funtorial. Para ver eso, hay que asociar establecer la regla de correspondencia entre sus morfismos.

Definición 3.40. Sea $h\colon X \to Y$ una función continua tal que $h(p) = q$. Entonces hay un homomorfismo de grupos $h_*\colon \pi_1(X, p) \to \pi_1(Y, q)$ dado por $h_*[f] := [h \circ f]$.

En efecto, si $f_0 \dot{\simeq} f_1$ son lazos homotópicos basados en p y si $F\colon I \times I \to X$ es una homotopía entre f_0 y f_1, entonces $h \circ F\colon I \times I \to Y$ es una homotopía entre $h \circ f_0$ y $h \circ f_1$. En consecuencia, la aplicación $[f] \mapsto [h \circ f]$ está bien definida. La definición del producto de lazos conlleva la relación $h \circ (f * g) = (h \circ f) * (h \circ g)$; por lo tanto, h_* es un homomorfismo de grupos.

Lema 3.41. *Hay un* funtor $\pi_1\colon \mathsf{Top}_* \to \mathsf{Gr}$ *dado por* $(X, p) \mapsto \pi_1(X, p)$ *y por* $h \mapsto h_*$.

Demostración. Sólo hay que verificar que π_1 preserva composición de morfismos y respeta unidades.

Si $h\colon (X, p) \to (Y, q)$ y $g\colon (Y, q) \to (Z, r)$ son funciones continuas que respetan las puntos de base, y si f es un lazo en X basado en p, entonces $h \circ f\colon I \to Y$ es un lazo basado en q; y $g \circ (h \circ f)\colon I \to Z$ es un lazo basado en r. Además, vale

$$(g \circ h)_*[f] = [(g \circ h) \circ f] = [g \circ (h \circ f)] = g_*[h \circ f] = g_*(h_*[f]),$$

así que $(g \circ h)_* = g_* \circ h_* : \pi_1(X, p) \to \pi_1(Z, r)$.

Si $1_X : (X, p) \to (X, p)$ es la aplicación identidad, es claro que $(1_X)_* : [f] \mapsto [1_x \circ f] = [f]$ es el automorfismo idéntico de $\pi_1(X, p)$. □

Corolario 3.42. *Si hay una equivalencia de homotopía $h\colon X \to Y$ tal que $h(p) = q$, entonces $h_*\colon \pi_1(X, p) \to \pi_1(Y, q)$ es un isomorfismo de grupos.*

Demostración. Sea $g\colon Y \to X$ una función continua tal que $[g] \in [Y, X]$ es el inverso de $[h] \in [X, Y]$. Sea $F\colon X \times I \to X$ una homotopía (libre) entre $g \circ h$ y 1_X. Entonces $u\colon t \mapsto F(p, t)$ es un camino en X entre $g(q)$ y p. Entonces $\beta_u \circ g_* \circ h_* = 1_{\pi_1(X,p)}$; en particular, $h_*\colon \pi_1(X, p) \to \pi_1(Y, q)$ es un homomorfismo inyectivo.

De manera similar, si $G\colon Y \times I \to Y$ es una homotopía entre $h \circ g$ y 1_Y, hay un camino $v\colon t \mapsto G(q, 1 - t)$ entre q y $h(g(q))$. Entonces $h_* \circ g_* \circ (\beta_v)^{-1} = 1_{\pi_1(Y,q)}$; en particular, h_* es un homomorfismo sobreyectivo. □

Corolario 3.43. *Si A es una retracción por deformación de X, con $p \in A$, entonces $\pi_1(A,p) \simeq \pi_1(X,p)$.* ⊟

Ejemplo 3.44. El *círculo* $\mathbb{S}^1 = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$ es conexo por caminos. Por el Lema 3.37, cualquier punto de $\mathbb{S}^1$ servirá como punto de base para calcular su grupo fundamental. Como $\mathbb{S}^1$ es un *grupo* (multiplicativo), hay un punto de base preferido: el número 1, el cual es el elemento unidad del grupo. Se escribe $\pi_1(\mathbb{S}^1) := \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$, en forma abreviada.[10]

Para cada $n \in \mathbb{Z}$, hay un lazo en $\mathbb{S}^1$ dado por la función $z \mapsto z^n$. Para ser más preciso, considérese el camino $e\colon I \to \mathbb{S}^1$ dado por $e(t) := e^{2\pi it}$. Como e es continua con $e(0) = e(1) = 1$, este es un lazo basado en 1. De igual, manera, las funciones $e_n(t) := e^{2\pi int}$ definen lazos en $\mathbb{S}^1$ basados en 1, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

El caso e_0 es, desde luego, el lazo constante c. Es fácil comprobar que $e_m * e_n \doteq e_{m+n}$ para todo $m,n \in \mathbb{Z}$. El siguiente teorema muestra que estos lazos no son homotópicos entre sí y que cada lazo en el círculo (basado en 1) es homotópico a uno de los e_n. La conclusión es que la biyección $e_n \mapsto n$ es un isomorfismo de grupos entre $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ y el grupo aditivo $\mathbb{Z}$. ◊

► Vale la pena interrumpir la discusión de homotopía de lazos para notar una propiedad general de espacios métricos compactos. En un espacio métrico (X,ρ), el **diámetro** de una parte $A \subseteq X$ es $\operatorname{diam}(A) := \sup\{ \rho(x,y) : x,y \in A \}$.

Lema 3.45 (Lebesgue)**.** *Sea (X,ρ) un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{U} = \{ U_\alpha : \alpha \in J \}$ un cubrimiento abierto de X. Entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que cualquier $A \subseteq X$ con $\operatorname{diam}(A) < \varepsilon$ está incluido en algún U_α.*

Demostración. Si así no fuera, para cada $n \in \mathbb{N}$ habría una parte no vacía $A_n \subseteq X$ con $\operatorname{diam}(A_n) < 1/(n+1)$ tal que $A_n \setminus U_\alpha \neq \emptyset$ para todo $U_\alpha \in \mathcal{U}$. Al tomar un punto $x_n \in A_n$ para cada n, se obtendría una sucesión (x_n) en X; por la compacidad de X, esta sucesión tendría un punto adherente $z \in X$.

Entonces $z \in U_\beta$ para algún β; y habría una bola abierta $B_\rho(z;\delta)$ tal que $B_\rho(z;\delta) \subseteq U_\beta$. Entonces habría $n \in \mathbb{N}$ tal que $1/(n+1) < \frac{1}{2}\delta$ con $x_n \in B_\rho(z;\frac{1}{2}\delta)$. Como $\operatorname{diam} A_n < \frac{1}{2}\delta$, esto implicaría que $A_n \subseteq B_\rho(z;\delta) \subseteq U_\beta$, contrario a hipótesis. □

Corolario 3.46. *Sean $U_+ := \mathbb{S}^1 \setminus \{-1\}$, $U_- := \mathbb{S}^1 \setminus \{1\}$. Si $f\colon I \to \mathbb{S}^1$ es un camino, hay una partición $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = 1$ de I tal que cada subintervalo $[t_{i-1}, t_i]$ de la partición está incluido en $f^{-1}(U_+)$ o bien en $f^{-1}(U_-)$.*

Demostración. Fíjese que $\{U_+, U_-\}$ es un cubrimiento abierto de $\mathbb{S}^1$. Como $f(I) \subseteq \mathbb{S}^1$, los dos abiertos $\{f^{-1}(U_+), f^{-1}(U_-)\}$ forman un cubrimiento abierto de I. Si $\varepsilon > 0$ cumple el Lema 3.45 para este cubrimiento, basta tomar una partición de I tal que $t_{i+1} - t_i < \varepsilon$ para $i = 0,1,\dots,n-1$. □

[10] En general, si G es un grupo topológico con elemento unidad 1, se escribe $\pi_1(G) := \pi_1(G,1)$. En particular, se escribe $\pi_1(\mathbb{R}^n) := \pi_1(\mathbb{R}^n, 0)$.

Lema 3.47. *Si $f\colon I \to \mathbb{S}^1$ es un camino con $f(0) = 1$, y si $e\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ es la función continua dada por $e(t) := e^{2\pi it}$, hay un único camino $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ con $\tilde{f}(0) = 0$ tal que $e \circ \tilde{f} = f$.*

Demostración. Sea $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ la partición de I dado por el Corolario 3.46. Como $f(0) = 1 \notin U_-$, está claro que $[t_0, t_1] \subseteq f^{-1}(U_+)$. La restricción de e al intervalo $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ es un homeomorfismo entre $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y U_+, con función inversa $l_1\colon U_+ \to (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Defínase $\tilde{f}$ sobre $[t_0, t_1]$ por $\tilde{f}(t) := l_1(f(t))$ para $t_0 \leq t \leq t_1$.

Supóngase que $\tilde{f}$ ya haya sido definido sobre el intervalo $[t_0, t_k]$, con $k < n$. Ahora hay dos posibilidades:

- ⋆ si $[t_k, t_{k+1}] \subseteq f^{-1}(U_-)$, entonces $m < \tilde{f}(t_k) < m + 1$ para algún $m \in \mathbb{N}$; denótese por $l_k\colon U_- \to (m, m+1)$ la función inversa del homeomorfismo $e\colon (m, m+1) \to U_-$;

- ⋆ si $[t_k, t_{k+1}] \subseteq f^{-1}(U_+)$, entonces $m - \frac{1}{2} < \tilde{f}(t_k) < m + \frac{1}{2}$ para algún $n \in \mathbb{N}$; denótese por $l_k\colon U_+ \to (m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2})$ la función inversa de $e\colon (m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}) \to U_+$.

Ahora defínase $\tilde{f}$ sobre $[t_k, t_{k+1}]$ por $\tilde{f}(t) := l_k(f(t))$ para $t_k \leq t \leq t_{k+1}$. Como $l_{k-1}(f(t_k)) = \tilde{f}(t_k) = l_k(f(t_k))$, el resultado es una función continua $\tilde{f}$ bien definida sobre $[t_0, t_{k+1}]$. Después de n repeticiones de este proceso, se obtiene un camino continuo $\tilde{f}\colon I \to \mathbb{R}$ tal que $e(\tilde{f}(t)) = f(t)$ para $0 \leq t \leq 1$.

Si $\hat{f}\colon I \to \mathbb{R}$ es cualquier camino con $\hat{f}(0) = 0$ tal que $e \circ \hat{f} = f$, entonces la propiedad multiplicativa de e garantiza que

$$e(\hat{f}(t) - \tilde{f}(t)) = \frac{e(\hat{f}(t)}{e(\tilde{f}(t))} = \frac{f(t)}{f(t)} = 1 \quad \text{para todo} \quad t \in I,$$

así que $\hat{f}(t) - \tilde{f}(t) \in \mathbb{Z}$ para todo $t \in I$. Como I es conexo y la función $\hat{f} - \tilde{f}\colon I \to \mathbb{Z}$ es continuo, esta diferencia es constante. La condición inicial $\hat{f}(0) = 0 = \tilde{f}(0)$ obliga que esta constante sea 0, así que $\hat{f}(t) \equiv \tilde{f}(t)$ para $0 \leq t \leq 1$. Esto comprueba la unicidad de $\tilde{f}$. □

El resultado del Lema anterior puede mejorarse, con leves cambios, para “levantar” una homotopía de caminos en $\mathbb{S}^1$ a una homotopía de caminos en $\mathbb{R}$. Esto se hace a continuación.

Lema 3.48. *Si $F\colon I \times I \to \mathbb{S}^1$ es una homotopía tal que $F(0,0) = 1$, hay una única homotopía $\widetilde{F}\colon I \times I \to \mathbb{R}$ con $\widetilde{F}(0,0) = 0$ tal que $e \circ \widetilde{F} = F$.*

Demostración. Es cuestión de repetir la prueba del Lema 3.47, con las siguientes modificaciones. El Lema 3.45 garantiza la existencia de dos particiones $\{s_0, s_1, \dots, s_m\}$ y $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de I tales que cada $[s_i, s_{i+1}] \times [t_j, t_{j+1}]$ esté incluido en $F^{-1}(U_+)$ o bien en $F^{-1}(U_-)$. Como $F(0,0) = 1 \notin U_-$, está claro que $[s_0, s_1] \times [t_0, t_1] \subseteq F^{-1}(U_+)$. Defínase $\widetilde{F}$ sobre $[s_0, s_1] \times [t_0, t_1]$ por $\widetilde{F}(s,t) := l_1(F(s,t))$.

Habiendo extendido $\widetilde{F}$ al rectángulo $[s_0, s_k] \times [t_0, t_1]$, se obtiene un inverso local l_k de e y se define $\widetilde{F}(s,t) := l_k(F(s,t))$ sobre $[s_k, s_{k+1}] \times [t_0, t_1]$, de modo que $l_{k-1}(F(s_k, t)) = \tilde{F}(s_k, t) =$

$l_k(F(s_k,t))$ para $t_0 \leq t \leq t_1$. Como las dos versiones de $\widetilde{F}$ coinciden sobre $\{s_k\} \times [t_0,t_1]$, la función extendida está bien definida y es continua. Luego de m repeticiones de este proceso, $\widetilde{F}$ está definido sobre $I \times [t_0,t_1]$.

Si $\widetilde{F}$ ya ha sido extendido al conjunto $\bigl(I \times [t_0,t_j]\bigr) \cup \bigl([s_0,s_k] \times [t_j,t_{j+1}]\bigr)$, es posible extenderla al rectángulo $[s_k,s_{k+1}] \times [t_j,t_{j+1}] \subseteq F^{-1}(U_\pm)$ de modo que coincide con la versión vieja sobre los lados $\bigl(\{s_k\} \times [t_j,t_{j+1}]\bigr) \cup \bigl([s_k,s_{k+1}] \times \{t_j\}\bigr)$. De este modo, $\widetilde{F}$ se define eventualmente como función continua sobre todo $I \times I$ tal que $e \circ \widetilde{F} = F$.

Si $\widehat{F} \colon I \times I \to \mathbb{R}$ es cualquier homotopía con $\widehat{F}(0,0) = 0$ tal que $e \circ \widehat{F} = F$, se obtiene $e \circ (\widehat{F} - \widetilde{F}) = \{1\}$, así que $\widehat{F} - \widetilde{F} \colon I \times I \to \mathbb{Z}$ es continua. Como $I \times I$ es conexo y $\widehat{F}(0,0) = 0 = \widetilde{F}(0,0)$, se concluye que $\widehat{F}(s,t) \equiv \widetilde{F}(s,t)$ para todo $s,t \in I$. $\square$

Teorema 3.49. *Cada lazo en el círculo $\mathbb{S}^1$ basado en 1 es homotópico a exactamente uno de los lazos e_m. Como consecuencia, vale $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$.*

Demostración. Sea $f \colon I \to \mathbb{S}^1$ un lazo con $f(0) = f(1) = 1$. Por el Lema 3.47 hay un único camino $\tilde{f} \colon I \to \mathbb{R}$ con $\tilde{f}(0) = 0$ tal que $e \circ \tilde{f} = f$. En particular, como $f(1) = 1$ hay un entero $m \in \mathbb{Z}$, determinado por la unicidad de $\tilde{f}$, tal que $\tilde{f}(1) =: m$. Este número entero m se llama el **grado** ($\operatorname{gr} f$) del lazo f.

Para el lazo $e_m \colon t \mapsto e^{2\pi imt}$, es evidente que $\tilde{e}_m(t) \equiv mt$. Entonces $\operatorname{gr} e_m = m$.

Si g es cualquier lazo de grado m, defínase una homotopía $\widetilde{G} \colon I \times I \to \mathbb{R}$ entre $\tilde{g}$ y $\tilde{e}_m$ por

$$\widetilde{G}(s,t) := (1-t)\tilde{g}(s) + t\tilde{e}_m(s).$$

Fíjese que $\tilde{g}_t \colon s \mapsto G(s,t)$ cumple $\tilde{g}_t(1) = m$ para todo $t \in I$. Al componer con $e \colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$, la función $G := e \circ \widetilde{G}$ es una homotopía de lazos entre g y e_m, donde cada lazo intermedio $g_t := e \circ \tilde{g}_t$ tiene grado m.

Por otro lado, si $f_0 \simeq f_1$ son dos lazos homotópicos en $\mathbb{S}^1$ —basados en 1— mediante una homotopía $F \colon I \times I \to \mathbb{S}^1$, el Lema 3.48 produce una homotopía $\widetilde{F} \colon I \times I \to \mathbb{R}$ con $\widetilde{F}(0,0) = 0$ tal que $e \circ \widetilde{F} = F$. Ahora $e(\widetilde{F}(0,t)) = F(0,t) = 1$ para todo t, así que $t \mapsto \widetilde{F}(0,t)$ es una función continua sobre I con valores en $\mathbb{Z}$; luego esta función es constante. En particular, vale $\widetilde{F}(0,1) = \widetilde{F}(0,0) = 0$.

Por la unicidad en el enunciado del Lema 3.47, se obtiene $\widetilde{F}(s,0) = \tilde{f}_0(s)$ y $\widetilde{F}(s,1) = \tilde{f}_1(s)$ para $s \in I$. Por otro lado, como $F(1,t) \equiv 1$, la función $t \mapsto \widetilde{F}(1,t)$ es una función continua de I en $\mathbb{Z}$ y por ende constante; se concluye que

$$\operatorname{gr} f_0 = \tilde{f}_0(1) = \widetilde{F}(1,0) = \widetilde{F}(1,1) = \tilde{f}_1(1) = \operatorname{gr} f_1.$$

En conclusión: dos lazos en $\mathbb{S}^1$ son homotópicos si y sólo si poseen el mismo grado.

En resumen, se ha mostrado que la función $\pi_1(\mathbb{S}^1,1) \to \mathbb{Z}$ dado por $[f] \mapsto \operatorname{gr} f$ está bien definida; y que $f \simeq e_m$ si y sólo si $\operatorname{gr} f = m$, así que esta función es biyectiva. En consecuencia, $\pi_1(\mathbb{S}^1,1) = \{\,[e_m] : m \in \mathbb{Z}\,\}$. La relaciones $e_m * e_n \simeq e_{m+n}$ comprueban que esta función $[e_m] \mapsto m$ es un *isomorfismo de grupos* entre $\pi_1(\mathbb{S}^1,1)$ y $\mathbb{Z}$. $\square$

Lema 3.50. *El círculo $\mathbb{S}^1$ no es una retracción del disco cerrado*

$$\mathbb{B}^2 := \{\,(s,t) \in \mathbb{R}^2 : s^2 + t^2 \leq 1\,\} = \{\,z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\,\}.$$

Demostración. Si hubiera una función continua $r\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{S}^1$ tal que $r(z) = z$ para $z \in \mathbb{S}^1$, entonces $r \circ i = 1_{\mathbb{S}^1}$ donde $i\colon \mathbb{S}^1 \rightarrowtail \mathbb{B}^2$ es la inclusión. Por funtorialidad, se obtendría $r_* \circ i_* = 1_{\mathbb{Z}}$, donde $i_*\colon \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \to \pi_1(\mathbb{B}^2, 1)$ y $r_*\colon \pi_1(\mathbb{B}^2, 1) \to \pi_1(\mathbb{S}^1, 1)$. Pero $\mathbb{B}^2$ es contractible, así que $\pi_1(\mathbb{B}^2, 1) \simeq \pi_1(\mathbb{B}^2, 0) = 0$, de modo que $r_* \circ i_*$ sería una composición de dos homomorfismos nulos, $\mathbb{Z} \xrightarrow{i^*} 0 \xrightarrow{r^*} \mathbb{Z}$, y por ende $r_* \circ i_* = 0 \neq 1_{\mathbb{Z}}$. Esta contradicción niega la existencia de una retracción r. $\square$

3.4 Espacios recubridores

Antes de calcular más ejemplos de grupos fundamentales, vale la pena examinar un tema que utiliza el método de la demostración del Teorema 3.49.

Definición 3.51. Una función continua y sobreyectiva $p\colon \widetilde{X} \to X$ es una **proyección recubridora** si cada $x \in X$ posee un vecindario abierto U tal que $p^{-1}(U) = \biguplus_{\alpha \in J} V_\alpha$ es una unión disjunta de abiertos V_α en $\widetilde{X}$ y cada restricción $p|_{V_\alpha}\colon V_\alpha \to U$ es un homeomorfismo.

Si $\widetilde{X}$ es un espacio topológico tal que existe una proyección recubridora $p\colon \widetilde{X} \to X$, el espacio $\widetilde{X}$ se llama un **espacio recubridor**[11] de X.

Cada **fibra** $p^{-1}(\{x\})$ de una proyección recubridora es *discreta*: si $y \in \widetilde{X}$ con $p(y) = x$, entonces $y \in V_\alpha$ para algún α. Este V_α es un abierto en $\widetilde{X}$ y $p^{-1}(\{x\}) \cap V_\alpha = \{y\}$ porque $p|_{V_\alpha}\colon V_\alpha \to U$ es inyectivo, así que $\{y\}$ es abierto en (la topología relativa de) $p^{-1}(\{x\})$.

Ejemplo 3.52. Un homeomorfismo $f\colon Y \to X$ es una proyección recubridora, donde cada preimagen $f^{-1}(U)$ es homeomorfo a U mediante f.

Si J es un espacio topológico discreto, la proyección $\mathrm{pr}_1\colon X \times J \to X$ es una proyección recubridora. En este caso, $\mathrm{pr}_1(U) = U \times J = \biguplus_{j \in J}(U \times \{j\})$ donde $\mathrm{pr}_1\colon (x, j) \mapsto x$ es un homeomorfismo de $U \times \{j\}$ en U. $\lozenge$

Ejemplo 3.53. La función $e\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$ es una proyección recubridora. En efecto, si $z \in \mathbb{S}^1$, elíjase $t \in \mathbb{R}$ tal que $e(t) = z$; entonces $e(t+n) = z$ también, para cualquier $n \in \mathbb{Z}$. Tómese como vecindario U_z de z el arco semicircular $U_z := \{\, w \in \mathbb{S}^1 : |w - z| < \sqrt{2}\,\}$, centrado en z. Es fácil ver que

$$e^{-1}(U_z) = \biguplus_{n \in \mathbb{Z}} (t + n - \tfrac{1}{4}, t + n + \tfrac{1}{4}),$$

y que $e\colon (t + n - \frac{1}{4}, t + n + \frac{1}{4}) \to U_z$ es un homeomorfismo, cuya función inverso es el "logaritmo" complejo $l_n\colon w \mapsto t + n + (2\pi)^{-1} \arg(w/z)$.

Fíjese que $e^{-1}(z) = \{\, t + n : n \in \mathbb{Z}\,\}$ es un espacio discreto, homeomorfo a $\mathbb{Z}$. $\lozenge$

[11] En français, on dit **revêtement** de X.

Ejemplo 3.54. Si $m \in \mathbb{N}^*$, la función $p_m \colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1 : z \mapsto z^m$ es una proyección recubridora. En este caso, la fibra de un punto $x = z^m$ es $\{ e^{2\pi ik/m} z : k = 0, 1, \dots, m-1 \}$, que forma los m vértices de un polígono regular inscrito en $\mathbb{S}^1$. $\Diamond$

Ejemplo 3.55. La aplicación cociente $q \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ es una proyección recubridora: en este caso q es dos-a-uno y sus fibras son pares de puntos antipodales en $\mathbb{S}^2$. $\Diamond$

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Z \arrow[ur, dashed, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"] & X \end{tikzcd}$$

Definición 3.56. Sea $p \colon \widetilde{X} \to X$ una función continua (no necesariamente una proyección recubridora). Si $f \colon Z \to X$ es una función continua, un **levantamiento**[12] de f a través de p es una función continua $\tilde{f} \colon Z \to \widetilde{X}$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$.

La propiedad esencial de un espacio recubridor de X es la posibilidad de levantar caminos y homotopías en X a caminos y homotopías en X. Los dos lemas siguientes emplean los argumentos ya vistos en los lemas 3.47 y 3.48 en un contexto más amplio.

Lema 3.57. *Si $p \colon \widetilde{X} \to X$ es una proyección recubridora con $p(y) = x$, cada camino $f \colon I \to X$ con $f(0) = x$ posee un único levantamiento a un camino $\tilde{f} \colon I \to \widetilde{X}$ con $\tilde{f}(0) = y$.*

Demostración. Por la Definición 3.51, el espacio X tiene un cubrimiento $\mathcal{U}$ por abiertos U tales que cada $p^{-1}(U)$ es una unión disjunta de abiertos en $\widetilde{X}$ homeomorfos a U. Los $f^{-1}(U)$ forman un cubrimiento abierto de I. Si $\varepsilon > 0$ cumple el Lema 3.45 para este cubrimiento, hay una partición $\{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ de I tal que $t_{i+1} - t_i < \varepsilon$ para cada i; y por ende cada trozo $f([t_{i-1}, t_i])$ del camino f es parte de algún $U \in \mathcal{U}$.

Defínase $\tilde{f}(0) := y$. Tómese $U_0 \in \mathcal{U}$ tal que $f([t_0, t_1]) \subseteq U_0$. Sea $V_0 \subseteq p^{-1}(U_0)$ el (único) abierto en $\widetilde{X}$ tal que $y \in V_0$ y $p|_{V_0} \colon V_0 \to U_0$ es un homeomorfismo. Defínase

$$\tilde{f}(t) := (p|_{V_0})^{-1}(f(t)) \quad \text{para} \quad t_0 < t \leq t_1,$$

de tal manera que $\tilde{f} \colon [t_0, t_1] \to V_0$ es continua y cumple $p(\tilde{f}(t)) = f(t)$ para $t \in [t_0, t_1]$.

Supóngase que $\tilde{f}$ ya haya sido definido sobre el intervalo $[t_0, t_k]$, con $k < n$. Si $f(t_k) \in U_k \in \mathcal{U}$, sea $V_k \subseteq p^{-1}(U_k)$ el único abierto en $\widetilde{X}$ tal que $\tilde{f}(t_k) \in V_k$ y $p|_{V_k} \colon V_k \to U_k$ es un homeomorfismo. Defínase $\tilde{f}(t) := (p|_{V_k})^{-1}(f(t))$ para $t_k < t \leq t_{k+1}$. De este modo, se extiende $\tilde{f}$ como levantamiento continuo de f sobre el intervalo $[t_0, t_{k+1}]$. Después de n repeticiones de este proceso, se obtiene un levantamiento $\tilde{f}$ de f sobre todo I.

[12] Este es un **lifting** en inglés (como también en español peninsular).

Para mostrar la *unicidad* de $\tilde{f}$, basta hacerlo en cada uno de estos trozos. Entonces, sea $\hat{f}\colon [t_0,t_1] \to \mathbb{R}$ cualquier levantamiento continuo de f sobre $[t_0,t_1]$ tal que $\hat{f}(0) = y = \tilde{f}(0)$. Fíjese que $\hat{f}([t_0,t_1])$ es una parte *conexa* de la unión disjunta $p^{-1}(U_0) = \biguplus_\alpha V_\alpha$ y por tanto es parte de uno solo de estos abiertos V_α; como $\hat{f}(t_0) = y \in V_0$, se concluye que $\hat{f}([t_0,t_1]) \subseteq V_0$. Si $t \in [t_0,t_1]$, entonces $\hat{f}(t) = (p|_{V_0})^{-1}(f(t)) = \tilde{f}(t)$ porque $p|_{V_0}$ es inyectiva; luego $\hat{f}$ y $\tilde{f}$ coinciden sobre $[t_0,t_1]$. Al repetir este argumento para cada subintervalo $[t_k,t_{k+1}]$, se concluye que $\hat{f}(t) = \tilde{f}(t)$ para todo $t \in I$. $\square$

Lema 3.58. *Si $p\colon \widetilde{X} \to X$ es una proyección recubridora con $p(y) = x$, cada homotopía de caminos $F\colon I \times I \to X$ con $F(0,0) = x$ posee un único levantamiento a una homotopía de caminos $\widetilde{F}\colon I \times I \to \widetilde{X}$ con $\widetilde{F}(0,0) = y$.*

Demostración. Es cuestión de modificar apropiadamente la demostración del Lema 3.48. A la luz de la prueba anterior, se deja los detalles al estimado lector. $\square$

Lema 3.59. *Si $p\colon \widetilde{X} \to X$ es una proyección recubridora con $p(y) = x$, el homomorfismo $p_*\colon \pi_1(\widetilde{X},y) \to \pi_1(X,x)$ es inyectivo.*

Demostración. Sea $\tilde{f}\colon I \to \widetilde{X}$ un lazo basado en y tal que $p_*[\tilde{f}] = [p \circ \tilde{f}] = 0$ en $\pi_1(X,x)$. Entonces $f := p \circ \tilde{f}$ es un lazo en X basado en x tal que $f \simeq c_x$ —donde c_x es el lazo constante con valor x.

Hay una homotopía de lazos $F\colon I \times I \to X$ entre f y c_x; en particular, vale $F(0,0) = f(0) = x$. El Lema 3.58 produce una única homotopía $\widetilde{F}\colon I \times I \to \widetilde{X}$ con $\widetilde{F}(0,0) = y$. El camino $s \mapsto \widetilde{F}(s,0)$ en $\widetilde{X}$ cubre el camino $s \mapsto F(s,0) = f(s)$ en X y por tanto coincide con el lazo $\tilde{f}$, por la unicidad del levantamiento de f con punto inicial y, garantizado por el Lema 3.57. En otras palabras, vale $\widetilde{F}(s,0) = \tilde{f}(s)$ para $s \in I$.

El mismo argumento muestra que $\widetilde{F}(s,1) \equiv y \equiv c_y(s)$ para $s \in I$. Como $F(0,t) \equiv x$, $F(1,t) \equiv x$ para $t \in I$, por ser f una homotopía de lazos basados en x, ese argumento también muestra que $\widetilde{F}(0,t) \equiv y$, $\widetilde{F}(1,t) \equiv y$ para $t \in I$. En resumen: $\widetilde{F}$ es una homotopía *de lazos* entre $\tilde{f}$ y c_y. Se concluye que $[\tilde{f}] = 0$ en $\pi_1(\widetilde{X},y)$. Se ha mostrado que $\ker p_* = 0$, así que p_* es inyectivo. $\square$

Lema 3.60. *Sea $p\colon \widetilde{X} \to X$ una proyección recubridora con $p(y) = x$, y supóngase que el espacio recubridor $\widetilde{X}$ es conexo por caminos. Entonces hay una biyección de conjuntos*

$$\pi_1(X,x)/p_*(\pi_1(\widetilde{X},y)) \longleftrightarrow p^{-1}(\{x\}),$$

que lleva la coclase de $[f]$ en el punto $\tilde{f}(1)$, cuando f es un lazo en X basado en x, siendo $\tilde{f}\colon I \to \widetilde{X}$ su levantamiento determinado por la condición $\tilde{f}(0) = y$.

Demostración. Defínase $\phi(f) := \tilde{f}(1)$ si f es un lazo en X basado en x. Como $p(\tilde{f}(1)) = f(1) = x$, está claro que $\tilde{f}(1) \in p^{-1}(\{x\})$.

Si g es otro lazo en x tal que $f \simeq g$, hay una homotopía de lazos H en X entre f y g. El Lema 3.58 produce una homotopía $\widetilde{H}$ en $\widetilde{X}$ tal que $\widetilde{H}(0,t) \equiv y$. Ahora bien, los levantamientos respectivos $\tilde{f}\colon s \mapsto \widetilde{H}(s,0)$ de f, y $\tilde{g}\colon s \mapsto \widetilde{H}(s,1)$ de g, son caminos en $\widetilde{X}$ que no necesariamente son lazos. Sin embargo, la función $t \mapsto \widetilde{H}(1,t)$ es un camino de $\tilde{f}(1)$ a $\tilde{g}(1)$ en el espacio topológico *discreto* $p^{-1}(\{x\})$ y por ende es *constante*. Se concluye que $\tilde{f}(1) = \tilde{g}(1)$. Luego $\phi(f)$ depende sólo de la clase de homotopía $[f]$; la receta $[f] \mapsto \tilde{f}(1)$ es una función bien definida $\bar{\phi}\colon \pi_1(X,x) \to p^{-1}(\{x\})$.

Como $\widetilde{X}$ es conexo por caminos, para cada $z \in p^{-1}(\{x\})$ hay un camino $\tilde{k}$ en $\widetilde{X}$ de y a z. Entonces $k := p \circ \tilde{k}$ es un *lazo* en X basado en x tal que $\bar{\phi}([k]) = z$. Por tanto, la función $\bar{\phi}$ es sobreyectiva.

Si ahora $[f]$ y $[h]$ son elementos de $\pi_1(X,x)$ en la misma coclase (a la derecha)[13] del subgrupo $p_*(\pi_1(\widetilde{X},y))$, hay un lazo l en X con $[l] \in p_*(\pi_1(\widetilde{X},y))$ tal que $[h] = [l] * [f] = [l * f]$ en $\pi_1(X,x)$. Hay levantamientos únicos $\tilde{f}$ de f; $\tilde{h}$ de h; y $\tilde{l}$ de l; a caminos en $\widetilde{X}$ con punto inicial y. La condición $[l] \in p_*(\pi_1(\widetilde{X},y))$ dice que $\tilde{l}$ es un *lazo* en $\widetilde{X}$ basado en y. Además, el levantamiento de $l * f$ es $\tilde{l} * \tilde{f}$, por unicidad. Ahora

$$(\tilde{l} * \tilde{f})(1) = \tilde{f}(1), \quad \text{así que} \quad \bar{\phi}([h]) = \tilde{h}(1) = \tilde{f}(1) = \bar{\phi}([f]).$$

En conclusión, $\bar{\phi}$ es constante sobre las coclases, y de este modo define una función sobreyectiva $\Phi\colon \pi_1(X,x)/p_*(\pi_1(\widetilde{X},y)) \to p^{-1}(\{x\})$.

Obsérvese que Φ tiene el mismo valor sobre las coclases de dos elementos $[f]$ y $[u]$ si y sólo si $\bar{\phi}([f]) = \bar{\phi}([u])$; si y sólo si $\tilde{f}(1) = \tilde{u}(1)$. Si $\tilde{v}$ es el camino inverso de $\tilde{u}$, entonces $\tilde{f} * \tilde{v}$ es un lazo en X basado en y; luego $[\tilde{f} * \tilde{v}]$ es un elemento del grupo $\pi_1(\widetilde{X},y)$. Sea $v := p \circ \tilde{v}$, el cual es el lazo inverso de u. Si ahora g es un lazo en X tal que $[g] = p_*([\tilde{f} * \tilde{v}])$, entonces

$$[g * u] = [(f * v) * u] = [f * (v * u)] = [f],$$

porque $v * u \simeq c_x$ y por ende $[v * u]$ es la identidad del grupo $\pi_1(X,x)$. Se ha comprobado que $[g] * [u] = [f]$, así que $[f]$ y $[u]$ están en la misma coclase (a la derecha) del subgrupo $p_*(\pi_1(\widetilde{X},y))$. La conclusión es que Φ es inyectiva. □

Corolario 3.61. *Si un espacio recubridor $\widetilde{X}$ de X es simplemente conexo, entonces $[f] \mapsto \tilde{f}(1)$ es una biyección entre $\pi_1(X,x)$ y la fibra $p^{-1}(\{x\})$.* ⊟

Por ejemplo, la función $e\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$ es una proyección recubridora y $\mathbb{R}$ es simplemente conexo, por ser contractible. Como $e^{-1}(1) = \mathbb{Z}$, se obtiene así una biyección entre $\pi_1(\mathbb{S}^1,1)$ y $\mathbb{Z}$, como ya era de esperar.

[13]En muchos casos, el grupo $\pi_1(X,x)$ no es abeliano y el subgrupo $p_*(\pi_1(\widetilde{X},y))$ no es un subgrupo normal. Entonces el cociente del enunciado no es necesariamente un grupo, sino solamente un conjunto de coclases. Por otro lado, el espacio topológico discreto $p^{-1}(\{x\})$ también se considera simplemente como conjunto. Para decirlo de otra forma, el enunciado del lema se refiere a un isomorfismo en la categoría Set.

► Esta forma de calcular el grupo fundamental del círculo $\mathbb{S}^1$ mediante proyección de un espacio recubridor simplemente conexo no sirve para calcular los grupos fundamentales de las esferas $\mathbb{S}^n$, para $n > 1$, por la buena razón de que $\mathbb{S}^n$ ya es simplemente conexo. Esta última afirmación no es obvio, porque $\mathbb{S}^n$ no es contractible. El cálculo de $\pi_1(\mathbb{S}^n)$ es un corolario a la siguiente Proposición, que tiene su interés propio.

Proposición 3.62. *Si el espacio topológico X es la unión $X = U \cup V$ de dos abiertos U y V con intersección no vacía $U \cap V$ que es conexo por caminos, tómese $q \in U \cap V$; entonces $\pi_1(X,q)$ es el grupo generado por sus dos subgrupos $i_*(\pi_1(U,q))$ y $j_*(\pi_1(V,q))$, donde $i\colon U \rightarrowtail X$, $j\colon V \rightarrowtail X$ son las inclusiones.*

Demostración. La inclusión $i\colon U \rightarrowtail X$ da lugar a un homomorfismo (que en general no es inyectivo) $i_*\colon \pi_1(U,q) \to \pi_1(X,q)$ por $i_*[g] = [i \circ g]$, si g es un *lazo en U* basado en q. Fíjese que el lazo g en U coincide con el lazo $i \circ g$ en X, pero la clase de homotopía $[i \circ g]$ puede incluir otros lazos que entran y salen de la parte $U \subseteq X$.

Sea f un lazo en X basado en q. Que $\pi_1(X,q)$ sea generado por los dos subgrupos mencionados significa que $[f]$ es un producto finito de clases $[f] = [f_1] * [f_2] * \cdots * [f_m]$, donde cada lazo f_k está incluido enteramente en U o bien enteramente en V. (Es evidente que se pueden combinar lazos contiguos, de modo que se tomen los f_k dentro de U y de V alternadamente.)

El par de abiertos $\{U,V\}$ es un cubrimiento abierto de X. Al usar el Lema 3.45 de igual manera que en la demostración del Corolario 3.46, se obtiene una partición $\{t_0,t_1,\dots,t_m\}$ de I tal que cada subintervalo $[t_k,t_{k+1}]$ esté incluido en $f^{-1}(U)$ o bien en $f^{-1}(V)$.

Si $f(t_k) \in U \setminus V$ para algún $k \in \{1,\dots,m-1\}$, entonces ni $[t_{k-1},t_k]$ ni $[t_k,t_{k+1}]$ es parte de $f^{-1}(V)$, así que
$$[t_{k-1},t_{k+1}] = [t_{k-1},t_k] \cup [t_k,t_{k+1}] \subseteq f^{-1}(U)$$
y se puede eliminar el nudo t_k de la partición. De modo similar, si $f(t_j) \in V \setminus U$, entonces $[t_{j-1},t_{j+1}] \subseteq f^{-1}(V)$ y el nudo t_j puede eliminarse de la partición. Entonces se puede suponer que $f(t_k) \in U \cap V$ para cada $k = 0,1,\dots,m$.

Ahora sea u_k un camino en $U \cap V$ de q a $f(t_k)$, para cada k. Tómese $u_0 = u_m = c_q$; los demás caminos existen porque $U \cap V$ es conexo por caminos. Sea $\check{u}_k$ el camino inverso de u_k en cada caso. Sea $h_k\colon I \to X$, para $k = 1,\dots,m$, el camino que corresponde a la restricción de f al intervalo $[t_{k-1},t_k]$, dado por $h_k(s) := f((1-s)t_{k-1} + st_k)$. Entonces $f_k := u_k * h_k * \check{u}_{k+1}$ es un *lazo* basado en q tal que $f_k(I) \subseteq U$ o bien $f_k(I) \subseteq V$ para cada k. Entonces
$$\begin{aligned}[f] &= [h_1 * h_2 * \cdots * h_m] = [h_1 * \check{u}_1 * u_1 * h_2 * \check{u}_2 * u_2 * \cdots * \check{u}_{m-1} * u_{m_1} * h_m] \\ &= [f_1 * f_2 * \cdots * f_m] = [f_1] * [f_2] * \cdots * [f_m],\end{aligned}$$
donde $[f_k] \in i_*(\pi_1(U,q))$ o bien $[f_k] \in j_*(\pi_1(V,q))$ en cada caso. □

Corolario 3.63. *Si el espacio topológico X es la unión $X = U \cup V$ de dos abiertos simplemente conexos U y V con intersección no vacía $U \cap V$ que es conexo por caminos, entonces X también es simplemente conexo.* ⊟

Corolario 3.64. *La esfera $\mathbb{S}^n$ es simplemente conexo, para $n \geq 2$.*

Demostración. Si $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ denota las coordenadas cartesianas de $x \in \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, defínase
$$U := \{\, x \in \mathbb{S}^n : x_n > -\tfrac{1}{2} \,\}, \qquad V := \{\, x \in \mathbb{S}^n : x_n < \tfrac{1}{2} \,\}.$$
Entonces U y V son abiertos en $\mathbb{S}^n$ que son contractibles —hay retracciones por deformaciones a los polos norte y sur, respectivamente— y por ende simplemente conexos. La intersección $U \cap V$ es homeomorfo a $\mathbb{S}^{n-1} \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$; este espacio es conexo por caminos si $n > 1$. El Corolario anterior muestra que $\pi_1(\mathbb{S}^n) = 0$. □

La demostración no funciona para el caso $n = 1$, ya que $U \cap V$ es disconexo: es un par de arcos abiertos del círculo $\mathbb{S}^1$. Todavía hay un homeomorfismo $U \cap V \approx \mathbb{S}^0 \times (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, pero la "0-esfera" $\mathbb{S}^0 := \{\, x_0 \in \mathbb{R} : x_0^2 = 1 \,\}$ es el espacio discreto de dos puntos, que es disconexo. A veces se emplea la notación $\mathbb{S}^0 := \{-1, +1\}$ para esta 0-esfera.

Ejemplo 3.65. La aplicación cociente $q \colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{RP}^2$ es una proyección recubridora, y la fibra del punto $x = [0 : 0 : 1]$ es el par de polos norte $n = (0,0,1)$ y sur $s = (0,0,-1)\}$ de $\mathbb{S}^2$. Entonces el Corolario 3.61 muestra que hay una biyección $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x)$ con el conjunto $\{n, s\}$. Luego $\pi_1(\mathbb{RP}^2, x)$ es un grupo finito de dos elementos, así que
$$\pi_1(\mathbb{RP}^2, x) \simeq \mathbb{Z}/2 := \{\bar{0}, \bar{1}\},$$
el grupo aditivo con unidad $\bar{0}$ y relación $\bar{1} + \bar{1} = \bar{0}$. (Como $\mathbb{RP}^2$ es conexo por caminos, también se puede escribir $\pi_1(\mathbb{RP}^2) \simeq \mathbb{Z}/2$, independientemente del punto de base.) ◊

Ejemplo 3.66. El **grupo ortogonal** $O(n)$ es el grupo de matrices $\{\, A \in M_n(\mathbb{R}) : A^t A = 1_n \,\}$; como espacio topológico, $O(n)$ es la parte cerrada de $\mathbb{R}^{n^2}$ —las coordenadas de $A \in O(n)$ son las n^2 entradas a_{ij} de la matriz— que cumple las ecuaciones $\sum_{k=1}^n a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$ para $i, j = 1, \dots, n$. En particular, la ecuación $\operatorname{tr}(A^t A) = n$ dice que $\sum_{j,k} (a_{kj})^2 = n$, así que $O(n)$ es acotado en $\mathbb{R}^{n^2}$, por ser parte de una esfera de radio $\sqrt{n}$. Luego $O(n)$ es un *grupo compacto*.

El grupo $O(n)$ no es conexo: el determinante $\det \colon O(n) \to \{-1, 1\}$ es continuo, por ser un polinomio de grado n en las entradas a_{ij}, luego define una desconexión de $O(n)$. La componente neutra es el subgrupo de **rotaciones** $SO(n) := \{\, A \in O(n) : \det A = +1 \,\}$, el cual sí es conexo; de hecho, $SO(n)$ es conexo por caminos.[14]

En el caso $n = 3$, las rotaciones de $\mathbb{R}^3$ pueden obtenerse por el siguiente artificio. Las **matrices de Pauli** en $M_2(\mathbb{C})$, son
$$\sigma_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 := \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

[14]La conexidad por caminos no es evidente. Es consecuencia de la continuidad de una **función exponencial** sobreyectiva $\exp \colon \mathfrak{so}(n) \to SO(n)$, con dominio el espacio vectorial $\mathfrak{so}(n) := \{\, X \in M_n(\mathbb{R}) : X^t = -X,\ \operatorname{tr} X = 0 \,\}$, dada por la fórmula $\exp(X) := \sum_{k=0} X^k / k!$.

Se identifica $\mathbb{R}^3$ con el espacio vectorial real $\{\, Z \in M_2(\mathbb{C}) : Z^* = Z,\ \operatorname{tr} Z = 0 \,\}$, con base vectorial $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. Si u es un elemento del grupo $SU(2) := \{\, u \in M_2(\mathbb{C}) : u^*u = 1_2,\ \det u = 1 \,\}$, entonces $R_u : Z \mapsto uZu^* = uZu^{-1}$ es una rotación de (esta copia de) $\mathbb{R}^3$. Todas las rotaciones de $\mathbb{R}^3$ se obtienen por esta medio, y la rotación R_u es trivial si y sólo si u es una matriz escalar, es decir, si y sólo si $u = \pm 1_2$.

Ahora bien, $u \in SU(2)$ si y sólo si $|u_{11}|^2 + |u_{12}|^2 = 1$; de este modo, se puede identificar $SU(2)$ con la esfera unitaria en $\mathbb{C}^2 = \mathbb{R}^4$. Entonces hay un homeomorfismo $SU(2) \approx \mathbb{S}^3$ dado por $u \leftrightarrow (\Re u_{11}, \Im u_{11}, \Re u_{12}, \Im u_{12})$. En consecuencia, hay una aplicación continua y sobreyectiva $p\colon \mathbb{S}^3 \to SO(3)$ dado por $p(u) \mapsto R_u$, con fibra $p^{-1}(R_u) = \{u, -u\}$. Se ve, entonces, que $SO(3) \approx \mathbb{RP}^3$ y que p es una proyección recubridora.

Los grupos fundamentales de los grupos compactos $SU(2)$ y $SO(3)$ son, entonces:

$$\pi_1(SU(2)) = \pi_1(\mathbb{S}^3) = 0, \qquad \pi_1(SO(3)) = \pi_1(\mathbb{RP}^3) = \mathbb{Z}/2. \qquad \Diamond$$

3.5 El teorema de Seifert y van Kampen

Hay una generalización de la Proposición 3.62 que permite calcular otros ejemplos de grupos fundamentales. Si $X = U \cup V$ y si $q \in U \cap V$, donde los tres abiertos U, V, $U \cap V$ son conexos por caminos, las cuatro inclusiones $U \hookrightarrow X$, $V \hookrightarrow X$, $U \cap V \hookrightarrow U$, $U \cap V \hookrightarrow V$ inducen homomorfismos entre los respectivos grupos fundamentales tales que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(U \cap V, q) \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\phi_2"'] & \pi_1(U, q) \arrow[d, "\psi_1"] \\
\pi_1(V, q) \arrow[r, "\psi_2"] & \pi_1(X, q)
\end{tikzcd}$$

La Proposición 3.62 dice que $\pi_1(X, q)$ es generado por las imágenes de los homomorfismos ψ_1 y ψ_2. Evidentemente, para todo $[f] \in \pi_1(U \cap V, q)$, la relación $\psi_1(\phi_1([f])) = \psi_2(\phi_2([f]))$ tiene lugar en $\pi_1(X, q)$. El **teorema de Seifert y van Kampen** dice que estas relaciones caracterizan $\pi_1(X, q)$; es decir, que estas son las únicas relaciones que los elementos de este grupo debe obedecer.[15]

[15] Aquí no se ofrece una demostración de este teorema; el lector puede consultar el capítulo 70 del libro de Munkres, por ejemplo. El teorema fue demostrado en: Egbert R. van Kampen, *On the connection between the fundamental groups of some related spaces*, American Journal of Mathematics **55** (1933), 261–267. Herbert Seifert mostró el mismo teorema, pero con hipótesis menos generales (los espacios X, U, V son complejos celulares) en su tesis doctoral en Leipzig en 1932.

Para enunciar este teorema de forma más precisa, hay que recordar una construcción de la teoría de grupos. Si G y H son dos grupos (no necesariamente abelianos), su **producto libre** $G*H$ es el grupo definido —hasta isomorfismo— por la siguiente *propiedad universal*. Hay homomorfismos inyectivos $\iota_1\colon G \to G*H$, $\iota_2\colon H \to G*H$; y si K es cualquier otro grupo con homomorfismos dados $\phi\colon G \to K$, $\psi\colon H \to K$, entonces hay un único homomorfismo $\theta\colon G*H \to K$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[dr, "\iota_1"] \arrow[ddr, "\phi"'] & & H \arrow[dl, "\iota_2"'] \arrow[ddl, "\psi"] \\ & G*H \arrow[d, dashed, "\theta"] & \\ & K & \end{tikzcd}$$

Fíjese que este diagrama es *dual* al diagrama del Lema 1.46, referente al producto cartesiano de dos espacios topológicos. En breve: $X \times Y$ es un **producto** en la categoría de espacios topológicos, mientras $G*H$ es un **coproducto** en la categoría de grupos.[16] Los elementos de $G*H$ son *palabras* $x_1x_2\dots x_m$ de cualquier longitud $m \in \mathbb{N}$, donde las "letras" x_j se toman alternadamente de los grupos G y H; el caso $m = 0$ es la "palabra vacía", la cual es el elemento unidad de $G*H$. Las inyecciones $\iota_1\colon G \to G*H$, $\iota_2\colon H \to G*H$ se definen por $\iota(g) := g$ si $g \neq 1$; y $\iota_2(h) := h$ si $h \neq 1$; ambos considerados como palabras de una sola letra. El producto en $G*H$ es la concatenación de palabras, y la inversión está dada por $(x_1x_2\dots x_m)^{-1} := x_m^{-1}\dots x_2^{-1}x_1^{-1}$.

Dados dos homomorfismos $\phi\colon G \to K$ y $\psi\colon H \to K$, se define $\theta\colon G*H \to K$ necesariamente por $\theta(x_1x_2\dots x_m) := \theta(x_1)\theta(x_2)\dots\theta(x_m)$, donde $\theta(x_j) := \phi(x_j)$ si $x_j \in G$ pero $\theta(x_j) := \psi(x_j)$ si $x_j \in H$. Las relaciones $\theta \circ \iota_1 = \phi$ y $\theta \circ \iota_2 = \psi$ son inmediatas.

En un lenguaje categórico, la función continua $h\colon Z \to X \times Y$ (en la categoría Top) puede considerarse como un *morfismo*[17] que lleva el diagrama $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$ en el diagrama especial $X \xleftarrow{\mathrm{pr}_1} X \times Y \xrightarrow{\mathrm{pr}_2} Y$. Dualmente, el homomorfismo $\theta\colon G*H \to K$ en la categoría Gr es un morfismo del diagrama especial $G \xrightarrow{\iota_1} G*H \xleftarrow{\iota_2} H$ al diagrama $G \xrightarrow{\phi} K \xleftarrow{\psi} H$. Estas dos construcciones categóricas (de producto y coproducto, respectivamente) admiten generalizaciones (llamadas *pullback* y *pushout*, respectivamente, en español peninsular.)

[16]La categoría de grupos tiene también un "producto", definido hasta isomorfismo por el diagrama del Lema 1.46: el **producto directo** $G \times H$ de dos grupos G y H es simplemente su producto cartesiano, con la operación de multiplicación $(g,h)\,(g',h') := (gg',hh')$.

[17]Para ser preciso, los "morfismos" de este párrafo pertenecen a otras categorías: sus objetos son los diagramas $\bullet \leftarrow \bullet \to \bullet$ en Top; y los diagramas $\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet$ en Gr, respectivamente.

Definición 3.67. Sean dados tres grupos F, G, H, junto con dos homomorfismos $\phi_1 \colon F \to G$, $\phi_2 \colon F \to H$. Un **sumidero** (K, ψ_1, ψ_2) para el sistema $G \xleftarrow{\phi_1} F \xrightarrow{\phi_2} H$ consta de un grupo K, junto con dos homomorfismos $\psi_1 \colon G \to K$ y $\psi_2 \colon H \to K$ que hacen conmutar el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\phi_2"'] & G \arrow[d, "\psi_1"] \\
H \arrow[r, "\psi_2"] & K
\end{tikzcd}$$

Un **pushout** de $G \xleftarrow{\phi_1} F \xrightarrow{\phi_2} H$ es un sumidero (J, η_1, η_2) con la siguiente propiedad universal: dado cualquier otro sumidero (K, ψ_1, ψ_2), hay un único homomorfismo $\theta \colon J \to K$ que hace conmutar el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, "\phi_1"] \arrow[d, "\phi_2"'] & G \arrow[d, "\eta_1"'] \arrow[ddr, "\psi_1"] & \\
H \arrow[r, "\eta_2"] \arrow[drr, "\psi_2"'] & J \arrow[dr, dashed, "\theta"] & \\
& & K
\end{tikzcd}$$

La existencia (y unicidad hasta isomorfismo único) del pushout del sistema $G \xleftarrow{\phi_1} F \xrightarrow{\phi_2} H$ es un lema de la teoría de grupos. Resulta que $J \simeq (G * H)/N$, donde N es el subgrupo normal de $G * H$ generado por los elementos de la forma

$$\iota_1(\phi_1(v))\, \iota_2(\phi_2(v^{-1})), \quad \text{para} \quad v \in F.$$

En otras palabras: los elementos de J se obtienen de las “palabras” en $G * H$, después de *cancelar* pares de letras contiguos de la forma $\phi_1(v)\,\phi_2(v^{-1})$ o sus inversos $\phi_2(v)\,\phi_1(v^{-1})$, cuando $v \in F$.

El teorema de Seifert y van Kampen ahora puede enunciarse.

Teorema 3.68 (van Kampen)**.** *Si $X = U \cup V$ y si $q \in U \cap V$, donde los tres abiertos U, V, $U \cap V$ son conexos por caminos, el grupo fundamental $\pi_1(X, q)$ es el pushout del sistema*

$$\pi_1(U, q) \xleftarrow{i_*} \pi_1(U \cap V, q) \xrightarrow{j_*} \pi_1(V, q)$$

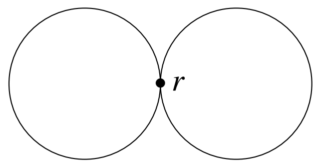
determinado por las inclusiones $i \colon U \cap V \rightarrowtail U$, $j \colon U \cap V \rightarrowtail V$. ⊟

Corolario 3.69. *Si $X = U \cup V$ y si $q \in U \cap V$, donde U y V son abiertos conexos por caminos, y si además $U \cap V$ es simplemente conexo, entonces $\pi_1(X, q) \simeq \pi_1(U, q) * \pi_1(V, q)$.* ⊟

Ejemplo 3.70. La **suma** o **cuña** $(X \vee Y, r)$ de dos espacios puntuados (X, p) y (Y, q) es el espacio topológico

$$X \vee Y := (X \uplus Y)/\{p, q\},$$

obtenido (como espacio cociente) de la unión disjunta $X \uplus Y$ al identificar los dos puntos de base p y q. Su punto de base es la clase de equivalencia $r = [\{p, q\}]$. Es costumbre considerar X y también Y como subespacios de $X \vee Y$, mediante las inclusiones $i \colon X \rightarrowtail X \vee Y$, $j \colon Y \rightarrowtail X \vee Y$, dados por $i(x) := x$ si $x \neq p$; $j(y) := y$ si $y \neq q$; con $i(p) = j(q) := r$.



$\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$

La cuña de dos círculos $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ es homeomorfo a una *lemniscata* o “figura de ocho”. Para aplicar el Teorema 3.68 a este espacio, hay que expresarlo como la unión de dos *abiertos* U y V con intersección conveniente. Concretamente, sea $\mathbb{S}^1_a := \{\, z+1 : z \in \mathbb{S}^1 \,\}$ y $\mathbb{S}^1_b := \{\, z-1 : z \in \mathbb{S}^1 \,\}$ dos círculos de radio 1 en el plano complejo $\mathbb{C}$, con centros respectivos 1 y -1, que son tangentes externamente en su punto común 0. Sea $U := \mathbb{S}^1_a \cup \{\, e^{2\pi i t} - 1 : -\delta < t < \delta \,\}$ mientras $V := \mathbb{S}^1_b \cup \{\, 1 - e^{2\pi i t} : -\delta < t < \delta \,\}$, para $0 < \delta < \frac{1}{2}$. Entonces tanto U como V es la unión de uno de los círculos junto con un arco abierto del otro, de longitud $2\pi\delta$, centrado en el punto de contacto.

Está claro que $\mathbb{S}^1_a$ es una retracción por deformación de U y que $\mathbb{S}^1_b$ es una retracción por deformación de V; y además, que $U \cap V$ es contractible. Entonces hay isomorfismos $\pi_1(U, r) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1_a, r) \simeq \mathbb{Z}$ y $\pi_1(V, r) \simeq \pi_1(\mathbb{S}^1_b, r) \simeq \mathbb{Z}$, mientras $\pi_1(U \cap V, r) = 0$. Entonces, por el Corolario 3.69, se obtiene

$$\pi_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1, r) \simeq \pi_1(U, r) * \pi_1(V, r) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z}.$$

Para describir este grupo $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, con notación multiplicativa, tómese generadores a y b de los grupos cíclicos infinitos $\pi_1(\mathbb{S}^1_a, r)$ y $\pi_1(\mathbb{S}^1_b, r)$. Entonces los elementos de $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ son “palabras” de la forma $a^{m_1} b^{n_1} a^{m_2} b^{n_2} \dots a^{m_r}$ y otras similares. Obsérvese que $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ no es un grupo abeliano, porque $ab \neq ba$: no hay relación alguna entre los generadores a y b. $\Diamond$

Ejemplo 3.71. Considérese el espacio $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$, la cuña de dos copias del plano proyectivo. Para ilustrar la topología de este espacio, se puede emplear la unión $\mathbb{S}^2_a \cup \mathbb{S}^2_b$ de dos copias de la esfera $\mathbb{S}^2$, que se cortan únicamente en sus respectivas polos norte y sur. Por ejemplo, tómese $\mathbb{S}^2_a = \mathbb{S}^2$ como parte de $\mathbb{R}^3$, y sea $\mathbb{S}^2_b$ un elipsoide de rotación, tangente a $\mathbb{S}^2_a$ en los polos. Hay una aplicación cociente dos-a-uno $q \colon \mathbb{S}^2_a \cup \mathbb{S}^2_b \twoheadrightarrow \mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$. Con el uso de q, se puede comprobar que $\pi_1(\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2, r) \simeq \mathbb{Z}/2 * \mathbb{Z}/2$, el cual es un grupo infinito no abeliano. $\Diamond$

4 Introducción a la Homología

La teoría de homotopía asocia a un espacio topológico ciertos grupos que dan una clasificación útil de estos espacios, aunque sea incompleta, puesto que no distingue entre espacios homotópicamente equivalentes pero no homeomorfos. En el capítulo anterior, se estudió el grupo fundamental $\pi_1(X,p)$ de un espacio punteado (X,p), que es solamente el primero de una sucesión de "grupos de homotopía superiores" $\pi_k(X,p)$, para k un número entero positivo.[1] Sin embargo, estos grupos son en muchos casos difíciles de calcular. Hay otra estrategia que asocia una segunda familia de grupos, todos abelianos, a un cualquier espacio topológico que admite una triangulación. Aunque estos *grupos de homología* dan una clasificación menos fina que las de homotopía, suelen más fáciles de calcular.

4.1 Complejos simpliciales y Δ-complejos

La idea de homología es de construir modelos de espacios topológicos (homeomorfos a los originales si fuera posible, pero al menos homotópicamente equivalente a ellos) al ensamblar ciertos subespacios de $\mathbb{R}^n$ —no todos de la misma dimensión, en general— de tal manera que será posible calcular algunos invariantes topológicos a partir del proceso de ensamblaje. Este proceso se llama *triangulación*, como generalización de la idea de expresar una superficie bidimensional como unión de parches triangulares colindantes.

Definición 4.1. Un juego finito de $k+1$ puntos $\{v_0,v_1,\dots,v_k\} \subset \mathbb{R}^n$ es **geométricamente independiente** si no están contenidos en un hiperplano de dimensión $(k-1)$, o equivalentemente, si los k vectores $\{v_1-v_0, v_2-v_0,\dots,v_k-v_0\}$ son linealmente independientes. En tal caso, su *envoltura convexa*

$$[v_0,v_1,\dots,v_k] := \{\, t_0v_0+t_1v_1+\cdots+t_kv_k : \text{ cada } t_j \geq 0,\ t_0+\cdots+t_k=1 \,\} \subset \mathbb{R}^n$$

es una parte compacta de $\mathbb{R}^n$, homeomorfa al símplice estándar Δ_k del Ejemplo 3.15. Esta envoltura convexa se llama el **k-símplice cerrado** con **vértices** $v_0,v_1,\dots,v_k$. Los coeficientes $(t_0,\dots,t_k) \in \Delta_k$ del punto $t_0v_0+t_1v_1+\cdots+t_kv_k$ son los **coordenados baricéntricos** de dicho punto del símplice.

Si $I=\{i_1,\dots,i_r\} \subseteq [k]$, la **faceta** I-ésima de $[v_0,v_1,\dots,v_k]$ es el símplice r-dimensional $[v_{i_1},\dots,v_{i_r}]$. También conviene definir el **k-símplice abierto**

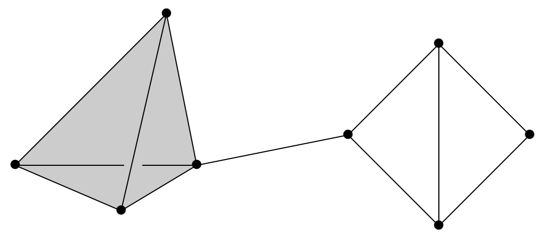
$$(v_0,v_1,\dots,v_k) := \{\, t_0v_0+t_1v_1+\cdots+t_kv_k : \text{ cada } t_j > 0,\ t_0+\cdots+t_k=1 \,\},$$

cuya clausura es el k-símplice cerrado $[v_0,v_1,\dots,v_k]$. Fíjese que un k-símplice es la *unión disjunta* de todos sus 2^k facetas abiertas.

[1] El grupo $\pi_k(X,p)$ se define como las clases de homotopía $[(\mathbb{S}^k,n),(X,p)]$, donde n es el "polo norte" de la esfera $\mathbb{S}^k$. Entre dichas clases se puede definir una ley de composición que generaliza la concatenación de clases de lazos, de tal manera que $\pi_k(X,p)$ sea un grupo *abeliano* para $k \geq 2$.

Para aliviar un poco la notación, conviene denotar el juego de vértices por una letra s, el símplice cerrado por $[s]$ y el símplice abierto por (s), así:

$$s := \{v_0, v_1, \dots, v_k\}, \qquad [s] := [v_0, v_1, \dots, v_k], \qquad (s) := (v_0, v_1, \dots, v_k).$$



Definición 4.2. Un **complejo simplicial** euclidiano en $\mathbb{R}^n$ es un *conjunto* finito K de símplices *abiertos* en $\mathbb{R}^n$, que cumple dos requisitos:[2]

(a) Si $(s) \in K$, entonces cada faceta abierta de $[s]$ también pertenece a K;

(b) Si $(r), (s) \in K$ con $(r) \cap (s) \neq \emptyset$, entonces $(r) = (s)$.

Su **dimensión** $\dim K$ es la mayor dimensión de todos los símplices en K.

El **soporte** de K es la *unión* $|K|$ de todos los símplices en K, con la topología relativa como parte (compacta) de $\mathbb{R}^n$. En vista de las condiciones (a) y (b), se puede escribir[3]

$$|K| := \biguplus_{(s)\in K} (s) = \bigcup_{(s)\in K} [s].$$

El soporte $|K|$ de un complejo simplicial K también se llama un **poliedro** en $\mathbb{R}^n$.

Una **triangulación** de un espacio compacto (y de Hausdorff) X es un homeomorfismo $h \colon |K| \to X$, para algún complejo simplicial K.

Definición 4.3. Un **subcomplejo** de un complejo simplicial K es una parte $L \subset K$ que también cumple los requisitos (a) y (b) de la definición anterior.

Si $r \leq \dim K$, el ***r*-esqueleto** de K es el subcomplejo $K^r := \{\, (s) \in K : \dim(s) \leq r \,\}$. El 0-esqueleto de K es el conjunto de los vértices de cada uno de sus símplices (sin repetición).

Por ejemplo, si $|K|$ es un tetraedro en $\mathbb{R}^3$, entonces $|K^0|$ consta de sus 4 vértices; $|K^1|$ es la unión de sus 6 aristas; y $|K^2|$ es la unión de sus 4 facetas.

Si K es el juego de facetas de un tetraedro regular inscrito en la esfera $\mathbb{S}^2$, la proyección radial desde el origen $0 \in \mathbb{R}^3$ define un homeomorfismo $|K^2| \approx \mathbb{S}^2$: la esfera queda triangulado por cuatro "triángulos esféricos".

[2]El adjetivo *euclidiano* excluye una definición más general de **complejo simplicial**, en donde se permite una cantidad numerable de símplices, de cualquier dimensión, con una condición de finitud local que implica que su soporte es un espacio *paracompacto* pero no necesariamente compacto.

[3]El libro de Singer y Thorpe usa la notación $[K]$ en vez de $|K|$ para el soporte del complejo simplicial K.

Definición 4.4. Al elegir un orden $v_0, v_1, \dots, v_k$ de los vértices de $[s] = [v_0, v_1, v_2, \dots, v_k]$ *hasta permutaciones pares*, se obtiene un k**-símplice orientado**. Al hacer una permutación impar de estos vértices, se obtiene $-[s] := [v_1, v_0, v_2, \dots, v_k]$, con la orientación opuesta.

La I-ésima faceta de s recibe la orientación compatible con el orden $v_{i_1}, \dots, v_{i_r}$ de sus vértices, siendo $i_1 < \cdots < i_r$. Así, por ejemplo, en el 2-símplice orientado $[v_0, v_1, v_2]$ las 1-facetas (sus lados) con orientaciones compatibles son $[v_0, v_1]$, $[v_0, v_2]$ y $[v_1, v_2]$.

► Esta discusión de símplices y complejos simpliciales servirá en breve para transferir ciertos cálculos combinatorios hechos con los símplices al contexto de la topología de sus soportes. Históricamente, esto implicaba la necesidad de reemplazar una función continua $f : |K| \to |L|$ por una aplicación afín por trozos $\varphi : |K| \to |L|$, homotópica a f, por un proceso de *aproximación simplicial*. Ese camino no es corto.[4]

La ruta se puede abreviar al reemplazar una triangulación estricta de X por cierto tipo de función continua sobreyectiva $f : Y \to X$, al dotar un complejo simplicial de un poco de topología inicialmente.

Definición 4.5. Sea K un complejo simplicial euclidiana. Un Δ**-complejo** derivado de K es un espacio cociente[5]

$$Y := \Bigl(\biguplus_{(s) \in K} [s] \Bigr) \Big/ \sim$$

donde la relación de equivalencia hace una identificación de algunas familias de k-símplices cerradas $[s]$ de K mediante la biyección afín $\Delta_k \leftrightarrow [s]$; para $k = 0, 1, \dots, (\dim K - 1)$.

Entonces Y es una unión disjunta de k-símplices abiertos (s^k_α) de varias dimensiones; cada (s^k_α) conlleva una **aplicación característica** $\sigma^k_\alpha : \Delta_k \to Y$ cuya restricción al interior Δ°_k es un *homeomorfismo* de Δ°_k a (s^k_α); la clausura de (s^k_α) es la imagen de la función continua σ^k_α; y la restricción de σ^k_α a cada $(k-1)$-faceta de Δ_k coincide con la aplicación característica σ^{k-1}_β de algún $(k-1)$-símplice abierto $(s^{k-1}_\beta) \in K$.

Ejemplo 4.6. Considérese el complejo simplicial obtenido del cuadrado $I \times I$ al dividirlo con el segmento diagonal desde $(0,0)$ a $(1,1)$: hay 4 vértices, 5 aristas y 2 triángulos en K. Mediante identificaciones de los dos pares de lados opuestos, es posible obtener un espacio compacto de varias maneras, *dependiendo de la orientación* de los símplices en K.

[4]El teorema de aproximación simplicial fue mostrado por Brouwer con hipótesis extras y la versión general fue efectuado por Alexander, en: J. W. Alexander, *Combinatorial analysis situs*, Transactions of the American Mathematical Society **28** (1926), 301–329. Para una demostración detallada, véase el libro de Singer y Thorpe, sección 4.3.

[5]El término Δ-*complejo* no es estándar; aquí se sigue la notación del libro de Hatcher. Es una adaptación de la definición clásica de *complejo celular*.

El diagrama muestra dos casos, en donde los 0-símplices y los 1-símplices con iguales nombres se identifican. Las flechas indican las orientaciones de los 1-símplices (e implícitamente, las orientaciones de los 2-símplices también). En el primer caso, las aristas f y las aristas g se identifican paralelamente: $(t,0) \sim (t,1)$ y $(0,t) \sim (1,t)$; en consecuencia, los 4 vértices se identifican al mismo punto v. El espacio cociente resultante es un *toro* $\mathbb{T}^2$.

En el segundo caso, las aristas f y las aristas g se identifican de modo *antiparalelo*: $(t,0) \sim (1-t,1)$ y $(0,t) \sim (1,1-t)$; en consecuencia, los vértices $(0,0)$ y $(1,1)$ se identifican a un punto v; mientras los vértices $(0,1)$ y $(1,0)$ se identifican a otro punto w. El espacio cociente resultante es homeomorfo al *plano proyectivo* $\mathbb{RP}^2$. $\Diamond$

En el ejemplo anterior, fíjese que las flechas para cada triángulo no forman un ciclo cerrado, porque las orientaciones de los 1-símplices vienen, por restricción, de las orientaciones de los 2-símplices. Esta condición es necesario, y resulta ser suficiente, para que un cociente de una unión disjunta de símplices cerrados forme un Δ-complejo.

4.2 Homología simplicial y singular

La estructura combinatoria de un Δ-complejo permite armar un aparato algebraico que le asocia un juego de grupos abelianos que permanecen invariantes bajo subdivisión. Por ejemplo, un triángulo plano puede considerarse como un 2-símplice, o bien como un Δ-complejo formado por los tres triángulos obtenidos al trazar un segmento de cada vértice a cierto punto interior. Se busca invariantes algebraicos que son insensibles a la “cancelación de bordes internos” de estos tres triángulos, ya que el triángulo subdividido es homeomorfo al triángulo original.

Definición 4.7. Sea $\{\,(s_\alpha^k) : \alpha \in J_k\,\}$ el conjunto de los k-símplices abiertos en un Δ-complejo Y. Una k**-cadena simplicial** en Y es suma formal finita $\sum_\alpha m_\alpha (s_\alpha^k)$ de tales k-símplices, con coeficientes $m_\alpha \in \mathbb{Z}$. La totalidad de k-cadenas simpliciales es un grupo abeliano $\Delta_k(Y)$. Dicho de otra manera, $\Delta_k(Y)$ es el *grupo abeliano libre*[6] generado por los k-símplices abiertos de Y.

[6]Si G es cualquier grupo abeliano, las sumas formales finitas con $m_\alpha \in G$ —en lugar de $\mathbb{Z}$— forman un grupo abeliano $\Delta_k(Y;G)$ de *k-cadenas con coeficientes en G*. La opción por defecto es $G = \mathbb{Z}$; pero también vale la pena emplear $G = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ o bien $\mathbb{Z}/2$, de vez en cuando.

Hay una operación de “borde” $\partial_k\colon \Delta_k(Y) \to \Delta_{k-1}(Y)$, definido por una extensión aditiva de la idea del borde de un k-símplice.

Definición 4.8. Si $[s] = [v_0, \dots, v_k]$ es un k-símplice orientado, sus facetas de dimensión $k-1$ son los $(k-1)$-símplices orientados

$$[v_0, \dots, \widehat{v_i}, \dots, v_k] \equiv [v_0, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k]$$

donde la notación $\widehat{v_i}$ indica que el vértice v_i queda *suprimida* de la lista de vértices.

El **borde** $\partial[s]$ es la suma formal de estas $(k-1)$-facetas con la orientación original u opuesta alternadamente:

$$\partial[v_0, \dots, v_k] := \sum_{j=0}^{k} (-1)^j [v_0, \dots, \widehat{v}_j, \dots, v_k].$$

En particular, se define $\partial[v_0] := 0$ y para $k = 1, 2, 3$, valen

$$\begin{aligned} \partial[v_0, v_1] &:= [v_1] - [v_0], \\ \partial[v_0, v_1, v_2] &:= [v_1, v_2] - [v_0, v_2] + [v_0, v_1], \\ \partial[v_0, v_1, v_2, v_3] &:= [v_1, v_2, v_3] - [v_0, v_2, v_3] + [v_0, v_1, v_3] - [v_0, v_1, v_2]. \end{aligned}$$

Fíjese que el borde del triángulo $[v_0, v_1, v_2]$ es un circuito cíclico de sus lados; y que en el borde del tetraedro $[v_0, v_1, v_2, v_3]$ sus cuatro facetas están orientados de tal manera que en sus propias bordes, las orientaciones de las seis aristas cancelan en pares: $\partial^2[v_0, v_1, v_2, v_3] = 0$.

Definición 4.9. Cada k-símplice abierto (s_α^k) en $\Delta_k(Y)$ queda determinado por su aplicación característica $\sigma_\alpha^k\colon \Delta_k \to Y$; entonces se puede redefinir $\Delta_k(Y)$ como el grupo abeliano libre generado por estos σ_α^k, cuyo elemento típico tiene la forma $\sum_\alpha m_\alpha \sigma_\alpha^k$ con $m_\alpha \in \mathbb{Z}$. Si $\varepsilon_k^j\colon \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ es la función afín tal que

$$\varepsilon_k^j\big([e_0, \dots, e_{k-1}]\big) = [e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_k],$$

donde $\{e_0, \dots, e_k\}$ denota la base vectorial estándar de $\mathbb{R}^{k+1}$, entonces cada $\sigma_\alpha^k \circ \varepsilon_k^j$ es una aplicación característica de algún $(k-1)$-símplice en $\Delta_{k-1}(Y)$. El **borde** $\partial_k(\sigma_\alpha^k)$ se define como la $(k-1)$-cadena:[7]

$$\partial_k(\sigma_\alpha^k) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^j\, \sigma_\alpha^k \circ \varepsilon_k^j.$$

Se extiende ∂_k por aditividad, $\partial_k\big(\sum_\alpha m_\alpha \sigma_\alpha^k\big) := \sum_\alpha m_\alpha \partial_k(\sigma_\alpha^k)$. De esta manera, se obtiene un homomorfismo de grupos abelianos $\partial_k\colon \Delta_k(Y) \to \Delta_{k-1}(Y)$.

[7]Cuando no hay peligro de ambigüedad, se escribe ∂ en vez de ∂_k para denotar un borde.

Lema 4.10. *La composición $\partial_{k-1} \circ \partial_k \colon \Delta_k(Y) \to \Delta_{k-2}(Y)$ es cero.*

Demostración. Por aditividad, basta mostrar que $\partial_{k-1}(\partial_k(\sigma_\alpha^k)) = 0$ para cualquier σ_α^k; o equivalentemente, que $\partial(\partial([v_0,\dots,v_k])) = 0$ para cualquier k-símplice cerrado $[v_0,\dots,v_k]$.

En el cálculo de $\partial(\partial([v_0,\dots,v_k]))$, se eliminan dos vértices, primero v_j y luego v_i, de la lista de vértices del k-símplice; hay dos casos, según el vértice v_i precede o bien sucede al vértice v_j en la lista. En el primer caso, hay un factor de signo $(-1)^i$ pero este factor es $(-1)^{i-1}$ en el segundo caso. Por lo tanto, se obtiene

$$\begin{aligned}
\partial(\partial[v_0,\dots,v_k]) &= \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \partial[v_0,\dots,\widehat{v}_j,\dots,v_k] \\
&= \sum_{i<j} (-1)^{i+j} [v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,\widehat{v}_j,\dots,v_k] + \sum_{i>j} (-1)^{i+j-1} [v_0,\dots,\widehat{v}_j,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_k] \\
&= \sum_{i<j} \big((-1)^{i+j} + (-1)^{j+i-1}\big) [v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,\widehat{v}_j,\dots,v_k] = 0.
\end{aligned}$$

(En el tercer renglón, un cambio parcial de índices $i \leftrightarrow j$ permite combinar pares de términos con signos opuestos.) ☐

► La propiedad $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ permite cambiar el contexto a un problema puramente algebraico. La lista de grupos abelianos $\{\, \Delta_k(Y) : k \in \mathbb{N} \,\}$, junto con la familia de homomorfismos $\{\, \partial_k : k \in \mathbb{N} \,\}$ entre ellos, es una instancia de la siguiente definición.

Definición 4.11. Un **complejo de cadenas** $(C_\bullet, \partial)$ es una familia $\{\, C_k : k \in \mathbb{N} \,\}$ de grupos abelianos,[8] junto con homomorfismos $\partial_k \colon C_k \to C_{k-1}$ para cada k (con $\partial_0 \colon C_0 \to 0$ el homomorfismo nulo), tales que $\delta_{k-1} \circ \delta_k = 0$ en $\mathrm{Hom}(C_k, C_{k-2})$ para todo k. Los elementos del grupo C_k se llaman ***k*-cadenas**.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "\partial_{k+2}"] & C_{k+1} \arrow[r, "\partial_{k+1}"] \arrow[d, "\varphi_{k+1}"] & C_k \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d, "\varphi_k"] & C_{k-1} \arrow[r, "\partial_{k-1}"] \arrow[d, "\varphi_{k-1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r, "\delta_{k+2}"] & D_{k+1} \arrow[r, "\delta_{k+1}"] & D_k \arrow[r, "\delta_k"] & D_{k-1} \arrow[r, "\delta_{k-1}"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Los complejos de cadenas son objetos de una categoría $\mathsf{Ab}_\bullet$ en la cual un morfismo $\varphi_\bullet \colon (C_\bullet, \partial) \to (D_\bullet, \delta)$ es una familia de homomorfismos $\varphi_k \colon C_k \to D_k$ tales que $\varphi_{k-1} \circ \partial_k = \delta_k \circ \varphi_k : C_k \to D_{k-1}$ para cada k; en otras palabras, hay un diagrama conmutativo cuyas filas son los dos complejos y cuyas flechas verticales son los φ_k.

[8] Por comodidad, se puede definir $C_{-m} := 0$ para $m \in \mathbb{N}^*$.

Definición 4.12. Sea $(C_\bullet, \delta)$ un complejo de cadenas. Una k-cadena $x \in C_k$ es un k**-ciclo** si $\delta_k(x) = 0$; además, x es un k**-borde** si $x = \delta_{k+1}(y)$ para algún $y \in C_{k+1}$.

La totalidad de los k-ciclos es $Z_k := \ker \partial_k$, un subgrupo de C_k. La totalidad de los k-bordes es $B_k := \operatorname{im} \partial_{k+1}$, el cual es otro subgrupo de c_k.

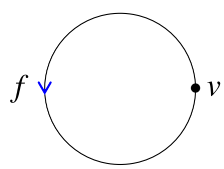
La condición $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$ garantiza que $B_k \leq Z_k$. El grupo abeliano cociente

$$H_k := Z_k / B_k = \ker \partial_k / \operatorname{im} \partial_{k+1}$$

es el k-ésimo **grupo de homología** del complejo $(C_\bullet, \delta)$. El grupo abeliano $H_\bullet := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} H_k$ es la **homología** (a secas) de este complejo.

Los elementos del grupo H_k se llaman *clases de homología* de grado k. Dos k-ciclos $x, x' \in Z_k$ tales que $x - x' \in B_k$ se llaman **ciclos homólogos**, ya que $[x] = [x'] \in H_k$.

Definición 4.13. Sea Y un Δ-complejo y sea $(\Delta_\bullet(Y), \partial)$ el complejo de cadenas simpliciales correspondiente. La **homología simplicial** de Y es la homología de este complejo, definido por $H_k^\Delta(Y) := Z_k / B_k = \ker \partial_k / \operatorname{im} \partial_{k+1}$.



Ejemplo 4.14. El *círculo* $\mathbb{S}^1$ es un Δ-complejo con un sólo 0-símplice v; y un sólo 1-símplice, cuya aplicación característica $f\colon \Delta_1 \to \mathbb{S}^1$ está dada por $f(1-t, t) := e^{2\pi i t}$, lo cual describe un lazo basado en 1 que rodea el círculo una sola vez contrario a reloj. Entonces

$$\Delta_0(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}, \qquad \Delta_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}, \qquad \Delta_k(\mathbb{S}^1) = 0 \text{ para } k \geq 2.$$

Con mayor detalle: $\Delta_0(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}v$ es grupo abeliano libre generado por v; $\Delta_1(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}f$ es grupo abeliano libre generado por f. La aplicación de borde $\partial_1\colon \Delta_1(\mathbb{S}^1) \to \Delta_0(\mathbb{S}^1)$ es nula, ya que $\partial_1(f) = v - v = 0$. Si $k \geq 2$, está claro que $Z_k = 0$ y por ende $H_k^\Delta(\mathbb{S}^1) = 0$ para $k \geq 2$. Si $k = 1$, $f \in Z_1$ es un ciclo (¡naturalmente!) ya que $\partial_1(f) = 0$, mientras $B_1 = 0$. Si $k = 0$, $v \in Z_0$ es un ciclo, mientras $B_0 = \operatorname{im} \partial_1 = 0$. En conclusión:

$$H_0^\Delta(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}, \qquad H_1^\Delta(\mathbb{S}^1) = \mathbb{Z}, \qquad H_k^\Delta(\mathbb{S}^1) = 0 \text{ para } k \geq 2. \qquad \Diamond$$

Ejemplo 4.15. El *toro* $\mathbb{T}^2$ es un Δ-complejo ya visto en el Ejemplo 4.6: tiene un sólo 0-símplice v; tres 1-símplices f, g, h; y dos 2-símplices K, L. De su diagrama, se puede observar que

$$\begin{gathered} \partial_1(f) = \partial_1(g) = \partial_1(h) = v - v = 0; \\ \partial_2(-K) = \partial_2(L) = f + g - h. \end{gathered}$$

Entonces $Z_0 \simeq \mathbb{Z}$ con un generador v; $Z_1 \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ con tres generadores f, g, h; y $Z_2 \simeq \mathbb{Z}$ con un generador $(K+L)$. Por otro lado, se ve que $B_0 = \operatorname{im}\partial_1 = 0$; $B_1 = \operatorname{im}\partial_2 \simeq \mathbb{Z}$ con un generador $(f+g-h)$; y $B_2 = 0$ porque ∂_3 es nulo. Entonces

$$H_0^\Delta(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}, \qquad H_1^\Delta(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, \qquad H_2^\Delta(\mathbb{T}^2) = \mathbb{Z}.$$

Además, vale $H_k^\Delta(\mathbb{T}^2) = 0$ para $k \geq 3$. $\Diamond$

Ejemplo 4.16. El *plano proyectivo* $\mathbb{RP}^2$ es otro Δ-complejo ya visto en el Ejemplo 4.6: tiene dos 0-símplices v y w; tres 1-símplices f, g, h; y dos 2-símplices K y L. De su diagrama:

$$\begin{gathered}\partial_1(f) = \partial_1(g) = w - v; \qquad \partial_1(h) = 0; \\ \partial_2(K) = f - g + h; \qquad \partial_2(L) = f - g - h.\end{gathered}$$

Entonces $Z_0 \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ con generadores v y w; $Z_1 \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ con dos generadores $(f-g)$ y h; y $Z_2 = 0$ porque ∂_2 es inyectivo. Por otro lado, se ve que $B_0 = \operatorname{im}\partial_1 \simeq \mathbb{Z}$ con generador $(w-v)$; $B_1 = \operatorname{im}\partial_2 \simeq \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ con generadores $(f-g+h)$ y $(f-g-h)$; y $B_2 = 0$. Entonces es evidente que $H_0^\Delta(\mathbb{RP}^2) \simeq \mathbb{Z}$ con generador $[v] = [w]$; y que $H_2^\Delta(\mathbb{RP}^2) = 0$.

El cálculo de $H_1^\Delta(\mathbb{RP}^2)$ requiere un poco de atención. Tanto Z_1 como B_1 son copias de $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$, pero el 1-ciclo h no es un 1-borde, porque no es una combinación *con coeficientes enteros* de $\partial_2(K)$ y $\partial_2(L)$.

Si puede tomar $\{f-g+h, h\}$ como base de Z_1 (sobre el anillo $\mathbb{Z}$); y a la vez una $\mathbb{Z}$-base de B_1 podría ser $\{f-g+h, 2h\}$ porque $(f-g+h)-(f-g-h) = 2h$. Esto muestra que B_1 es un subgrupo de índice 2 en Z_1, así que $Z_1/B_1 \simeq \mathbb{Z}/2$. En conclusión:

$$H_0^\Delta(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}, \qquad H_1^\Delta(\mathbb{RP}^2) = \mathbb{Z}/2, \qquad H_2^\Delta(\mathbb{RP}^2) = 0.$$

Además, vale $H_k^\Delta(\mathbb{RP}^2) = 0$ para $k \geq 3$. $\Diamond$

► De los ejemplos anteriores, es evidente que la homología simplicial de un espacio topológico es bastante sencilla de calcular, una vez que se haya identificado una triangulación o una estructura de Δ-complejo sobre ese espacio. (Queda pendiente la pregunta de si dos triangulaciones diferentes de un espacio dan lugar a los mismos grupos de homología.) Para espacios topológicos más generales, hay que buscar otra procedimiento. El nuevo método consiste en relajar la condición de que las aplicaciones características $\sigma_\alpha^k \colon \Delta_k \to Y$ sean bicontinuas sobre el interior de cada Δ_k; esto permite modelar espacios topológicos con "singularidades" que no necesariamente son homeomorfos a Δ-complejos.

Definición 4.17. Sea X un espacio topológico. Un k-**símplice singular** en X es una función[9] continua $\sigma\colon \Delta_k \to X$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, sea $S_k(X)$ el grupo abeliano libre generado por todos

[9]Fíjese bien que *no* se trata de la *imagen* $\sigma(\Delta_k) \subseteq X$, sino de la propia función σ.

los k-símplices singulares en X. (Si $k < 0$ en $\mathbb{Z}$, colóquese $S_k(X) := 0$ también.) Los elementos de $S_k(X)$ —sumas finitas de k-símplices singulares— se llaman **k-cadenas singulares** en X.

Defínase un homomorfismo $\partial_k \colon S_k(X) \to S_{k-1}(X)$ por

$$\partial_k(\sigma) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \, \sigma \circ \varepsilon_k^j,$$

donde $\varepsilon_k^j \colon \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ es la inclusión de la j-ésima faceta de dimensión $k-1$.

Lema 4.18. *La composición $\partial_{k-1} \circ \partial_k \colon S_k(X) \to S_{k-2}(X)$ es cero.*

Demostración. El argumento es idéntico a la demostración del Lema 4.10, con un cambio de notación. Basta notar que

$$\partial_{k-1}(\partial_k(\sigma)) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \, \sigma \circ (\varepsilon_k^j \circ \varepsilon_{k-1}^i - \varepsilon_k^i \circ \varepsilon_{k-1}^{j-1})$$

y chequear que los términos en paréntesis a la derecha se anulan por cancelación. □

Como resultado, los grupos $S_k(X)$ forman un **complejo de cadenas singulares** $(S_\bullet(X), \partial)$ cuya homología es la **homología singular** del espacio topológico X. Sus grupos de homología se denotan $H_k(X)$, para $k \in \mathbb{N}$, sin adorno alguno para distinguirlos de los grupos $H_k^\Delta(X)$ de la homología simplicial.[10]

Lema 4.19. *Si X es un espacio topológico conexo por caminos (con $X \neq \emptyset$), su homología singular en grado cero es $H_0(X) = \mathbb{Z}$.*

Demostración. Cada 0-cadena singular es un 0-ciclo; luego $H_0(X) = S_0(X)/\operatorname{im}\partial_1$. Defínase un homomorfismo $\varepsilon \colon S_0(X) \to \mathbb{Z}$ por $\varepsilon\bigl(\sum_r m_r\sigma_r\bigr) := \sum_r m_r$. Si $\tau \colon \Delta_1 \to X$ es un camino (esto es, una 1-cadena singular), entonces $\varepsilon(\partial_1(\tau)) = \varepsilon(\tau(e_1)) - \varepsilon(\tau(e_0)) = 1 - 1 = 0$.

Por otro lado, si $\sum_r m_r\sigma_r \in \ker\varepsilon$, de tal manera que $\sum_r m_r = 0$, entonces hay un camino $\tau_r \colon \Delta_1 \to X$ de un punto de base $p \in X$ a cualquiera de los puntos $\sigma_r(e_0)$, ya que X es conexo por caminos. Si $\sigma_0 \colon \Delta_0 \to X$ es el 0-símplice singular determinado por $\sigma_0(e_0) := p$, entonces $\partial_1(\tau_r) = \sigma_r - \sigma_0$. Ahora

$$\partial_1\bigl(\textstyle\sum_r m_r\tau_r\bigr) = \sum_r m_r\sigma_r - \sum_r m_r\sigma_0 = \sum_r m_r\sigma_r.$$

La conclusión es que $\operatorname{im}\partial_1 = \ker\varepsilon$. Luego $H_0(X) = S_0(X)/\ker\varepsilon \simeq \operatorname{im}\varepsilon = \mathbb{Z}$, por un resultado sencillo de la teoría de grupos. □

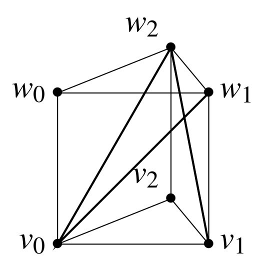
[10] En la época entre las dos guerras mundiales, se inventaron muchas variantes de la homología de un espacio topológico (simplicial, singular, por cubrimentos de Čech, etc.) Estos grupos coincidían para muchos espacios topológicos, aunque su coincidencia no era evidente; y los procedimientos de cálculo eran generalmente engorrosos. Para uniformar los diversos variantes, Samuel Eilenberg y Norman Steenrod propusieron una formulación axiomática de la homología, en el libro: S. Eilenberg y N. Steenrod, *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1952.

Lema 4.20. *Si $P = \{p\}$ es un punto, entonces $H_0(P) = \mathbb{Z}$ y $H_k(P) = 0$ para $k > 0$.*

Demostración. El caso $k = 0$ es un corolario del Lema anterior.

Para cualquier $k \in \mathbb{N}$, hay un *único* k-símplice singular $\sigma_k\colon \Delta_k \to P$. Su borde es $\partial_k(\sigma_k) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^j\sigma_{k-1}$. Esta suma se anula si k es impar; y $\partial_k(\sigma_k) = \sigma_{k-1}$ si k es par. Entonces $Z_{2l+1} = B_{2l+1} \simeq \mathbb{Z}$ con generador σ_{2l+1}, mientras $Z_{2l+2} = B_{2l+2} = 0$; para todo $l \in \mathbb{N}$. Entonces $H_k(P) = 0$ para todo $k > 0$. □

► Una ventaja importante que tiene la homología singular sobre la homología simplicial es la facilidad de demostrar la propiedad crucial de *invariancia bajo homotopía*. Al trabajar con cadenas singulares, una homotopía $F\colon X \times I \to Y$ puede expresarse en términos del los símplices Δ_k y de los **prismas** $\Delta_k \times I$.



Lema 4.21. *El prisma $\Delta_k \times I$ es un Δ-complejo formado por $(k+1)$-símplices $[s_0], [s_1], \dots, [s_k]$ donde $[s_j] \cap [s_{j+1}]$ es una k-faceta común de estos dos $(k+1)$-símplices, para $j = 0, \dots, k-1$.*

Demostración. Un rectángulo queda subdividido en dos triángulos por un segmento diagonal; un prisma de base triángulo queda subdividido en tres tetraedros por dos triángulos interiores, etc. Para el caso general, escríbase $\Delta_k \times \{0\} = [v_0, \dots, v_k] =: [r_0]$ y también $\Delta_k \times \{1\} = [w_0, \dots, w_k] =: [r_{k+1}]$, donde $v_j = (e_j, 0)$ y $w_j = (e_j, 1)$ para $j = 0, 1, \dots, k$.

Los k-símplices $[v_0, \dots, v_{j-1}, w_j, \dots, w_k] =: [r_{k+1-j}]$, para $j = 1, \dots, k$, puede ser considerados como grafos de funciones afines $f_{k+1-j}\colon \Delta_k \to I$, dados por

$$f_{k+1-j}(t_0e_0 + \cdots + t_ke_k) := t_j + t_{j+1} + \cdots + t_k.$$

Los k-símplices $[r_0]$ y $[r_{k+1}]$ (las "bases inferior y superior" del prisma) son grafos de las funciones constantes $f_0 \equiv 0$ y $f_{k+1} \equiv 1$. Es evidente que $f_{k-j}(v) \leq f_{k+1-j}(v)$ para todo $v \in \Delta_k$; la región entre sus dos grafos es el $(k+1)$-símplice

$$[s_j] := [v_0, \dots, v_j, w_j, \dots, w_k].$$

Entonces $[r_{j-1}]$ y $[r_j]$ son las facetas "inferior" y "superior" de $[s_j]$.

Fíjese que $0 \leq f_1 \leq \cdots \leq f_k \leq 1$. Para cada punto $v = t_0e_0 + \cdots + t_ke_k \in \Delta_k$ y $s \in I$, hay al menos un índice j tal que $f_{k-j}(v) \leq s \leq f_{k+1-j}(v)$. Entonces $\Delta_k \times I$ es la unión de los símplices $[s_0], [s_1], \dots, [s_k]$. □

Teorema 4.22. *Si dos funciones continuas $f\colon X \to Y$, $g\colon X \to Y$ son homotópicas, entonces $f_* = g_*\colon H_k(X) \to H_k(Y)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sea $\tau^j_{k+1}\colon \Delta_{k+1} \to \Delta_k \times I$ la función afín inyectiva cuya imagen es $[s_j] := [v_0,\dots,v_j,w_j,\dots,w_k]$, en la notación del Lema anterior, dado por

$$\tau^j_{k+1}(e_i) := \begin{cases} v_i & \text{si } i \leq j, \\ w_{i-1} & \text{si } i > j. \end{cases}$$

Sea $F\colon X \times I \to Y$ una homotopía entre f y g. Para cada k-símplice singular $\sigma\colon \Delta_k \to X$, escríbase $\sigma'(v,t) := (\sigma(v),t)$ si $(v,t) \in \Delta_k \times I$, así que $F \circ \sigma'\colon \Delta_k \times I \to Y$ es continua. Defínase un homomorfismo entre cadenas $P\colon S_k(X) \to S_{k+1}(Y)$ por la fórmula

$$P(\sigma) := \sum_{j=0}^{k} (-1)^j F \circ \sigma' \circ \tau^j_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j F \circ \sigma' \big|_{[v_0,\dots,v_j,w_j,\dots,w_k]}.$$

Por su definición, $P(\sigma)$ es una $(k+1)$-cadena singular en Y. Su borde en $S_k(Y)$ es

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) = \sum_{i \leq j} (-1)^{i+j} F \circ \sigma' \big|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_i,\dots,v_j,w_j,\dots,w_k]} \\ + \sum_{i \geq j} (-1)^{i+j+1} F \circ \sigma' \big|_{[v_0,\dots,v_j,w_j,\dots,\widehat{w}_i,\dots,w_k]}. \end{aligned}$$

Por otro lado, $\partial\sigma$ es una $(k-1)$-cadena en Y; el homomorfismo $P\colon S_{k-1}(X) \to S_k(Y)$ lleva $\partial\sigma$ en la k-cadena

$$\begin{aligned} P(\partial\sigma) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} F \circ \sigma' \big|_{[v_0,\dots,v_i,w_i,\dots,\widehat{w}_j,\dots,w_k]} \\ + \sum_{i > j} (-1)^{i+j+1} F \circ \sigma' \big|_{[v_0,\dots,\widehat{v}_j,\dots,v_i,w_i,\dots,w_k]}. \end{aligned}$$

Todos los términos en $P(\partial\sigma)$ también aparecen en $\partial P(\sigma)$, con el signo opuesto. En la suma $\partial P(\sigma) + P(\partial\sigma)$, sobreviven los términos en $\partial P(\sigma)$ con $i = j$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \partial P(\sigma) + P(\partial\sigma) &= \sum_{j=0}^{k} F \circ \sigma' \big|_{[v_0,\dots,v_{j-1},w_j,\dots,w_k]} - \sum_{j=0}^{k} F \circ \sigma' \big|_{[v_0,\dots,v_j,w_{j+1},\dots,w_k]} \\ &= F \circ \sigma' \big|_{[w_0,\dots,w_k]} - F \circ \sigma' \big|_{[v_0,\dots,v_k]} = g \circ \sigma - f \circ \sigma. \end{aligned}$$

Al escribir $f_\sharp\colon S_k(X) \to S_k(Y) : \sigma \mapsto f \circ \sigma$, se obtiene un morfismo de cadenas, ya que $\partial(f \circ \sigma) = f \circ \partial\sigma$. El cálculo anterior puede resumirse en la fórmula

$$\partial P + P\partial = g_\sharp - f_\sharp$$

que lleva $S_k(X)$ en $S_k(Y)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. (La aplicación P que cumple esta fórmula se llama una **homotopía de cadenas** entre los morfismos de cadenas $f_\sharp$ y $g_\sharp$.)

Ahora bien, si $\alpha \in S_k(X)$ es un k-ciclo (es decir, si $\partial\alpha = 0$), entonces $g_\sharp(\alpha) - f_\sharp(\alpha) = \partial P(\alpha)$ es un k-borde, así que sus clases en $H_k(Y) = Z_k(Y)/B_k(Y)$ coinciden:

$$f_*(\overline{\alpha}) := \overline{f_\sharp(\alpha)} = \overline{g_\sharp(\alpha)} = g_*(\overline{\alpha}),$$

para todo $\overline{\alpha} \equiv (\alpha + B_k(X)) \in H_k(X)$. □

Obsérvese que la demostración anterior viene en dos etapas: una larga construcción combinatoria, usando la subdivisión de un prisma en símplices, para pasar de una homotopía de funciones F a la homotopía de cadenas P; luego un breve argumento algebraico que convierte esa homotopía de cadenas en igualdades a nivel de homología. Los considerandos algebraicos que pasan de complejos de cadenas a grupos de homología reciben el nombre de *álgebra homológica*. El contenido topológico del proceso consiste solamente en amarrar las cadenas.

Corolario 4.23. *Una equivalencia de homotopía $f\colon X \to Y$ induce una familia de isomorfismos, $f_*\colon H_k(X) \xrightarrow{\simeq} H_k(Y)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.* ⊟

► Una noción muy importante, que a su vez sirve para calcular muchos grupos de homología, es la relación entre la homología de un espacio X y la de un subespacio $A \subseteq X$. Evidentemente, la inclusión $i\colon A \rightarrowtail X$ induce un homomorfismo $i_*\colon H_k(A) \to H_k(X)$, no necesariamente inyectivo. En la categoría de grupos abelianos, es posible pasar al cociente $H_k(X)/H_k(A)$. Resulta que este grupo cociente no siempre coincide con el grupo $H_k(X/A)$; pero esto es ventajoso si el cociente topológico X/A es difícil de manejar —por ejemplo, si A no es cerrado en X. En lugar de pasar al cociente en topología, es preferible trabajar en la categoría de pares (X,A). Recuérdese que un morfismo $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ es una función continua $f\colon X \to Y$ tal que $f(A) \subseteq B$.

Definición 4.24. Sea X un subespacio topológico y sea $A \subseteq X$. El grupo abeliano cociente $S_k(X,A) := S_k(X)/S_k(A)$ es el grupo de **k-cadenas singulares relativas** en X mod A. Si $\sigma\colon \Delta_k \to X$ es una k cadena singular en X, la circunstancia $\sigma(\Delta_k) \subseteq A$ —es decir, $\sigma \in S_k(A)$ como subgrupo de $S_k(X)$— conlleva $\partial_k\sigma \in S_{k-1}(A)$ también. Luego hay un homomorfismo bien definido $\bar\partial_k\colon S_k(X,A) \to S_{k-1}(X,A)$ dado por $\bar\partial_k(\overline{\sigma}) := \overline{\partial_k\sigma}$ entre las coclases. En otras palabras, hay un diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & S_{k+1}(X) \arrow[r, "\partial_{k+1}"] \arrow[d] & S_k(X) \arrow[r, "\partial_k"] \arrow[d] & S_{k-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & S_{k+1}(X,A) \arrow[r, "\bar\partial_{k+1}"] & S_k(X,A) \arrow[r, "\bar\partial_k"] & S_{k-1}(X,A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

donde las flechas verticales son los homomorfismos cocientes de grupos abelianos. Fíjese que $\bar\partial_k \circ \bar\partial_{k+1} = 0$ así que las filas de este diagramas son complejos. La **homología relativa** del par (X,A) es la homología del complejo $(S_\bullet(X,A),\bar\partial)$.

Para dar una descripción más concreta del grupo $H_k(X,A)$, se puede identificar elementos de $Z_k(X,A)$ con cadenas singulares $\alpha \in S_k(X)$ tales que $\partial_k\alpha \in S_{k-1}(A)$; tales α se llaman *k-ciclos relativos*. Del mismo modo, es posible identificar $B_k(X,A)$ con k**-bordes relativos**; estos son elementos de $S_k(X)$ de la forma $\alpha = \partial_{k+1}\beta + \gamma$ donde $\beta \in S_{k+1}(X)$, $\gamma \in S_k(A)$. El grupo de homología relativa en grado k es $H_k(X,A) := Z_k(X,A)/B_k(X,A)$.

Por ejemplo, un 1-ciclo relativo es un camino en X cuyos puntos inicial y final quedan en A. Un k-símplice singular $\sigma\colon \Delta_k \to X$ es un k-ciclo relativo si cada $(k-1)$-faceta de σ queda en A.

Lema 4.25. *La homología relativa en grado k define un funtor* $H_k\colon \mathsf{TopPar} \to \mathsf{Ab}$.

Demostración. Sea $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ un morfismo de pares; hay morfismos de cadenas $f_\sharp\colon S_k(X) \to S_k(Y)$ y $f_\sharp\colon S_k(A) \to S_k(B)$ dadas por la misma fórmula $\sigma \mapsto f\circ\sigma$, porque si $\sigma\colon \Delta_k \to A$ es un k-símplice singular en $S_k(A)$, entonces $f(\sigma(\Delta_k)) \subseteq f(A) \subseteq B$, de modo que $f\circ\sigma$ es un k-símplice singular en $S_k(B)$. Entonces $\overline{\sigma} \mapsto \overline{f\circ\sigma}$ es un homomorfismo bien definido $f_\sharp\colon S_k(X,A) \to S_k(Y,B)$ entre grupos cocientes.

La fórmula $\partial_k\sigma := \sum_{j=0}^k (-1)^j\,\sigma\circ\varepsilon_k^j$, que define la operación de borde, muestra que $\partial_k(f_\sharp(\sigma)) = f_\sharp(\partial_k\sigma)$ en los primeros dos casos; y que $\bar\partial_k(f_\sharp(\overline{\sigma})) = f_\sharp(\bar\partial_k(\overline{\sigma}))$ en el tercer caso. Por lo tanto, cualquiera de estos $f_\sharp$ es un morfismo de cadenas. La fórmula $f_*(\overline{\alpha}) := \overline{f_\sharp(\alpha)}$ entonces bien define homomorfismos $f_*\colon H_k(X) \to H_k(Y)$ y $f_*\colon H_k(A) \to H_k(B)$ y también $H_kf \equiv f_*\colon H_k(X,A) \to H_k(Y,B)$.

Es fácil comprobar si $g\colon (Y,B) \to (Z,C)$ es otro morfismo de pares, entonces $(g\circ f)_* = g_*\circ f_*$ en los tres casos. También es evidente que al morfismo de pares $1_{(X,A)}$ le corresponde los automorfismos idénticos sobre los grupos $H_k(X)$, $H_k(A)$ y $H_k(X,A)$. Luego H_k es un funtor.[11] $\square$

El espacio X puede ser considerado como un par $(X,\emptyset)$; resulta que $H_k(X) \simeq H_k(X,\emptyset)$ de modo evidente. En la categoría de pares, la función identidad 1_X define un morfismo de pares $j\colon (X,\emptyset) \to (X,A)$. Al aplicar el funtor H_k a este morfismo y también a la inclusión $i\colon A \to X$, se obtiene una composición de homomorfismos:

$$H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j_*} H_k(X,A).$$

Si $\alpha \in Z_k(A)$ es un k-ciclo en A, $i_\sharp(\sigma)$ es el mismo k-ciclo como elemento de $Z_k(X)$; luego $j_\sharp(i_\sharp(\alpha))$ es un k-borde relativo en $B_k(X,A)$. Al pasar a homología, se obtiene la relación $j_*\circ i_* = 0$.

[11]En el transcurso de la demostración, se ha comprobado que la homología singular $X \mapsto H_k(X)$, $f \mapsto f_*$ también define un funtor $H_k\colon \mathsf{Top} \to \mathsf{Ab}$.

Entonces $\operatorname{im} i_* \leq \ker j_*$ como subgrupos de $H_k(X)$. De hecho, *estos dos subgrupos coinciden*; porque si $\overline{\beta} \in \ker j_*$ donde $\beta \in Z_k(X)$, la relación $j_*(\overline{\beta}) = 0$ dice que $j_\sharp(\beta) \in B_k(X,A)$ es un k-borde relativo, de la forma $j_\sharp(\beta) = \partial_k \eta + \gamma$ para algún $\eta \in S_{k+1}(X)$, $\gamma \in S_k(A)$. En el grupo $S_k(X)$, la última ecuación toma la forma $\beta = \partial_k \eta + \gamma$, o bien $\beta - \partial_k \eta = \gamma$. Pero los k-ciclos β y $\beta' := \beta - \partial_k \eta$ difieren por un k-borde, luego son homólogos, es decir $\overline{\beta} = \overline{\beta'}$ en $H_k(X)$. Se concluye que $\overline{\beta} = i_*(\overline{\gamma})$ en $H_k(X)$; lo cual muestra que $\ker j_* \leq \operatorname{im} i_*$.

Definición 4.26. Una composición de homomorfismos de grupos abelianos $G \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{\psi} K$ es **exacta en** H si $\operatorname{im} \varphi = \ker \psi$.

Una composición de tres o más homomorfismos es una **sucesión exacta** de grupos abelianos si la imagen de cada homomorfismo coincide con el núcleo del homomorfismo siguiente. En particular, una **sucesión exacta corta** está dada por un diagrama de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\varphi} H \xrightarrow{\psi} K \longrightarrow 0$$

donde φ es inyectivo (exactitud en G), $\operatorname{im} \varphi = \ker \psi$ (exactitud en H) y ψ es sobreyectivo (exactitud en K).

Ejemplo 4.27. Sea (X,A) un par de espacios topológicos, con $i \colon A \rightarrowtail X$ la inclusión. Entonces $i_\sharp \colon S_k(A) \to S_k(X)$ es inyectivo, ya que $i_\sharp(\sigma) := i \circ \sigma \colon \Delta_k \to X$ para cada k-símplice singular $\sigma \colon \Delta_k \to A$. La aplicación cociente $j_\sharp \colon S_k(X) \to S_k(X,A) = S_k(X)/S_k(A)$ es evidentemente sobreyectiva; y su núcleo $\ker j_\sharp$ coincide con el subgrupo $\operatorname{im} i_\sharp \leq S_k(X)$. Por lo tanto, las k-cadenas absolutas y relativas forman una sucesión exacta corta de grupos abelianos:

$$0 \longrightarrow S_k(A) \xrightarrow{i_\sharp} S_k(X) \xrightarrow{j_\sharp} S_k(X,A) \longrightarrow 0.$$

Como estas relaciones son válidas para cada $k \in \mathbb{N}$, donde además las aplicaciones $i_\sharp$ y $j_\sharp$ son morfismos de cadenas, se obtiene una sucesión exacta corta *de complejos*:[12]

$$0 \longrightarrow S_\bullet(A) \xrightarrow{i_\sharp} S_\bullet(X) \xrightarrow{j_\sharp} S_\bullet(X,A) \longrightarrow 0. \qquad \Diamond$$

Lema 4.28. *Dada una sucesión exacta de complejos de cadenas*

$$0 \longrightarrow C_\bullet \xrightarrow{\varphi} D_\bullet \xrightarrow{\psi} E_\bullet \longrightarrow 0,$$

hay un homomorfismo bien definido $\delta_k \colon H_k(E) \to H_{k-1}(C)$ *dada por la fórmula simbólica:*

$$\delta_k(\bar{z}) := \overline{\varphi^{-1}(\partial(\psi^{-1}(\bar{z})))}.$$

para todo $\bar{z} := z + B_k(E) \in H_k(E)$.

[12] Una **categoría abeliana** es una categoría C en donde cada conjunto de morfismos $\operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A,B)$ es un grupo abeliano; es posible formar la suma directa $A \oplus B$ dos objetos A, B cualesquiera; cada morfismo φ tiene un núcleo $\ker \varphi$ y un conúcleo $\operatorname{coker} \varphi$; y además $\operatorname{coker}(\ker \varphi) = \ker(\operatorname{coker} \varphi)$. Los grupos abelianos y los complejos de cadenas singulares son dos ejemplos; el concepto de sucesión exacta corta está bien definida en cualquier categoría abeliana.

Demostración. Considérese el siguiente diagrama conmutativo, cuyas filas son sucesiones exactas:

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C_{k+1} \arrow[r, "\varphi_{k+1}"] \arrow[d, "\partial^C"] & D_{k+1} \arrow[r, "\psi_{k+1}"] \arrow[d, "\partial^D"] & E_{k+1} \arrow[r] \arrow[d, "\partial^E"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_k \arrow[r, "\varphi_k"] \arrow[d, "\partial^C"] & D_k \arrow[r, "\psi_k"] \arrow[d, "\partial^D"] & E_k \arrow[r] \arrow[d, "\partial^E"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_{k-1} \arrow[r, "\varphi_{k-1}"] & D_{k-1} \arrow[r, "\psi_{k-1}"] & E_{k-1} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Si $z \in E_k$ es un k-ciclo, hay $y \in D_k$ con $\psi_k(y) = z$. Entonces

$$\psi_{k-1}(\partial^D y) = \partial^E(\psi_k(y)) = \partial^E z = 0,$$

así que hay un único $x \in C_{k-1}$ tal que $\varphi_{k-1}(x) = \partial^D y$. Además, vale

$$\varphi_{k-2}(\partial^C x) = \partial^D(\varphi_{k-1}(x)) = \partial^D(\partial^D y) = 0,$$

así que $\partial^C x = 0$ porque φ_{k-2} es inyectivo. Luego, $x \in C_{k-1}$ es un $(k-1)$-ciclo. La fórmula del enunciado sugiere definir $\delta_k(\bar{z}) := \bar{x}$.

Para ver que δ_k está bien definido, sea $z + \partial^E w$ un k-ciclo homólogo a z, con $w \in E_{k+1}$. Sea $v \in D_k$ tal que $\psi_k(v) = z + \partial^E w$; y sea $u \in D_{k+1}$ tal que $\psi_{k+1}(u) = w$. Entonces

$$\psi_k(v) = \psi_k(y) + \partial^E(\psi_{k+1}(u)) = \psi_k(y + \partial^D u),$$

y por ende hay un único $t \in C_k$ tal que $v = y + \partial^D u + \varphi_k(t)$. Entonces

$$\partial^D v = \partial^D y + \partial^D(\varphi_k(t)) = \varphi_{k-1}(x) + \varphi_{k-1}(\partial^C t) = \varphi_{k-1}(x + \partial^C t);$$

lo cual implica que $x + \partial^C t$ es el único ciclo en C_{k-1} cuya imagen bajo φ_{k-1} es $\partial^D v$. En resumen: el cambio $z \mapsto z + \partial^E w$ produce una modificación $x \mapsto x + \partial^C t$, así que la clase $\bar{x} \in H_{k-1}(C)$ está determinada por la clase $\bar{z} \in H_k(E)$. □

Definición 4.29. Dado un par (X,A) de espacios topológicos, el homomorfismo

$$\delta_k \colon H_k(X,A) \to H_{k-1}(A)$$

dada por el Lema 4.28 aplicada a la sucesión de complejos del Ejemplo 4.27, se llama el **homomorfismo conector** en grado k entre estos grupos de homología.

El siguiente resultado muestra que la exactitud de la composición $j_* \circ i_*$ en cada grupo $H_k(X)$ es solamente una tercera parte de una sucesión exacta infinitamente larga, formada por los tres grupos $H_k(A)$, $H_k(X)$ y $H_k(X,A)$, para cada $k \in \mathbb{N}$. El papel del homomorfismo conector es precisamente el de ligar estos triples de grupos abelianos en una sucesión que termina en el grupo $H_0(X,A)$.

Proposición 4.30. *Dado un par (X,A) de espacios topológicos, hay una* ***sucesión exacta larga en homología*** *singular:*

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_k(A) \xrightarrow{i_*} H_k(X) \xrightarrow{j_*} H_k(X,A) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(A) \xrightarrow{i_*} H_{k-1}(X) \xrightarrow{j_*} H_{k-1}(X,A) \xrightarrow{\delta} \cdots$$
$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_0(A) \xrightarrow{i_*} H_0(X) \xrightarrow{j_*} H_0(X,A) \longrightarrow 0.$$

Demostración. La exactitud $\operatorname{im} i_* = \ker j_*$ en cada grupo $H_k(X)$ ya ha sido comprobada.

Para la exactitud en $H_k(X,A)$, aplíquese la construcción del Lema 4.28 con $\psi_k = j_\sharp$. Fíjese que
$$\delta(j_*(\bar{y})) = \delta(\overline{j_\sharp(y)}) = \overline{i_\sharp^{-1}(\partial y)} = 0$$
para $y \in Z_k(X)$. Esto dice que $\delta \circ j_* = 0$ o equivalentemente $\operatorname{im} j_* \leq \ker\delta$.

Por otro lado, si $\bar{z} = \overline{j_\sharp(y)} \in \ker\delta$, entonces $\overline{i_\sharp^{-1}(\partial y)} = \delta(\overline{j_\sharp(y)}) = 0$, así que $i_\sharp^{-1}(\partial y) = \partial x$ para algún $x \in S_k(A)$. Luego $\partial(y - i_\sharp(x)) = \partial y - i_\sharp(\partial x) = 0$; el ciclo $y - i_\sharp(x) \in Z_k(X)$ cumple
$$j_*(\overline{y - i_\sharp(x)}) = j_*(\bar{y}) - j_*(i_*(\bar{x})) = \bar{z} - 0 = \bar{z}$$
y en consecuencia $\bar{z} \in \operatorname{im} j_*$. Se ha comprobado que $\operatorname{im} j_* = \ker\delta$.

Para la exactitud en $H_k(A)$, tómese $z = j_\sharp(y) \in Z_k(X,A)$; entonces
$$i_*(\delta(\bar{z})) = i_*(\overline{i_\sharp^{-1}(\partial y)}) = \overline{\partial y} = 0.$$
Esto dice que $i_* \circ \delta = 0$ o equivalentemente $\operatorname{im}\delta \leq \ker i_*$.

Por otro lado, si $u \in Z_k(A)$ cumple $i_*(\bar{u}) = 0$ en $H_k(X)$, entonces $i_\sharp(u) = \partial v$ para algún $v \in S_{k+1}(X)$; luego, $\partial(j_\sharp v) = j_\sharp(\partial v) = j_\sharp(i_\sharp u) = 0$, así que $j_\sharp v$ es un ciclo en $S_{k+1}(X,A)$. Además, $\delta(\overline{j_\sharp v}) = \overline{i_\sharp^{-1}(\partial v)} = \bar{u} \in H_k(A)$. Se ha comprobado que $\operatorname{im}\delta = \ker i_*$.

Por último, se deja la sobreyectividad del homomorfismo $j_* \colon H_0(X) \to H_0(X,A)$ como ejercicio. □

Corolario 4.31. *Si (X,A) es un par de espacios topológicos donde X es contractible, entonces $H_k(X,A) \simeq H_{k-1}(A)$ para $k > 0$; y $H_0(X,A) = 0$ si $A \neq \emptyset$.*

Demostración. Si $P = \{p\}$ para algún $p \in X$, hay una equivalencia en homotopía $1_X \simeq c_p$. El Corolario 4.23 muestra que $H_k(X) \simeq H_k(P) = 0$ para $k > 0$.

Además, $H_0(X) \simeq H_0(P) = \mathbb{Z}$, así que $i_* \colon H_0(A) \to H_0(X)$ es sobreyectivo si $A \neq \emptyset$. El homomorfismo $j_* \colon H_0(X) \to H_0(X,A)$ cumple $\ker j_* = \operatorname{im} i_*$, así que $j_* = 0$; lo cual implica que $H_0(X,A) = \operatorname{im} j_* = 0$. □

4.3 La sucesión de Mayer y Vietoris

Hay una propiedad más de la homología singular que permita aprovechar esta sucesión exacta para calcular muchos grupos de homología. El par (X,A) puede considerarse heurísticamente como un sustituto para el espacio cociente X/A, en donde se identifican todos los puntos de la parte A de X. Si $B \subset A$, se puede descartar los elementos de B en A si al mismo tiempo se descartan estos elementos de X. En otras palabras, hay una biyección entre *conjuntos* cocientes $X/A \leftrightarrow (X \setminus B)/(A \setminus B)$. No debería ser difícil, entonces, identificar condiciones sobre el triple $B \subset A \subseteq X$ para que esta biyección sea un homeomorfismo, respetando los pormenores de topologías relativas y topologías cocientes. Ahora, bien, al volver a la categoría de *pares* topológicos, esta *escisión* de B transforma el par (X,A) en el par $(X \setminus B, A \setminus B)$. El siguiente teorema, cuya demostración será omitida, establece una condición sencilla que implica que esta transformación determina un isomorfismo en homología.

Teorema 4.32 (Escisión)**.** *Sea (X,A) un par de espacios topológicos, y sea $B \subseteq X$ en X tal que $\overline{B} \subseteq A^\circ$. Entonces la inclusión de pares $l\colon (X \setminus B, A \setminus B) \rightarrowtail (X,A)$ induce isomorfismos $l_*\colon H_k(X \setminus B, A \setminus B) \xrightarrow{\simeq} H_k(X,A)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.* $\boxminus$

Corolario 4.33. *Si $A \subseteq X$ y $Y \subseteq X$ cumplen $A^\circ \cup Y^\circ = X$, entonces la inclusión de pares $(Y, A \cap Y) \rightarrowtail (X,A)$ induce isomorfismos $H_k(Y, A \cap Y) \simeq H_k(X,A)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.* $\boxminus$

La hipótesis implica que $\{A^\circ, X \setminus \overline{B}\}$ es un cubrimiento abierto de X; es decir, $\{A, X \setminus B\}$ es un cubrimiento de X por conjuntos cuyos interiores también cubren X. La demostración de este teorema es larga y reúne varias ideas.[13] Primero, un ciclo relativo en $Z_k(X,A)$ es una cadena $z \in S_k(X)$ tal que cada símplice singular de ∂z tenga imagen en A; luego hay que considerar cadenas en X cuyos bordes están subordinados al cubrimiento $\{A^\circ, X \setminus \overline{B}\}$; o más generalmente, a un cubrimiento abierto finito $\mathcal{U}$ que contiene A°. Segundo, la sucesión larga en homología puede emplearse para reducir el problema a la construcción a una homotopía de cadenas entre $S_\bullet(X,A)$ y un complejo de "cadenas subordinadas" $S_\bullet(\mathcal{U}, \mathcal{U} \setminus \{A^\circ\})$. Tercero, si $\sigma\colon \Delta_k \to X$ es un k-símplice singular, entonces $\{\, \sigma^{-1}(U) : U \in \mathcal{U} \,\}$ es un cubrimiento abierto de Δ_k; el problema se reduce al de subdividir Δ_k en subsímplices de diámetro menor que el número de Lebesgue de este cubrimiento.[14] Finalmente, hay que ejecutar varias veces la llamada **subdivisión baricéntrica** de Δ_k, que produce un complejo simplicial[15] cuyos

[13] Para una demostración completa, véase la sección 2.1 del libro de Hatcher; o bien la sección III.7 del libro: Albrecht Dold, *Lectures on Algebraic Topology*, Springer, Berlin, 1995. Hay una demostración del teorema de escisión para homología *simplicial* en el libro de Hocking y Young.

[14] La primera versión del teorema de escisión usó la homología simplicial, demostrado en el libro: Solomon Lefschetz, *Topology*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1930. Para ello, Lefschetz quiso escindir de un par de complejos simpliciales (K,L) aquellos símplices de L que no tienen vértices en $\overline{K \setminus L}$. Esta idea es transferible a homología singular si se cumple la hipótesis del Teorema 4.32; pero fue formalizado hasta 1945, cuando Eilenberg y Steenrod enunciaron los axiomas para homología que forman el tema de su libro de 1952.

[15] Para los detalles de la subdivisión baricéntrica, véase la sección 4.2 del libro de Singer y Thorpe.

vértices son los baricentros de cada uno de las facetas de Δ_k; y cuyos diámetros no exceden $(k/(k+1))\,\mathrm{diam}(\Delta_k)$.

► Para ver la utilidad del concepto de escisión, he aquí una demostración rápida de un teorema clásico de Brouwer: la **invariancia de dimensión** bajo homeomorfismos, en el caso de abiertos en espacios euclidianos.

Proposición 4.34. *Si dos abiertos no vacíos $U \subseteq \mathbb{R}^m$ y $V \subseteq \mathbb{R}^n$ son homeomorfos, entonces $m = n$.*

Demostración. Sin perder generalidad (una traslación en $\mathbb{R}^m$ es un homeomorfismo), se puede suponer que $0 \in U \subseteq \mathbb{R}^m$.

Fíjese que $U \cup (\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) = \mathbb{R}^m$. Por el Corolario 4.33, hay isomorfismos de escisión

$$H_k(U, U \setminus \{0\}) \simeq H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}.$$

El Corolario 4.23 muestra que $H_k(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \simeq H_k(\mathbb{S}^{m-1})$ para todo k, ya que $\mathbb{S}^{m-1}$ es una retracción por deformación de $\mathbb{R}^m$.

Como $\mathbb{R}^m$ es contractible, el Corolario 4.31 muestra que $H_k(\mathbb{R}^m, \mathbb{S}^{m-1}) \simeq H_{k-1}(\mathbb{S}^{m-1})$ para $k > 0$. Es fácil comprobar que $H_{k-1}(\mathbb{S}^{m-1}) = 0$ para $k = 1, \dots, m-1$ y además que $H_{m-1}(\mathbb{S}^{m-1}) \simeq \mathbb{Z}$.

Se concluye que, para cualquier $x \in U$, vale

$$H_k(U, U \setminus \{x\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < m-1, \\ \mathbb{Z} & \text{si } k = m-1. \end{cases}$$

Un homeomorfismo $h \colon U \to V$, con $y := h(x) \in V$, induce isomorfismos de grupos h_* que obligan $H_k(V, V \setminus \{y\}) = 0$ si $k < m-1$; $H_{m-1}(V, V \setminus \{y\}) \simeq \mathbb{Z}$. Sin embargo, como $V \subseteq \mathbb{R}^n$, se obtienen las mismas fórmulas con n en lugar de m; esto sólo es posible si $m = n$. □

► Hay un procedimiento en homología parcialmente análogo al teorema de Seifert y van Kampen en homotopía. En ambos casos, se trata de obtener información sobre invariantes algebraicos de una unión $X = U \cup V$ a partir de los invariantes correspondientes de los subespacios U, V y $U \cap V$.

Definición 4.35. Sea X un espacio topológico y sean $U \subseteq X$, $V \subseteq X$ dos partes (no necesariamente abiertas). Dícese que $\{U, V\}$ es una **copla escisiva**[16] si las dos inclusiones de pares $i \colon (U, U \cap V) \rightarrowtail (X, V)$ y $j \colon (V, U \cap V) \rightarrowtail (X, U)$ inducen isomorfismos i_*, j_* en homología. [En otras palabras, $V \setminus U$ puede escindirse del par (X, V), como también $U \setminus V$ de (X, U).]

[16] El término *copla* se usa aquí en vez de *par* porque en general $U \not\subseteq V$ y $V \not\subseteq U$. No tiene pretensiones poéticas.

Ejemplo 4.36. Por el Corolario 4.33, una condición suficiente para que $\{U,V\}$ sea una copla escisiva en $X = U \cup V$ es la circunstancia $X = U^\circ \cup V^\circ$.

Pero esta condición no es necesaria. Por ejemplo, si $B_+ := \{\, x = (x_0,\dots,x_n) \in \mathbb{S}^n : x_n \geq 0 \,\}$ y $B_- := \{\, x \in \mathbb{S}^n : x_n \leq 0 \,\}$ son los hemisferios norte y sur de $\mathbb{S}^n$; y si se identifica $\mathbb{S}^{n-1}$ con el ecuador $x_n = 0$ de $\mathbb{S}^n$, entonces $\mathbb{S}^n = B_+ \cup B_-$ y $\mathbb{S}^{n-1} = B_+ \cap B_-$, pero $B_+^\circ \cup B_-^\circ = \mathbb{S}^n \setminus \mathbb{S}^{n-1}$. En este caso, la copla $\{B_+, B_-\}$ no cumple las hipótesis del Corolario 4.33.

Sin embargo, se puede mostrar, usando la invariancia de la homología singular bajo homotopía, que $\{B_+, B_-\}$ sí es escisiva, es decir, que $H_k(B_\pm, \mathbb{S}^{n-1}) \simeq H_k(\mathbb{S}^n, B_\mp)$ para $k \in \mathbb{N}$. $\Diamond$

El paso principal en la demostración (omitida) del teorema de escisión es la construcción de una homotopía de cadenas entre el complejo $S_\bullet(X)$ y el subcomplejo generado por símplices singulares cuyas imágenes quedan en $U = A$, o bien en $V = X \setminus B$. Denótese este subcomplejo por $S_\bullet(U \uplus V)$. Una manera alternativa de enunciar el teorema de escisión es la siguiente: *si $\{U,V\}$ es una copla escisiva, entonces la inclusión de complejos $S_\bullet(U \uplus V) \rightarrowtail S_\bullet(X)$ induce isomorfismos en homología.*

Proposición 4.37. *Si $\{U,V\}$ es una copla escisiva con $X = U \cup V$, entonces hay una sucesión exacta larga de grupos de homología singular:*

$$\cdots \xrightarrow{\delta} H_k(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_*} H_k(U) \oplus H_k(V) \xrightarrow{\psi_*} H_k(X) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(U \cap V) \xrightarrow{\varphi_*} \cdots$$

llamada la ***sucesión de Mayer y Vietoris*** *para esta copla.*[17]

Demostración. Si $i_1 \colon U \to X$, $i_2 \colon V \to X$ son las inclusiones, defínase

$$S_k(U \uplus V) := i_{1\sharp}(S_k(U)) + i_{2\sharp}(S_k(V)).$$

Este es el subgrupo de $S_k(X)$ generado los k-símplices singulares σ con $\sigma(\Delta_k) \subseteq U$ o bien $\sigma(\Delta_k) \subseteq V$. Es claro que el operador de borde ∂_k lleva $S_k(U \uplus V)$ en $S_{k+1}(U \uplus V)$, así que $(S_\bullet(U \uplus V), \partial)$ es un complejo de cadenas. En vista del comentario anterior al enunciado, el teorema de escisión garantiza que $H_k(U \uplus V) \simeq H_k(X)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Si $j_1 \colon U \cap V \to U$, $j_2 \colon U \cap V \to V$ son las inclusiones, defínase

$$0 \longrightarrow S_\bullet(U \cap V) \xrightarrow{\varphi} S_\bullet(U) \oplus S_\bullet(V) \xrightarrow{\psi} S_\bullet(U \uplus V) \longrightarrow 0,$$

por

$$\varphi(x) := \bigl(j_{1\sharp}(x), -j_{2\sharp}(x)\bigr), \qquad \psi(u,v) := i_{1\sharp}(u) + i_{2\sharp}(v),$$

para $x \in S_k(U \cap V)$, $u \in S_k(U)$, $v \in S_k(V)$.

[17]El problema de calcular la homología de $U \cup V$ a partir de las homologías de U, V y $U \cap V$ fue abordado por Walther Mayer en 1929; su trabajo fue completado por su colega Vietoris (1891–2002), en: Leopold Vietoris, *Über die Homologiegruppen der Vereinigung zweier Komplexe*, Monatshefte für Mathematik **37** (1930), 159–162. Fue reformulado en términos de sucesiones exactas en el libro de Eilenberg y Steenrod.

Es evidente que φ es inyectivo y que ψ es sobreyectivo. Como $i_1 \circ j_1 = i_2 \circ j_2$ es la inclusión $U \cap V \rightarrowtail X$, también queda claro que $\psi \circ \varphi = 0$.

Además, $\psi(u,v) = 0$ sólo si $i_{1\sharp}(u) = -i_{2\sharp}(v)$. Los dos lados de esta ecuación son cadenas en X que quedan en U y también en V; por ende, quedan en $U \cap V$. Entonces hay $s,t \in S_k(U \cap V)$ con $u = j_{1\sharp}(s)$, $v = j_{2\sharp}(t)$. La ecuación $\psi(u,v) = 0$ implica que $t = -s$, así que $(u,v) \in \operatorname{im} \varphi$. En resumen: la sucesión anterior de complejos es una *sucesión exacta corta*.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, hay un homomorfismo conector $\delta \colon H_k(X) \to H_{k-1}(U \uplus V)$, el cual es nulo si $k = 0$. La fórmula simbólica del Lema 4.28 permite describir δ concretamente. Cada clase $\bar{z} \in H_k(X)$ está representada por un k-ciclo $z \in Z_k(U \uplus V)$. Esto quiere decir que $z = i_{1\sharp}(u) + i_{2\sharp}(v)$, donde $\partial z = 0$ implica que $i_{2\sharp}(\partial v) = -i_{1\sharp}(\partial u)$. Entonces hay $x \in S_{k-1}(U \cap V)$ con $\partial u = j_{1\sharp}(x)$; de hecho, x es un $(k-1)$-ciclo porque $j_{1\sharp}(\partial x) = \partial(\partial u) = 0$, luego $\partial x = 0$ ya que $j_{1\sharp}$ es inyectivo. El algoritmo del Lema 4.28 muestra que $\delta(\bar{z}) = \bar{x}$.

Fíjese ahora que $\bar{z} \in \operatorname{im} \psi_*$ si las k-cadenas u,v son *k-ciclos*, en cuyo caso $\partial u = 0$ y se puede tomar $\bar{x} = 0$. Esto implica que $\operatorname{im} \psi_* = \ker \delta$. Por otro lado, $\bar{x} \in \ker \varphi_*$ si y sólo si $(j_{1*}(\bar{x}), -j_{2*}(\bar{x})) = (0,0)$ si y sólo hay $u' \in S_{k+1}(U)$, $v' \in S_{k+1}(V)$ con $\partial u' = j_{1\sharp}(x)$ y $\partial v' = j_{2\sharp}(x)$ tales que $i_{2\sharp}(\partial v') = -i_{1\sharp}(\partial u')$, en cuyo caso $z' = i_{1\sharp}(u') + i_{2\sharp}(v')$ es un $(k+1)$-ciclo con $\delta(\bar{z}') = \bar{x}$; y viceversa. Luego $\ker \varphi_* = \operatorname{im} \delta$. Se ha comprobado que la sucesión larga del enunciado es exacta. $\square$

Ejemplo 4.38. Como los hemisferios norte y sur de $\mathbb{S}^n$ forma una copla escisiva $\{B_+, B_-\}$, su sucesión de Mayer y Vietoris contiene el pedazo

$$H_k(B_+) \oplus H_k(B_-) \xrightarrow{\psi_*} H_k(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\varphi_*} H_{k-1}(B_+) \oplus H_{k-1}(B_-).$$

Como los hemisferios $B_\pm$ son contractibles, esto se reduce para $k \geq 2$ a la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_k(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\delta} H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1}) \longrightarrow 0,$$

así que $H_k(\mathbb{S}^n) \simeq H_{k-1}(\mathbb{S}^{n-1})$ mediante δ. Este permite calcular $H_k(\mathbb{S}^n)$ *por inducción* sobre n.

Para el caso especial $n = 0$, los dos hemisferios de $\mathbb{S}^0$ son $\{+1\}$ y $\{-1\}$, con intersección vacía; entonces se obtiene un isomorfismo

$$0 \longrightarrow H_k(\{+1\}) \oplus H_k(\{-1\}) \xrightarrow{\psi_*} H_k(\mathbb{S}^0) \longrightarrow 0,$$

de donde $H_k(\mathbb{S}^0) = 0$ si $k > 0$; y $H_0(\mathbb{S}^0) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Por inducción, se obtiene $H_k(\mathbb{S}^n) \simeq H_{k-n}(\mathbb{S}^0) = 0$ si $k > n$.

Para $k = 1$ se obtiene, al agregar dos términos más de la sucesión:

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^n) \xrightarrow{\delta} H_0(\mathbb{S}^{n-1}) \xrightarrow{\varphi_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_*} H_0(\mathbb{S}^n) \longrightarrow 0.$$

Si $n \geq 2$, este φ_* es inyectivo, así que δ es nulo y por ende $H_1(\mathbb{S}^n) = 0$. Luego, por inducción, se concluye que $H_k(\mathbb{S}^n) = 0$ para $k = 1, \dots, n-1$.

Si $n = 1$, se obtiene

$$0 \longrightarrow H_1(\mathbb{S}^1) \xrightarrow{\delta} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\psi_*} \mathbb{Z} \longrightarrow 0.$$

De ahí resulta $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \operatorname{im} \delta = \ker \varphi_* \simeq \mathbb{Z}$. Por inducción, se concluye que $H_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$ para $n \geq 1$.

En resumen: para $n \geq 1$, vale

$$H_k(\mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = 0, n, \\ 0 & \text{si } k \neq 0, n. \end{cases} \qquad \lozenge$$

Corolario 4.39. *Si $m \neq n$ en $\mathbb{N}$, entonces $\mathbb{S}^m$ y $\mathbb{S}^n$ no son homeomorfos. Los espacios vectoriales $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ tampoco son homeomorfos.*

Demostración. Como $\mathbb{S}^0$ es disconexo mientras $\mathbb{S}^n$ es conexo para $n > 1$, basta considerar los casos $1 \leq m < n$. Si $\mathbb{S}^m$ y $\mathbb{S}^n$ fueran homeomorfos, entonces el Corolario 4.23 diría que $H_k(\mathbb{S}^m) \simeq H_k(\mathbb{S}^n)$ para cada k, lo cual es falso: de hecho, $H_m(\mathbb{S}^m) = \mathbb{Z}$ mientras $H_m(\mathbb{S}^n) = 0$.

En la demostración de la Proposición 4.34, se ha observado que $H_k(\mathbb{R}^m \setminus \{0\}) \simeq H_k(\mathbb{S}^{m-1})$ para todo k. Se concluye que $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ y $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ no son homeomorfos. Si hubiera un homeomorfismo $h\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, la traslación $g\colon x \mapsto x - h(0)$ sobre $\mathbb{R}^n$ daría un homeomorfismo de espacios puntuados $g \circ h\colon (\mathbb{R}^m, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$. Por restricción, $g \circ h$ también definiría un homeomorfismo de $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ en $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, cosa que no existe. $\square$

1 Ejercicios sobre espacios topológicos

Ejercicio 1.1. Defínase un orden parcial sobre $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ por las reglas

$$(m,2n) \leq (m+1,n) \quad \text{y} \quad (m,2n+1) \leq (m+1,n),$$

extendidas por transitividad. Demostrar que $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ con este orden es un conjunto dirigido; es decir, dados dos elementos (m_1,n_1) y (m_2,n_2), hay un elemento $(m_3,n_3) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ tal que $(m_1,n_1) \leq (m_3,n_3)$ y $(m_2,n_2) \leq (m_3,n_3)$.

Ejercicio 1.2. Dada una función $f\colon X \to Y$, demostrar estas propiedades de las preimágenes $B \mapsto f^{-1}(B) : \mathbf{2}^Y \to \mathbf{2}^X$:

(a) $f^{-1}\bigl(\bigcup_{\beta\in K} B_\beta\bigr) = \bigcup_{\beta\in K} f^{-1}(B_\beta), \quad f^{-1}\bigl(\bigcap_{\beta\in K} B_\beta\bigr) = \bigcap_{\beta\in K} f^{-1}(B_\beta).$

(b) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset, \quad f^{-1}(Y) = X, \quad f^{-1}(Y\setminus B) = X \setminus f^{-1}(B).$

(c) Si $A \subseteq X$, entonces $A \subseteq f^{-1}(f(A))$, con igualdad si f es inyectiva.

(d) Si $B \subseteq Y$, entonces $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$, con igualdad si f es sobreyectiva.

Ejercicio 1.3. Sean $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ dos bases para las topologías $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$, respectivamente, sobre un conjunto X. Comprobar que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$ si y sólo si[1] se verifica la siguiente condición: *para cada $B \in \mathcal{B}$ y cada $x \in B$, hay un miembro $B' \in \mathcal{B}'$ tal que $x \in B' \subseteq B$.*

Ejercicio 1.4. (a) Sea X un espacio topológico con la topología $\mathcal{T}$. Sea $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ una familia de abiertos tal que, para cada $U \in \mathcal{T}$ y cada $x \in U$, hay un conjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B \subseteq U$. Mostrar que $\mathcal{B}$ es una base para la topología $\mathcal{T}$.

(b) Mostrar que la familia numerable de intervalos abiertos racionales

$$\mathcal{Q} := \{\, (p,q) \subset \mathbb{R} : p,q \in \mathbb{Q};\ p < q \,\}$$

es una base para la topología usual de la recta real $\mathbb{R}$.

Ejercicio 1.5. Sean X un conjunto simplemente ordenado con al menos dos elementos. Escríbase $x < y$ si $x \leq y$ pero $x \neq y$. Sea $\mathcal{B}$ la familia de todos los **intervalos**

$$(x,y) := \{\, z \in X : x < z < y \,\}, \quad (\leftarrow,y) := \{\, z \in X : z < y \,\}, \quad (x,\to) := \{\, z \in X : x < z \,\},$$

para $x,y \in X$. Comprobar que $\mathcal{B}$ es una base para una topología sobre X.

[1] Dícese que $\mathcal{T}'$ es *más fina* que $\mathcal{T}$ cuando $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$.

Ejercicio 1.6. Sea (X,ρ) un espacio métrico. Defínase otras dos funciones $\bar\rho$ y σ de $X \times X$ en $[0,\infty)$ por

$$\bar\rho(x,y) := \min\{\,\rho(x,y),\ 1\,\}, \qquad \sigma(x,y) := \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}.$$

Mostrar que $\bar\rho$ y σ son métricas acotadas sobre X. Verificar que cada una de ellas es equivalente a la métrica original ρ.

⟦ Indicación: Si $f(t) := t/(1+t)$ para $t \in [0,\infty)$, mostrar que $f(s+t) \leq f(s) + f(t)$. ⟧

Ejercicio 1.7. (a) En un espacio métrico (X,ρ), comprobar que una "bola abierta" $B_\rho(x;\varepsilon) := \{\,y \in X : \rho(x,y) < \varepsilon\,\}$ es efectivamente un vecindario de cada uno de sus puntos.

(b) Mostrar también cada "bola cerrada" $\overline{B}_\rho(x;\varepsilon) := \{\,y \in X : \rho(x,y) \leq \varepsilon\,\}$ es cerrado en X.

(c) Comprobar que la bola cerrada $\overline{B}_\rho(x;\varepsilon)$ no coincide necesariamente con la clausura de la bola abierta $B_\rho(x;\varepsilon)$. ⟦ Indicación: Considérese $X := [0,2] \cup [3,5] \subset \mathbb{R}$. ⟧

Ejercicio 1.8 (Kuratowski)**.** Sea $A \mapsto \overline{A}$ una operación definida sobre las partes de un conjunto X que cumple estas propiedades:

$$\overline{\emptyset} = \emptyset, \qquad A \subseteq \overline{A}, \qquad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \qquad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

para todo $A, B \in \mathbf{2}^X$. Mostrar que $A \subseteq B \implies \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Sea $\mathcal{T} := \{\,X \setminus F : F = \overline{F}\,\}$. Verificar que $\mathcal{T}$ es una topología sobre X, y que la clausura en esta topología de cualquier $A \subseteq X$ coincide con $\overline{A}$.

Ejercicio 1.9. Si $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ son dos topologías sobre un conjunto X, con $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}'$, denótese los interiores de una parte $A \subseteq X$ para $\mathcal{T}$ y $\mathcal{T}'$ por A° y $A^{\circ\prime}$, respectivamente; denótese por $\overline{A}$ y $\overline{A}'$ sus respectivas clausuras.

Mostrar que $A^\circ \subseteq A^{\circ\prime}$ mientras $\overline{A} \supseteq \overline{A}'$.

Ejercicio 1.10. En un espacio topológico X, dícese que $U \subseteq X$ es **regularmente abierto** si $U = (\overline{U})^\circ$ y que $F \subseteq X$ es **regularmente cerrado** si $F = \overline{F^\circ}$.

(a) Mostrar que $V \subseteq (\overline{V})^\circ$ si V es abierto en X; y que $H \supseteq \overline{H^\circ}$ si H es cerrado en X.

(b) Si $H \subseteq X$ es cerrado, mostrar que H° es regularmente abierto.

(c) Si $V \subseteq X$ es abierto, mostrar que $\overline{V}$ es regularmente cerrado.

(d) Verificar que U es regularmente abierto si y sólo si $X \setminus U$ es regularmente cerrado.

(e) Dar un ejemplo de un abierto en $\mathbb{R}$ que no es regularmente abierto.

(f) Si U y V son regularmente abiertos en X, mostrar que $U \cap V$ es regularmente abierto.

2 Ejercicios sobre clausuras, funciones continuas y productos

Ejercicio 2.1. En un espacio métrico (X,ρ), la distancia $d(x,A)$ entre un punto x y una parte $A \subseteq X$ se define como

$$d(x,A) := \inf\{\,\rho(x,y) : x,y \in A\,\}.$$

Demostrar que:

(a) $x \in \overline{A}$ si y sólo si $d(x,A) = 0$;

(b) $x \in A^\circ$ si y sólo si $d(x,X\setminus A) > 0$.

Ejercicio 2.2. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$ una parte densa en X. Si U es un abierto en X, mostrar que $\overline{U} = \overline{A\cap U}$.

Ejercicio 2.3. Si U y V son dos abiertos densos en un espacio topológico X, mostrar que $U\cap V$ es también denso en X.

Ejercicio 2.4. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$. Dícese que A es **nunca denso** en X si $(\overline{A})^\circ = \emptyset$. Demostrar que:

(a) si U es un abierto en X, su frontera ∂U es cerrada y nunca densa en X;

(b) si A es un cerrado nunca denso en X, entonces $A = \partial U$ para algún abierto $U \subseteq X$.

Ejercicio 2.5. Un espacio topológico X es **separable** si hay una parte numerable A tal que $\overline{A} = X$. Si la topología de X posee una base numerable $\mathcal{B}$, demostrar que X es separable.

Ejercicio 2.6. Dar un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es continua en exactamente un punto (y comprobar que así sea).

Ejercicio 2.7. Identificar la topología débil sobre $\mathbb{R}$ dada por cada una de las siguientes familias de funciónes $\{\,f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,\}$:

(a) La familia $\{\,f_s : s \in \mathbb{R}\,\}$ de todas las funciones constantes, $f_s(t) \equiv s$.

(b) La sola función identidad, $f(t) = t$ para $t \in \mathbb{R}$.

(c) La sola función signo, definida por

$$\operatorname{signo}(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

(d) La familia de todas las funciones *acotadas* que son continuas para la topología usual de $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.8. Sean X, Y dos espacios topológicos. Para $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$. mostrar que

$$\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$$

para la topología del producto sobre $X \times Y$.

Ejercicio 2.9. Sean $\{\,(X_k, \rho_k) : k \in \mathbb{N}\,\}$ una familia numerablemente infinita de espacios métricos tales que $\rho_k(x_k, y_k) \leq 1$ para todo $x_k, y_k \in X_k$ y todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostrar que el producto cartesiano numerable $X = \prod_{k\in\mathbb{N}} X_k$ es un espacio metrizable, al comprobar que la receta

$$\rho(x,y) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\,\rho_k(x_k, y_k)$$

define una metríca sobre X cuya topología métrica coincide con la topología del producto.

Ejercicio 2.10. Sea $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} := \prod_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}$ el producto cartesiano de una familia numerablemente infinita de copias de $\mathbb{R}$; sus elementos son todas las sucesiones $x = (x_n) \subset \mathbb{R}$.

Sea $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbb{R}$ el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ cuyos elementos son “sucesiones finitas”; es decir, $x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ si y sólo si hay $N \in \mathbb{N}$ tal que $x_n = 0$ para $n > N$.

Demostrar que $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ es denso en $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, para la topología del producto.[2]

Ejercicio 2.11. Sea $X := \prod_{\alpha\in J} X_\alpha$ un producto cartesiano de espacios topológicos $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$. Amén de la topología del producto $\mathcal{T}$, es posible definir la **topología cajonera** (“box topology”) $\mathcal{T}_c$, al declarar como base para $\mathcal{T}_c$ todas las partes de la forma $\prod_{\alpha\in J} U_\alpha$, donde $U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha$ para cada $\alpha \in J$.

(a) Verificar que $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_c$, con igualdad si y sólo si J es finito.

(b) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la *función diagonal* dada por $f(t) := (t,t,t,\dots)$, es decir, $f(t)_n := t$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostrar que f es continua si $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tiene la topología del producto $\mathcal{T}$, pero que f no es continua si $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tiene la topología cajonera $\mathcal{T}_c$. $[\![$ Indicación: Considérese unos vecindarios $U_n := (-a_n, a_n)$ de 0 en $\mathbb{R}$. $]\!]$

3 Ejercicios sobre redes y espacios conexos

Ejercicio 3.1. Un **filtro** sobre un conjunto X es una parte propia $\mathcal{F} \subset \mathbf{2}^X$ tal que: (i) $A, B \in \mathcal{F} \implies A \cap B \in \mathcal{F}$; (ii) $A \in \mathcal{F}, C \supseteq A \implies C \in \mathcal{F}$.

Si $g\colon X \to Y$ es una función, $g(\mathcal{F}) := \{\,B \subseteq Y : B \supseteq g(A)$ para algún $A \in \mathcal{F}\,\}$ es el filtro imagen sobre Y.

Si X es un espacio topológico, $x \in X$, dícese que $\mathcal{F}$ **converge** a x, escrito $\mathcal{F} \to x$, si cada vecindario de x pertenece a $\mathcal{F}$, esto es, si $\mathcal{V}_x \subseteq \mathcal{F}$.

Si Y es un espacio topológico también, demostrar que $g\colon X \to Y$ es continua en x si y sólo si $\mathcal{F} \to x \implies g(\mathcal{F}) \to g(x)$.

[2]Munkres escribe $\mathbb{R}^\omega$ para $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbb{R}^\infty$ para $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$.

Ejercicio 3.2. Si $S = (x_\alpha)_{\alpha \in J}$ es una red en un conjunto X, y si $C_\alpha := \{ x_\gamma : \gamma \geq \alpha \}$ denota la cola a partir de cada x_α, el filtro asociado con S es $\mathcal{F}(S) := \{ A \subseteq X : A \supseteq C_\alpha$ para algún $\alpha \}$.

Si $\mathcal{F}$ es algún filtro sobre X, sea $J := \{ (x,A) : x \in A \in \mathcal{F} \}$, ordenado por $(x,A) \leq (y,B)$ si $A \supseteq B$. La red $S(\mathcal{F})$ asociada con $\mathcal{F}$ se define por la función $J \to X : (x,A) \mapsto x$.

(a) Dada una red S, verificar que $\mathcal{F}(S)$ es un filtro.

(b) Si $T = (y_\beta)$ es una subred de S, mostrar que $\mathcal{F}(S) \subseteq \mathcal{F}(T)$.

(c) Comprobar que $\mathcal{F}(S(\mathcal{F})) = \mathcal{F}$.

Ejercicio 3.3. Si X en un espacio topológico, $x \in X$, $S = (x_\alpha)$ es una red en X y $\mathcal{F}$ es un filtro sobre X:

(a) mostrar que $x_\alpha \to x$ si y sólo si $\mathcal{F}(S) \to x$;

(b) mostrar que $\mathcal{F} \to x$ si y sólo si $S(\mathcal{F}) \to x$.

Ejercicio 3.4. Sea $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$ una unión numerable de espacios topológicos conexos tales que $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que X es un espacio conexo.

Ejercicio 3.5. En un espacio normado E, una parte C es **convexa** si y sólo si para cada par de puntos $x,y \in C$, el *segmento* $[x,y] := \{ (1-t)x + ty \in E : 0 \leq t \leq 1 \}$ está incluido en C, $[x,y] \subseteq C$. Demostrar que un conjunto convexo es conexo.

Ejercicio 3.6. Si X/R es un espacio cociente de X, si X/R es conexo y si cada clase de equivalencia $[x]$ para la relación de equivalencia R es una parte conexa de X, demostrar que X es conexo.

Ejercicio 3.7. Si X, Y son dos espacios conexos, y si $A \subset X$ y $B \subset Y$ son partes propias de cada uno, demostrar que $(X \times Y) \setminus (A \times B)$ es conexo.

Ejercicio 3.8. Si $\mathbb{S}^n := \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1 \}$ es la esfera de dimensión n (para la norma euclidiana), mostrar que $\mathbb{S}^n$ es conexa.

⟦ Indicación: Considérese la función $x \mapsto x/\|x\|$ sobre $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. ⟧

Ejercicio 3.9. Si X es un espacio conexo y si $f : X \to \mathbb{R}$ es una función continua, mostrar que $f(X)$ es un intervalo en $\mathbb{R}$.

(a) Dar ejemplos de cuatro funciones continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tales que las imágenes $f(\mathbb{R})$ son los intervalos $[0,\infty)$, $(0,\infty)$, $[0,1]$ y $(0,1)$ respectivamente.

(b) Demostrar el **teorema de valor intermedio**: si X es conexo y $f : X \to \mathbb{R}$ es continua, y si $f(x) < t < f(y)$ para $x,y \in X$, $t \in \mathbb{R}$, entonces existe $z \in X$ tal que $f(z) = t$.

(c) Si $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un polinomio de grado impar, mostrar que hay al menos una raíz real $t \in \mathbb{R}$ con $p(t) = 0$.

Ejercicio 3.10. Si $h\colon X \to Y$ es un homeomorfismo (biyectivo) y si $x \in X$, comprobar que $X \setminus \{x\} \approx Y \setminus \{h(x)\}$. En seguida, usar las propiedades de conectividad para mostrar que los siguientes pares de espacios topológicos no son homeomorfos:

(a) los intervalos $(0,1) \not\approx [0,1]$;

(b) $\mathbb{R}^n \not\approx \mathbb{R}$ si $n > 1$;

(c) $[0,1] \not\approx \mathbb{S}^1$;

(d) $\mathbb{S}^n \not\approx \mathbb{S}^1$ para $n > 1$.

Ejercicio 3.11. (a) Mostrar que una función continua $f\colon [0,1] \to [0,1]$ tiene un *punto fijo* $t \in [0,1]$ tal que $f(t) = t$.

(b) Dar un ejemplo de una función continua $g\colon (0,1) \to (0,1)$ que no tiene punto fijo.

(c) Si $h\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ es continua, mostrar que hay un punto $z \in \mathbb{S}^1$ tal que $h(-z) = h(z)$.

Ejercicio 3.12. (a) Dícese que X es un espacio **totalmente disconexo** si la componente conexa de cada $x \in X$ es el conjunto solitario $\{x\}$. Verificar que los números racionales $\mathbb{Q}$ y la recta flechada $\mathbb{R}_\ell$ son totalmente disconexas.

(b) Describir todas las funciones continuas de $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_\ell$.

Ejercicio 3.13. Si $C \subseteq X$ es una parte conexa, abierta y cerrada a la vez, mostrar que C es una componente conexa de X.

Ejercicio 3.14. Demostrar que las siguientes propiedades de un espacio topológico X son equivalentes:

(a) Cada punto $x \in X$ tiene una base $\mathcal{B}_x$ de vecindarios conexos.

(b) Las componentes conexas de un abierto en X son abiertas.

(c) La familia de partes conexas y abiertas en X forman una base para su topología.

Dícese que X es un espacio **localmente conexo** si cumple (cualquiera de) estas condiciones.

Ejercicio 3.15. Verificar que el espacio X dado por

$$X := \{\, (x,y) : y = \operatorname{sen}(1/x),\ 0 < x \leq 1 \,\} \cup \{\, (0,y) : -1 \leq y \leq 1 \,\} \subset \mathbb{R}^2$$

es conexo, pero no es localmente conexo.

Ejercicio 3.16. Comprobar que la recta real $\mathbb{R}$ es localmente conexo. Concluir que cada abierto en $\mathbb{R}$ es una unión *numerable* de intervalos abiertos.

Ejercicio 3.17. Un **grupo topológico** es un grupo G dotado de una topología para la cual las funciones $m\colon G\times G\to G:(g,h)\mapsto gh$ e $i\colon G\to G:g\mapsto g^{-1}$ (*multiplicación* e *inversión*) son continuas.

Si $A,B\subseteq G$, escríbase $A^{-1}:=\{\,g^{-1}:g\in A\,\}$ y $A\cdot B:=\{\,gh:g\in A,\,h\in B\,\}$.

(a) Si $g\in G$, mostrar que las **traslaciones** $\lambda_g\colon h\mapsto gh$ y $\rho_g\colon h\mapsto hg$ son homeomorfismos de G en G.

(b) Si $V\in\mathcal{V}_1$ es un vecindario del elemento unidad $1\in G$, hay otro vecindario $U\in\mathcal{V}_1$ tal que $U\cdot U^{-1}\subseteq V$.

(c) Si $H\leq G$ es un subgrupo abierto, entonces H también es cerrado en G.

(d) Si $K\trianglelefteq G$ es un subgrupo cerrado y normal en G, entonces el grupo G/K, con la topología cociente, es un grupo topológico.

Ejercicio 3.18. Si G es un grupo topológico, sea G_0 la **componente neutra**, es decir, la componente del elemento unidad 1.

Demostrar que G_0 es un *subgrupo normal* de G. $[\![$ Indicación: Si $h\in G$, comprobar que la componente de h es $hG_0=\{\,hk:k\in G_0\,\}$. $]\!]$

Concluir que el grupo topológico G/G_0 es totalmente disconexo.

4 Ejercicios sobre espacios compactos

Ejercicio 4.1. (a) Si X es un conjunto infinito con la topología cofinita, mostrar que X es un espacio compacto.

(b) Considérese la recta real $\mathbb{R}$ con la topología conumerable $\mathcal{T}_{cn}$. Determinar si el intervalo $[0,1]$ es una parte compacta o no en $(\mathbb{R},\mathcal{T}_{cn})$.

Ejercicio 4.2. Sea $\mathcal{T}_< := \{\mathbb{R},\emptyset\}\cup\{\,(-\infty,b):b\in\mathbb{R}\,\}$. Comprobar que $\mathcal{T}_<$ es una topología sobre $\mathbb{R}$. Demostrar que una parte $A\subseteq\mathbb{R}$ es compacta en esta topología si y sólo si A es acotado superiormente con $\sup(A)\in A$.

Si Y es un espacio de Hausdorff y si $f\colon(\mathbb{R},\mathcal{T}_<)\to Y$ es continua, mostrar que f es una función constante.

Ejercicio 4.3. Si K y L son dos partes compactas de un espacio de Hausdorff X, con $K\cap L=\emptyset$, mostrar que hay dos abiertos U, V en X tales que $K\subseteq U$, $L\subseteq V$ y $U\cap V=\emptyset$.

Ejercicio 4.4. (a) Si K y L son dos partes compactas de un espacio de Hausdorff X, mostrar que $K \cap L$ es compacto.

(b) Dar un ejemplo de dos partes compactas de un espacio topológico (que no sea de Hausdorff) cuya intersección no es compacta.

Ejercicio 4.5. Un espacio topológico X se llama **σ-compacto** si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$ donde cada K_n es compacto. Mostrar que un espacio euclidiano $\mathbb{R}^m$ es σ-compacto.

Si U es una parte abierta de $\mathbb{R}^m$, mostrar que U también es σ-compacto.

$[\![$ Indicación: Considérese los conjuntos $F_n := \{ x \in U : d(x, \mathbb{R}^m \setminus U) \geq 1/n \}$. $]\!]$

Ejercicio 4.6. Si $A \subseteq X$ y $B \subseteq Y$ son partes compactas de dos espacios topológicos, y si W es un abierto en $X \times Y$ tal que $A \times B \subseteq W$, mostrar que hay abiertos $U \subseteq X$ y $V \subseteq Y$ tales que $A \times B \subseteq U \times V \subseteq W$.

Ejercicio 4.7. Dícese que X es un **espacio de Lindelöf** si cada cubrimiento abierto de X tiene un subcubrimiento *numerable*. Comprobar que (i) un espacio compacto; (ii) un espacio σ-compacto; o (iii) un espacio que cumple el segundo axioma de numerabilidad, todos son de Lindelöf.

Demostrar también que la imagen continua de un espacio de Lindelöf es también de Lindelöf.

Ejercicio 4.8. Sea (X, ρ) un espacio métrico compacto y sea $\mathcal{U} = \{ U_\alpha : \alpha \in J \}$ un cubrimiento abierto de X. Demostrar que hay un número positivo $\delta > 0$ tal que, para cada $x \in X$, hay una inclusión $B(x;\delta) \subseteq U_\alpha$ en algún abierto del cubrimiento.[3]

Ejercicio 4.9 (Teorema de Dini)**.** Sea X un espacio compacto y sea $\{ f_k \colon X \to \mathbb{R} : k \in \mathbb{N} \}$ una sucesión creciente de funciones continuas, es decir, $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$ para todo $x \in X$ y $k \in \mathbb{N}$. Supóngase además que los f_k convergen puntualmente a una función *continua* $f \colon X \to \mathbb{R}$ (esto es, $f_k(x) \to f(x)$ para cada $x \in X$).

Demostrar que esta convergencia es *uniforme*: dado $\varepsilon > 0$, hay $K \in \mathbb{N}$ tal que $k \geq K \implies f(x) - f_k(x) \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$.

$[\![$ Indicación: Considérese los conjuntos $F_n := \{ x \in X : f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon \}$. $]\!]$

Ejercicio 4.10. Usar el ejercicio anterior para mostrar que la función $t \mapsto \sqrt{t}$, para $t \in [0,1]$, es el límite uniforme de una sucesión de polinomios:[4]

(a) definir inductivamente $p_0(t) \equiv 0, \quad p_{k+1}(t) := p_k(t) + \frac{1}{2}(t - p_k(t)^2)$;

(b) comprobar por inducción que $p_k(t) \leq \sqrt{t}$ para $0 \leq t \leq 1$;

(c) concluir que $p_k(t) \leq p_{k+1}(t)$ para $t \in [0,1]$.

[3] Este δ se llama un **número de Lebesgue** del cubrimiento $\mathcal{U}$.

[4] Este es un ejemplo concreto de un famoso teorema de Weierstrass: *cualquier* función continua sobre $[0,1]$ es un límite uniforme de polinomios.

5 Ejercicios sobre separación y compacidad local

Ejercicio 5.1. Sean X, Y dos espacios topológicos.

(a) Mostrar que un espacio topológico X es de Hausdorff si y sólo si la diagonal $D := \{ (x,x) : x \in X \}$ es cerrado en $X \times X$.

(b) Si $f\colon X \to Y$ es continua, comprobar que $(x,y) \mapsto (f(x),y) : X \times Y \to Y \times Y$ es también continua.

(c) Si $f\colon X \to Y$ es una función continua y Y es un espacio de Hausdorff, mostrar que el **grafo** $G_f := \{ (x, f(x)) : x \in X \}$ es cerrado en $X \times Y$.

Ejercicio 5.2. Si $f,g\colon X \to Y$ son dos funciones continuas y si Y es un espacio de Hausdorff, mostrar que $\{ x \in X : f(x) = g(x) \}$ es cerrado en X. Concluir que dos funciones continuas que coinciden sobre una parte densa son iguales, siempre que su codominio sea un espacio T_2.

Ejercicio 5.3. Un espacio topológico X es **completamente separado** (o un **espacio** $T_{2\frac{1}{2}}$, o bien un **espacio de Urysohn**) si para cada par de puntos distintos $x, y \in X$, hay abiertos U, V con $x \in U$, $y \in V$; y $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. (Un espacio $T_{2\frac{1}{2}}$ es de Hausdorff, obviamente.)

(a) Demostrar que un espacio regular es $T_{2\frac{1}{2}}$.

(b) Si X es $T_{2\frac{1}{2}}$ y si $A \subseteq X$, mostrar que A es $T_{2\frac{1}{2}}$.

Ejercicio 5.4. Sea X un espacio topológico y sea $A \subseteq X$.

(a) Si X es completamente regular, demostrar que A también es completamente regular.

(b) Si X es normal y si A es cerrado en X, demostrar que A también es normal.[5]

Ejercicio 5.5. En un espacio topológico X, una parte $A \subseteq X$ es un **conjunto** G_δ si es una intersección numerable de abiertos, $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. (Sin perder generalidad, se puede suponer que los U_n están encajados: $U_n \supseteq U_{n+1}$ para cada n.)

(a) Si X es un espacio normal, demostrar que hay una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f^{-1}(\{0\}) = A$ si y sólo si A es un cerrado G_δ en X.

(b) Si X es normal y si A, B son cerrados G_δ en X con $A \cap B = \emptyset$, demostrar que hay una función continua $f\colon X \to [0,1]$ tal que $f^{-1}(\{0\}) = A$ y $f^{-1}(\{1\}) = B$.

(c) Dícese que X es **perfectamente normal** si X es normal y si cada cerrado $A \subseteq X$ es un conjunto G_δ. Comprobar que un espacio métrico (X, ρ) es perfectamente normal.

[5] Hay ejemplos de espacios normales, con subespacios (no cerrados) que no son normales.

Ejercicio 5.6. Sea X un espacio T_1, con topología $\mathcal{T}$. Denótese por $C_b(X,\mathbb{R})$ el álgebra de funciones *continuas y acotadas* de X en $\mathbb{R}$. Esta colección de funciones define una topología débil $\mathcal{T}_b$ sobre X.

(a) Mostrar que las partes de X de la forma $g^{-1}\big((0,\infty)\big)$ consituyen una subbase —y de hecho, una base— para la topología $\mathcal{T}_b$.

(b) Comprobar que X es completamente regular si y sólo si $\mathcal{T}_b = \mathcal{T}$.

Ejercicio 5.7. Si $f \in C_b(X,\mathbb{R})$, el intervalo $I_f := [\inf f(X), \sup f(X)]$ es compacto en $\mathbb{R}$. Si X es un espacio completamente regular, mostrar que la *aplicación de evaluación*

$$e\colon X \to \prod_{f \in C_b(X,\mathbb{R})} I_f : x \mapsto (f(x))_f$$

es un homeomorfismo entre X y su imagen $e(X)$.

Ejercicio 5.8. (a) Sean X, Y dos espacios localmente compactos y T_2; demostrar que $X \times Y$ es localmente compacto y T_2.

(b) Si X es un espacio localmente compacto y T_2; si $U \subseteq X$ es abierto y si $F \subseteq X$ es cerrado, comprobar que U, F y $F \cap U$ son localmente compactos y T_2.

Ejercicio 5.9. Demostrar que la recta flechada $\mathbb{R}_\ell$ un normal, pero no es localmente compacto.

Ejercicio 5.10. Sea X un espacio localmente compacto y T_2.

(a) Si U es abierto en X y si $x \in U$, comprobar que hay un abierto V con $\overline{V}$ compacto tal que $x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(b) Si K es un compacto en X y U es un abierto en X con $K \subseteq U$, mostrar que hay un abierto V, relativamente compacto,[6] tal que $K \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

(c) Si X es además σ-compacto, mostrar que hay una sucesión $\{\,U_n : n \in \mathbb{N}\,\}$ de abiertos relativamente compactos, con $\overline{U_n} \subseteq U_{n+1}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, tales que $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n$.

Ejercicio 5.11. (a) Si $p = (0,1)$ es el "polo norte" de la esfera $\mathbb{S}^n = \{\,(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \|x\|^2 + |t|^2 = 1\,\}$, verificar que la **proyección estereográfica** $(x,t) \mapsto (1-t)^{-1}x$ es un homeomorfismo entre $\mathbb{S}^n \setminus \{p\}$ y $\mathbb{R}^n$. Concluir que $(\mathbb{R}^n)^+ \approx \mathbb{S}^n$.

(b) Mostrar que $\mathbb{N}^+ \approx \{\,1/n : n \in \mathbb{N}^*\,\} \cup \{0\}$, al exhibir un homeomorfismo explícito.

[6]Dícese que una parte $A \subseteq X$ es **relativamente compacto** si $\overline{A}$ es compacto.

Ejercicio 5.12. Sea X, Y dos espacios localmente compactos y T_2. Si $X \approx Y$ (homeomorfos), mostrar que $X^+ \approx Y^+$.

Dar un ejemplos de un par de espacios X, Y tales que $X^+ \approx Y^+$ pero X, Y no son homeomorfos.

Ejercicio 5.13. Un espacio topológico X está **compactamente generado** (también se dice que X es un ***k*-espacio**) cuando una parte $U \subseteq X$ es abierto si (y sólo si) $U \cap K$ es abierto en K para cada parte compacta $K \subseteq X$.

(a) Demostrar que un espacio localmente compacto y T_2 está compactamente generado.

(b) Verificar que X está compactamente generado cuando una parte $F \subseteq X$ es cerrada si (y sólo si) $F \cap K$ es cerrado en K para cada parte compacta $K \subseteq X$.

(c) Si X es un espacio topológico que cumple el primer axioma de numerabilidad, demostrar que X está compactamente generado.

⟦ Indicación: Si $x_n \to x$, fíjese que el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ es compacto. ⟧

(d) Si X está compactamente generado y Y es un espacio topológico, demostrar que una función $f : X \to Y$ es continua si (y sólo si) la restricción $f|_K : K \to Y$ es continua para cada compacto $K \subseteq X$.

Ejercicio 5.14. Demostrar que un espacio de Hausdorff X es *normal* si y sólo si, para cada cubrimiento abierto finito $\{U_1, \dots, U_n\}$ de X, hay n funciones continuas $f_k : X \to [0, 1]$ tales que $\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = 1$ para todo $x \in X$, mientras $f_k(y) = 0$ toda vez que $y \in X \setminus U_k$.

⟦ Indicación: Si X es normal, hallar otro cubrimiento abierto $\{V_1, \dots, V_n\}$ de X tal que $\overline{V}_k \subseteq U_k$ para $k = 1, \dots, n$. ⟧

6 Ejercicios diversos sobre espacios topológicos

Ejercicio 6.1. Sean X, Y dos espacios topológicos y sean F, G dos partes cerradas de X tales que $X = F \cup G$. Si $f : F \to Y$, $g : G \to Y$ son dos funciones continuas tales que $f(x) = g(x)$ para $x \in F \cap G$, comprobar que la (única) función $h : X \to Y$ tal que $h|_F = f$ y $h|_G = g$ es también continua.

Ejercicio 6.2. Sea X un espacio completamente regular. Una **compactificación** de X es un par (K, j) donde K es un espacio compacto y $j : X \rightarrowtail K$ es una función continua inyectiva tal que $j(X)$ sea denso en K.

(a) Si X es localmente compacto y T_2 y si $i : X \rightarrowtail X^+$ es la inclusión, verificar que (X^+, i) es una compactificación de X.

(b) Si $C = C_b(X, \mathbb{R})$ es el espacio de funciones continuas acotadas de X en $\mathbb{R}$; y si $e \colon X \rightarrowtail \prod_{f \in C} I_f$ es la aplicación de evaluación, sea βX la clausura de $e(X)$ en $\prod_{f \in C} I_f$. Verificar que $(\beta X, e)$ es una compactificación de X. (Esta es la **compactificación de Stone y Čech** de X.)

(c) Mostrar que, para cada función continua acotada $f \colon X \to \mathbb{R}$, hay una única función continua $F \colon \beta X \to \mathbb{R}$ tal que $F \circ e = f$. (Dícese que F es una *extensión* de f a la compactificación βX.)

(d) Si C es un espacio compacto y T_2, mostrar que, para cada función continua $f \colon X \to C$, hay una única extensión continua $F \colon \beta X \to C$ tal que $F \circ e = f$.

(e) Si (K, j) es una compactificación cualquiera de X, concluir que hay una función continua $h : \beta X \to K$ tal que $h \circ e = j$. Si X es localmente compacto, mostrar que hay una función continua $g \colon K \to X^+$ tal que $g \circ j = i$.

(f) Si $X = (0,1) \subset \mathbb{R}$, mostrar que βX no es homeomorfo al intervalo $[0,1]$.

Ejercicio 6.3. Sean X, Y, Z tres espacios completamente regulares. Si $f \colon X \to Y$ es continua, denótese por $\beta f \colon \beta X \to \beta Y$ la función continua (única) que extiende $e \circ f \colon X \to \beta Y$.

(a) Dadas dos funciones continuas $f \colon X \to Y$, $g \colon Y \to Z$, mostrar que $\beta(g \circ f) = \beta g \circ \beta f$.

(b) Si $1_X : X \to X$ denota la función identidad,[7] verificar que $\beta 1_X = 1_{\beta X}$.

Ejercicio 6.4. (a) Sea X un espacio paracompacto y sea $F \subseteq X$ una parte cerrada. Mostrar que F es también paracompacto.

(b) Si X es un espacio paracompacto y si Y es compacto, demostrar que $X \times Y$ es paracompacto.

Ejercicio 6.5. Si X es un espacio regular y σ-compacto, mostrar que X es paracompacto.

Ejercicio 6.6. El **diámetro** de una parte A de un espacio métrico (X, ρ) se define como

$$\operatorname{diam}(A) := \sup\{\, \rho(x,y) : x, y \in A \,\} \in [0, \infty].$$

Comprobar que el diámetro tiene las siguientes propiedades:

(a) una parte $A \subseteq X$ es acotada si y sólo si $\operatorname{diam}(A) < \infty$;

(b) $\operatorname{diam}(\overline{A}) = \operatorname{diam}(A)$;

(c) si $A \subseteq B$, entonces $\operatorname{diam}(A) \leq \operatorname{diam}(B)$;

[7] Las propiedades (a) y (b) dicen que β es un *funtor*.

(d) si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $\operatorname{diam}(A \cup B) \leq \operatorname{diam}(A) + \operatorname{diam}(B)$.

Ejercicio 6.7. Una función $f\colon X \to Y$ entre espacios métricos es **uniformemente continua** si para cada $\varepsilon > 0$, hay un $\delta > 0$ tal que $\rho(x,y) < \delta \implies \sigma(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Estos espacios métricos (X,ρ) y (Y,σ) son **métricamente equivalentes** si hay un homeomorfismo $f\colon X \to Y$ tal que tanto f como su función inversa son uniformemente continuas.

(a) Si $\bar\rho(x,y) := \min\{\rho(x,y), 1\}$, comprobar que (X,ρ) y $(X,\bar\rho)$ son métricamente equivalentes.

(b) Si (X,ρ) y (Y,σ) son métricamente equivalentes, mostrar que (X,ρ) es completo si y sólo si (Y,σ) es completo.

Ejercicio 6.8. (a) Si (X,ρ) es un espacio métrico completo y $F \subseteq X$ es cerrado, mostrar que (F,ρ) es también completo.

(b) Si (Y,σ) es un espacio métrico cualquiera y si $H \subseteq Y$ es una parte tal que (H,σ) sea completo, mostrar que H es cerrada en Y.

Ejercicio 6.9 (Cantor)**.** (a) Demostrar que un espacio métrico (X,ρ) es completo si y sólo si cada sucesión decreciente de cerrados $F_0 \supseteq F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots$ con $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$ tiene un solo punto de intersección: $\downarrow\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \{x\}$.

(b) Dar un ejemplo de un espacio métrico completo con una sucesión decreciente de cerrados F_n tales que $\downarrow\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$.

Ejercicio 6.10 (Banach)**.** Si (X,ρ) es un espacio métrico, una función $f\colon X \to X$ es una **contracción** si hay $r \in (0,1)$ tal que $\rho(f(x), f(y)) \leq r\,\rho(x,y)$ para todo $x, y \in X$.

Si (X,ρ) es completo, mostrar que una contracción $f\colon X \to X$ tiene un solo **punto fijo**; es decir, hay un único $p \in X$ tal que $f(p) = p$.

Ejercicio 6.11. Si X es un espacio localmente compacto y T_2, sea $C_c(X,\mathbb{R})$ el espacio vectorial de funciones continuas $f\colon X \to \mathbb{R}$ *de soporte compacto*: $\operatorname{sop}(f)$ es una parte compacta de $\mathbb{R}$. Verificar que $\|f\| := \sup\{\, f(x) : x \in X \,\}$ define una norma sobre $C_c(X,\mathbb{R})$.

Al considerar $C_c(X,\mathbb{R})$ como espacio métrico en la métrica determinada por esta norma, demostrar que la compleción de $C_c(X,\mathbb{R})$ es $C_0(X,\mathbb{R})$, el espacio de funciones continuas que se anulan en el infinito.

Ejercicio 6.12. Sea X un espacio de Baire.

(a) Si $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ es una unión numerable de partes cerradas, demostrar que $F_m^\circ \neq \emptyset$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

(b) Si $A \subset X$ es magro en X, comprobar que $A^\circ = \emptyset$.

(c) Si $U \subseteq X$ es abierto en X, mostrar que U también es de Baire.

(d) Si $f\colon X \to \mathbb{R}$ es un función continua y si $U \subseteq X$ es un abierto no vacío, demostrar que hay un abierto no vacío $V \subseteq U$ tal que $f|_V$ sea acotada.

$[\![$ Indicación: Considérese $\{\, x \in U : |f(x)| \leq n \,\}$. $]\!]$

Ejercicio 6.13 (Principio de acotación uniforme)**.** Sea (X,ρ) un espacio métrico completo y sea $\mathcal{F} \subset C(X,\mathbb{R})$ una familia de funciones continuas tales que $\mathcal{F}(x) := \{\, f(x) : f \in \mathcal{F} \,\}$ sea acotada en $\mathbb{R}$, para cada $x \in X$. Demostrar que hay un abierto no vacío $U \subseteq X$ en la cual $\mathcal{F}$ es *uniformemente acotada*: hay $M > 0$ tal que $|f(x) \leq M$ para todo $x \in U$, $f \in \mathcal{F}$.

$[\![$ Indicación: Considérese $\{\, x \in X : |f(x)| \leq n,\ f \in \mathcal{F} \,\}$. $]\!]$

Ejercicio 6.14. Demostrar que el conjunto de Cantor $C \subset [0,1]$ es homeomorfo al cubo de Cantor $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, de la siguiente manera: defínase $f\colon \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to C$ por $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 2x_n/3^{n+1}$. Mostrar que f es una biyección continua y concluir que es un homeomorfismo.

7 Ejercicios sobre funtores y homotopías

Ejercicio 7.1. Sean J, K dos conjuntos parcialmente ordenados y sean J, K las categorías pequeñas correspondientes (Ejemplo 3.7). Comprobar que los funtores $\mathcal{F}\colon \mathsf{J} \to \mathsf{K}$ están en correspondencia biunívoca con las funciones no decrecientes $f\colon J \to K$. Si $\mathcal{G}\colon \mathsf{J} \to \mathsf{K}$ es otro de estos funtores, mostrar que hay una transformación natural $\theta\colon \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ si y sólo si $f(j) \leq g(j)$ en K para todo $j \in J$.

Ejercicio 7.2. (a) Mostrar que las imágenes de funciones $A \mapsto f(A)$ son instancias del functor de potencia $\mathcal{P}\colon \mathsf{Set} \to \mathsf{Set}$.

(b) Mostrar que las preimágenes de funciones $B \mapsto f^{-1}(B)$ son instancias de cierto funtor contravariante $\mathcal{Q}\colon \mathsf{Set}^{\circ} \to \mathsf{Set}$.

Ejercicio 7.3. Una parte $X \subseteq \mathbb{R}^n$ es **radialmente convexo**[8] si hay un punto $p \in X$ tal que para todo $q \in X$, el *segmento* rectilíneo $[p,q] := \{\, (1-t)p + tq : 0 \leq t \leq 1 \,\}$ cumple $[p,q] \subseteq X$. (Fíjese que un conjunto convexo es radialmente convexo.) Demostrar que X es contractible.

Ejercicio 7.4. Sea X un espacio topológico contractible.

(a) Comprobar que X es conexo por caminos.

(b) Si Z es otro espacio topológico, mostrar que el conjunto $[Z,X]$ —las clases de homotopía de funciones en $C(Z,X)$— tiene un solo elemento.

(c) Si Y es un espacio conexo por caminos, mostrar que $[X,Y]$ tiene un solo elemento.

[8]En inglés: *star-shaped*, o bien *radially convex*.

Ejercicio 7.5. Demostrar que una función continua $f\colon X \to Y$ es una equivalencia de homotopía si y sólo si hay dos funciones continuas $g,h\colon Y \to X$ tales que $f \circ g \simeq 1_Y$ y $h \circ f \simeq 1_X$.

Ejercicio 7.6. Si Y es un espacio topológico y si $B \subseteq Y$, el **espacio cociente** Y/B se define por la relación de equivalencia: $y \sim z$ para todo $y,z \in B$. (Para $y,z \notin B$, se sobreentiende que $y \sim z$ si y sólo si $y = z$.)

El **cono** sobre un espacio topológico X es $CX := (X \times I)/(X \times \{1\})$. Al identificar $x \in X$ con $[(x,0)] \in CX$, se puede considerar X como subespacio cerrado de CX.

Demostrar que una función continua $f\colon X \to Y$ es homotópica a una función constante si y sólo si f es extiende a una función continua $\tilde{f}\colon CX \to Y$.

Ejercicio 7.7. La **franja de Möbius** es el espacio cociente $M = T/{\sim}$ del rectángulo $T = I \times (-1,1)$ obtenido al declarar $(0,s) \sim (1,-s)$ para $-1 < s < 1$. Al identificar $e^{2\pi it} \in \mathbb{S}^1$ con $[(t,0)] \in M$, se puede considerar $\mathbb{S}^1$ como subespacio cerrado de M.

Demostrar que el subespacio $\mathbb{S}^1$ es una retracción por deformación de M.

Ejercicio 7.8. Si $f\colon Y \to Z$ es una función continua, demostrar que Y es una retracción por deformación del *cilindro* $Z_f := (X \times I) \cup_f Y$ —véase la Definición 1.56.

Ejercicio 7.9. La *aplicación antipodal* de la esfera $\mathbb{S}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ es la función $a_n\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ dada por $a_n(v) := -v$.

(a) Defínase $f,g\colon \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ por $f(x,y,z) := (-x,-y,z)$ y $g(x,y,z) := (x,y,-z)$. Demostrar que $f \simeq 1_{\mathbb{S}^2}$ y que $g \simeq a_2$.

(b) Si n es impar, comprobar que $a_n \simeq 1_{\mathbb{S}^n}$.

8 Ejercicios sobre grupos fundamentales

Ejercicio 8.1. Sea X un espacio conexo por caminos. Un lazo en X basado en p puede considerarse como función continua $f\colon (\mathbb{S}^1,1) \to (X,p)$ en al categoría de espacios punteados. Considérese el conjunto $[\mathbb{S}^1,X]$ de clase de homotopía de funciones continuas $\mathbb{S}^1 \to X$, sin tomar en cuenta los puntos de base; sea $\varphi\colon \pi_1(X,p) \to [\mathbb{S}^1,X]$ dado por $\varphi([f]) := [f]$.

Demostrar que la función φ es sobreyectivo y que $\varphi([f]) = \varphi([g])$ si y sólo si las clases $[f]$ y $[g]$ son conjugados[9] en $\pi_1(X,p)$. Concluir que φ induce una biyección entre $[\mathbb{S}^1,X]$ y el conjunto de las clases de conjugación del grupo $\pi_1(X,p)$.

Ejercicio 8.2. Si $r\colon X \to A$ es una retracción y si $p \in A$, demostrar que el homomorfismo $r_*\colon \pi_1(X,p) \to \pi_1(A,p)$ es sobreyectivo.

[9] Dos elementos g,h de un grupo G son **conjugados** si y sólo si hay $t \in G$ tal que $h = tgt^{-1}$. Esta es una relación de equivalencioa sobre G.

Ejercicio 8.3. Si $f\colon X \to Y$ es una función continua y si $u\colon I \to X$ es un camino con $u(0) = p$ y $u(1) = q$, comprobar que $f_* \circ \beta_u = \beta_{f\circ u} \circ f_*$; es decir, mostrar que el siguiente diagrama de homomorfismos de grupos es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(X,q) \arrow[r, "\beta_u"] \arrow[d, "f_*"'] & \pi_1(X,p) \arrow[d, "f_*"] \\
\pi_1(Y,f(q)) \arrow[r, "\beta_{f\circ u}"] & \pi_1(Y,f(p))
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 8.4. El **producto directo**[10] de dos grupos G y H es el producto cartesiano $G \times H$ dotado con la ley de grupo $(g,h)\,(g',h') := (gg',hh')$.

Si (X,p), (Y,q) son dos espacios topológicos punteados, comprobar que hay un isomorfismo de grupos tal que

$$\pi_1(X \times Y, (p,q)) \simeq \pi_1(X,p) \times \pi_1(Y,q).$$

Concluir que el **toro** $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ tiene grupo fundamental $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

Ejercicio 8.5. Sea $F\colon I \times I \to X$ una función continua, Defínase cuatro caminos f_0, f_1, g, h en X por sus "márgenes":

$$f_0(s) := F(s,0), \quad f_1(s) := F(s,1), \quad g(t) := F(0,t), \quad h(t) := F(1,t).$$

Sea $\breve{g}\colon t \mapsto g(1-t)$ el camino inverso de g. Construir una homotopía de caminos que muestra que $f_1 \doteq \breve{g} * f_0 * h$.

Ejercicio 8.6. Si G es un grupo topológico y si g, h son dos lazos en G basados en elemento unidad 1, defínase su *producto puntual* $g \cdot h$ por $(g \cdot h)(s) := g(s)\,h(s)$, empleando la ley de grupo al lado derecho de esta fórmula. Mostrar que hay dos homotopías de lazos

$$g * h \doteq g \cdot h, \qquad h * g \doteq g \cdot h.$$

Concluir que el grupo fundamental $\pi_1(G,1)$ es *abeliano*.

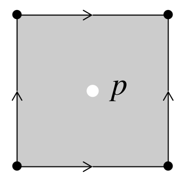
⟦ Indicación: Defínase $F(s,t) := g(s)\,h(st)$ y también $K(s,t) := g(st)\,h(s)$; luego aplíquese el Ejercicio anterior. ⟧

Ejercicio 8.7. En el **toro** $\mathbb{T}^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, sea $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ el subespacio formado por la unión de los dos círculos principales:

$$\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 := (\mathbb{S}^1 \times \{1\}) \cup (\{1\} \times \mathbb{S}^1).$$

[10] Cuando G y H son *abelianos* y se usa notación aditiva para sus operaciones de grupo, el producto directo también se escribe $G \oplus H$.

Estos dos círculos se cortan en un sólo punto $(1,1)$, que puede tomarse como punto de base de $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$. A veces el toro se representa como el cuadrado $I \times I$ con los lados opuestos identificados, en cuyo caso $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ es el subespacio formados por esos lados:



Demostrar que $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ es una retracción por deformación del espacio $\mathbb{T}^2 \setminus \{p\}$, donde p es un punto en $\mathbb{T}^2 \setminus (\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$.

Ejercicio 8.8. (a) Demostrar que la función exponencial $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\} : z \mapsto e^z$ es una proyección recubridora.

(b) Una aplicación $h\colon Y \to X$ es un **homeomorfismo local** si cada $y \in Y$ tiene un vecindario abierto V tal que $h(V)$ sea un abierto en X y $h|_V\colon V \to h(V)$ es un homeomorfismo. Verificar que cualquier proyección recubridora es un homeomorfismo local.

(c) Demostrar que la función $e\colon (-1,1) \to \mathbb{S}^1 : t \mapsto e^{2\pi i t}$ es un homeomorfismo local, pero no es una proyección recubridora.

9 Ejercicios sobre homotopía y espacios recubridores

Ejercicio 9.1. Demostrar que $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ no son homeomorfos.

Ejercicio 9.2. Sea $\mathbb{B}^2 := \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1 \,\}$ el disco cerrado unitario en $\mathbb{R}^2$. Si $h\colon \mathbb{B}^2 \to \mathbb{B}^2$ es un homeomorfismo (biyectivo), demostrar que $h(\mathbb{S}^1) = \mathbb{S}^1$ y que h lleva el disco abierto $(\mathbb{B}^2)^\circ$ en sí mismo.

Ejercicio 9.3. Si $p\colon \widetilde{X} \to X$ es una proyección recubridora donde $\widetilde{X}$ es conexo por caminos y X es simplemente conexo, mostrar que p es un homeomorfismo.

Ejercicio 9.4. Dícese que un espacio Z es **localmente conexo por caminos** si cada punto de Z tiene un vecindario abierto que es conexo por caminos. Supóngase que $p\colon (\widetilde{X},y) \to (X,x)$ es una proyección recubridora y que $f\colon (Z,z) \to (X,x)$ es una función continua, donde X, $\widetilde{X}$ y Z son conexos por caminos, y además Z es localmente conexo por caminos.

Demostrar que hay una función continua $\tilde{f}\colon (Z,z) \to (\widetilde{X},y)$ tal que $p \circ \tilde{f} = f$ si y sólo si $f_*(\pi_1(Z,z)) \subseteq p_*(\pi_1(\widetilde{X},y))$ como subgrupos de $\pi_1(X,x)$.

⟦ Indicación: La conexidad local por caminos de Z se usa solamente para mostrar la continuidad de $\tilde{f}$. ⟧

Ejercicio 9.5. Sean $p\colon \widetilde{X} \to X$ y $q\colon \widehat{X} \to X$ dos proyecciones recubridores, donde X, $\widetilde{X}$ y $\widehat{X}$ son conexos por caminos y X es localmente conexo por caminos. Un **morfismo de espacios recubridores** $h\colon (\widetilde{X};p) \to (\widehat{X};q)$ es una función continua $h\colon \widetilde{X} \to \widehat{X}$ con $q \circ h = p$. Demostrar que $h\colon \widetilde{X} \to \widehat{X}$ es también una proyección recubridora.

⟦ Indicación: Obsérvese que es necesario mostrar que h es sobreyectiva. ⟧

Ejercicio 9.6. Un espacio recubridor $\widetilde{X}$ de un espacio conexo por caminos X se llama **espacio recubridor universal** si $\widetilde{X}$ es simplemente conexo. Demostrar que dos espacios recubridores universales de X son isomorfos (por un morfismo invertible; por ende, son homeomorfos).[11]

Ejercicio 9.7. (a) Comprobar que el espacio $\mathbb{S}^2 \vee \mathbb{S}^2$ (dos esferas tangentes) es simplemente conexo.

(b) Construir un espacio recubridor de $\mathbb{RP}^2 \vee \mathbb{RP}^2$ de la forma $Y = (\mathbb{S}^2 \uplus \mathbb{S}^2)/{\sim}$ cuya proyección recubridora es dos-a-uno.

Ejercicio 9.8. (a) Sea H un subgrupo *discreto* (y por tanto cerrado) de un grupo topológico G y sea $q\colon G \to G/H$ la aplicación cociente, donde G/H es el conjunto de coclases (a la izquierda) de H, dotado de la topología cociente. Demostrar que hay un vecindario abierto V de $1 \in G$ tal que $V \cap H = \{1\}$. Concluir que q es una proyección recubridora.

(b) Mostrar que $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^2$ y $SU(2)$ son espacios recubridores universales para los espacios $\mathbb{T}^2$, $\mathbb{RP}^2$ y $SO(3)$, respectivamente.[12]

10 Ejercicios sobre homología simplicial

Ejercicio 10.1. Si X, Y son dos espacios topológicos no vacíos, su **juntura** $X \star Y$ se define como el espacio cociente $(X \times I \times Y)/R$, cuya relación de equivalencia R está generado por:[13]

$$\left.\begin{aligned} (x,0,y) &\sim (x,0,y') \\ (x,1,y) &\sim (x',1,y) \end{aligned}\right\} \quad \text{para todo} \quad x,x' \in X;\ y,y' \in Y.$$

(a) Comprobar que el conjunto $X \star Y$ es la unión de todos los 1-símplices $[x,y]$ tales que $x \in X \subset X \uplus Y$, $y \in Y \subset X \uplus Y$. (En consecuencia, la juntura de dos Δ-complejos es un Δ-complejo.)

(b) Si $P = \{p\}$ es un punto, el **cono** CX es la juntura $X \star P$. Hallar un homeomorfismo afín entre $C\Delta_k$ y Δ_{k+1}.

[11] La *existencia* de un espacio recubridor universal no está garantizado; para las condiciones necesarias y suficientes sobre X que permiten construir un espacio recubridor universal, véase la sección 1.3 del libro de Hatcher.

[12] El caso de $\mathbb{S}^2$ no depende directamente de la parte (a), porque $\mathbb{S}^2$ no es un grupo topológico.

[13] En inglés: $X \star Y$ is the **join** of X and Y.

(c) La **suspensión** SX es la juntura $X \star \mathbb{S}^0$. Describir el espacio $S(I \times I)$.

(d) Demostrar que $I \star I \approx \Delta_3$.

Ejercicio 10.2. Si $\varepsilon_k^j \colon \Delta_{k-1} \to \Delta_k$ es el homeomorfismo afín, que preserva el orden de los vértices, entre Δ_{k-1} y la faceta $[e_0, \dots, \widehat{e}_j, \dots, e_k]$ de Δ_k, comprobar que $\varepsilon_k^j \circ \varepsilon_{k-1}^i = \varepsilon_k^i \circ \varepsilon_{k-1}^{j-1}$ para $i < j$. Usando esta relación, demostrar la fórmula $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ sobre cadenas singulares.

Ejercicio 10.3. Sea T el Δ-complejo formado por un solo 3-símplice $T = [v_0, v_1, v_2, v_3]$ y todas sus facetas (con sus vértices ordenados según el patrón $v_0 < v_1 < v_2 < v_3$). Calcular los grupos de homología simplicial $H_k^\Delta(T)$ para $k = 0, 1, 2, 3$.

Ejercicio 10.4. La esfera $\mathbb{S}^2$ es homeomorfo al 2-esqueleto $\Delta_3' \equiv \Delta_3^2$ del tetraedro Δ_3. Calcular los grupos de homología simplicial $H_k^\Delta(\mathbb{S}^2) = H_k^\Delta(\Delta_3^2)$ para $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 10.5. Sea Y el "paracaídas triangular" obtenido de un triángulo al identificar sus tres vértices a un sólo punto: $Y := [v_0, v_1, v_2]/\{v_0, v_1, v_2\}$. Calcular los grupos de homología simplicial $H_k^\Delta(Y)$ para $k = 0, 1, 2$.

Ejercicio 10.6. Si K es un complejo simplicial de dimensión n y si K^r es su r-esqueleto para $r \leq n$, demostrar que $H_k^\Delta(K^r) \simeq H_k^\Delta(K)$ para $k = 1, \dots, r-1$.

¿Hay alguna relación general entre $H_r^\Delta(K^r)$ y $H_r^\Delta(K)$?

Ejercicio 10.7. Exhibir un homeomorfismo entre el cono $C\mathbb{S}^n$ de la n-esfera y la bola unitaria cerrada $\mathbb{B}^{n+1}$. Usar el ejercicio anterior[14] para mostrar que $H_k(\mathbb{S}^n) = 0$ para $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Ejercicio 10.8. Si G es un grupo abeliano cualquiera, una k-cadena **con coeficientes en** G es una suma formal finita $\sum_\alpha m_\alpha \sigma_\alpha$ de k-símplices σ_α donde cada $m_\alpha \in G$. Así se obtienen complejos de cadenas $\Delta_k(Y;G)$ y $S_k(X;G)$ si Y es un Δ-complejo y X es un espacio topológico; y de ahí se obtiene homología con coeficientes, $H_k^\Delta(Y;G)$ y $H_k(X;G)$.

Calcular $H_k^\Delta(\mathbb{RP}^2;\mathbb{Z}/2)$ y $H_k^\Delta(\mathbb{RP}^2;\mathbb{R})$, para el plano proyectivo $\mathbb{RP}^2$.

La botella de Klein B y la franja de Möbius M

[14] Para un Δ-complejo compacto Y, hay un isomorfismo $H_k^\Delta(Y) \simeq H_k(Y)$, para $k \in \mathbb{N}$, entre sus homologías simplicial y singular.

Ejercicio 10.9. En los dos diagramas anteriores se exhiben Δ-complejos homeomorfos a la **botella de Klein** B (se identifican dos lados opuestos de un cuadrado en forma paralela y los otros dos en forma antiparalela); y la **franja de Möbius** M (se identifican dos lados opuestos de un cuadrado en forma antiparalela pero los otros dos lados no se identifican).

Calcular los grupos de homología simplicial $H_k^\Delta(B)$ y $H_k^\Delta(M)$ para $k = 0,1,2$.

Ejercicio 10.10. Si Y es un Δ-complejo de dimensión n y si $k \in \{0,1,\dots,n\}$, entonces $H_k^\Delta(Y;\mathbb{R})$ es un espacio vectorial finitodimensional; las dimensiones $b_k(Y) := \dim_{\mathbb{R}} H_k^\Delta(Y;\mathbb{R})$, para $k = 0,1,\dots,n$, son los **números de Betti** de Y.

La suma alternada

$$\chi(Y) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k b_k(Y)$$

se llama la **característica de Euler** de Y. Si $\alpha_k(Y) := \dim_{\mathbb{R}} \Delta_k(Y;\mathbb{R})$ es el número de los k-símplices de Y, comprobar la fórmula

$$\chi(Y) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \alpha_k(Y).$$

Determinar la característica de Euler de la esfera $\mathbb{S}^n$. ¿Cuáles son los números de Betti $b_k(\mathbb{S}^n)$?

⟦ Indicación: Si W es un subespacio de V, entonces $\dim_{\mathbb{R}}(V/W) = \dim_{\mathbb{R}} V - \dim_{\mathbb{R}} W$. ⟧

Ejercicio 10.11. Si $X = \biguplus_{\alpha \in J} X_\alpha$ expresa un espacio topológico X como unión disjunta de sus componentes conexas por caminos X_α, comprobar que $H_0(X) \simeq \bigoplus_{\alpha \in J} H_0(X_\alpha)$.

Ejercicio 10.12. Demostrar que los espacios topológicos $\mathbb{T}^2$ y $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ tienen grupos de homología singular isomorfos en cada grado, pero no son homotópicamente equivalentes.

11 Ejercicios sobre homología singular

Ejercicio 11.1. Si X es un espacio conexo por caminos y si $A \subseteq X$ con $A \neq \emptyset$, demostrar que $H_0(X,A) = 0$.

Ejercicio 11.2. (a) Si $P = \{p\}$ es un punto con $p \in X$, y si $c\colon X \to P$ es la función constante, la **homología reducida** de X se define como[15]

$$\widetilde{H}_k(X) := \ker(c_*\colon H_k(X) \to H_k(P)).$$

Comprobar que $\widetilde{H}_k(X) = H_k(X)$ para $k > 0$.

(b) Si $i\colon P \rightarrowtail X$ es la inclusión, usar $c \circ i = 1_P$ para mostrar que $H_0(X) \simeq \mathbb{Z} \oplus \widetilde{H}_0(X)$.

(c) Usar la sucesión exacta larga del par (X,P) para comprobar que $\widetilde{H}_0(X) \simeq H_0(X,P)$.

[15]La homología reducida simplifica el caso $k = 0$ de la homología singular. Por ejemplo, para la homología reducida de las esferas se obtiene $\widetilde{H}_n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{Z}$ y $\widetilde{H}_k(\mathbb{S}^n) = 0$ para $k \neq n$.

Ejercicio 11.3. Una **homotopía de pares** entre dos morfismos $f,g\colon (X,A) \to (Y,B)$ es una homotopía $F\colon X \times I \to Y$ entre f y g tal que $F(A \times I) \subseteq B$. Si los morfismos f, g son homotópicos, comprobar que $f_* = g_* : H_k(X,A) \to H_k(Y,B)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

⟦ Indicación: Explicar por qué la demostración para la homología "absoluta" de X y de A sigue válido para la homología relativa. Alternativamente, usar el "lema de cinco" para sucesiones exactas. ⟧

Ejercicio 11.4. Si $r\colon X \to A$ es una *retracción*, demostrar que el homomorfismo

$$(r_*, j_*) : H_k(X) \to H_k(A) \oplus H_k(X,A)$$

es un isomorfismo, para cada $k \in \mathbb{N}$.

Además, si $r\colon X \to A$ es una retracción *por deformación*, comprobar que $H_k(X,A) = 0$.

Ejercicio 11.5. Demostrar que la sucesión exacta larga en homología es una construcción **natural**. En otras palabras, para cada morfismo de pares $f\colon (X,A) \to (Y,B)$, demostrar que el siguiente diagrama es conmutativo:[16]

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_k(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_k(X) \arrow[r, "j_*"] \arrow[d, "f_*"] & H_k(X,A) \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_*"] & H_{k-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "f_*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H_k(B) \arrow[r, "i_*"] & H_k(Y) \arrow[r, "j_*"] & H_k(Y,B) \arrow[r, "\delta"] & H_{k-1}(B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Ejercicio 11.6. En la esfera $\mathbb{S}^n$, defínase las partes

$$\begin{aligned}
B_+ &:= \{x \in \mathbb{S}^n : x_n \geq 0\}, \qquad & U_+ &:= \{x \in \mathbb{S}^n : x_n > \tfrac{1}{2}\}, \\
B_- &:= \{x \in \mathbb{S}^n : x_n \leq 0\}, \qquad & U_- &:= \{x \in \mathbb{S}^n : x_n < -\tfrac{1}{2}\}.
\end{aligned}$$

(a) Demostrar que $\{\mathbb{S}^n \setminus U_-, \mathbb{S}^n \setminus U_+\}$ es una copla escisiva.

(b) Demostrar que $(B_+, \mathbb{S}^{n-1})$ es una retracción por deformación de $(\mathbb{S}^n \setminus U_-, B_- \setminus U_-)$.

(c) Concluir que $\{B_+, B_-\}$ es una copla escisiva.

Ejercicio 11.7. Si X es un espacio topológico, mostrar que $\{X,X\}$ es una copla escisiva en X. Describir explícitamente los homomorfismos φ_*, ψ_*, δ para la sucesión de Mayer y Vietoris de esta copla.

⟦ Indicación: Es de esperar que esta copla "trivial" no aporte información alguna sobre los grupos de homología $H_k(X)$. Justificar esta conjetura con el cálculo del homomorfismo δ. ⟧

[16] La conmutatividad del diagrama para cada f significa que los homomorfismos i_*, j_*, δ son *transformaciones naturales* entre las funtores H_k que definen las columnas.

Ejercicio 11.8. El trabajo original de Mayer[17] usó los eventuales métodos de su sucesión exacta con Vietoris para calcular la homología singular del toro $\mathbb{T}^2$. Considérese $\mathbb{T}^2$ como la superficie $z^2 + (r-b)^2 = a^2$ en coordenadas cilíndricas (r,θ,z) en $\mathbb{R}^3$, donde $b > a > 0$. Defínase $U \subset \mathbb{T}^2$ por la relación $-\pi/4 < \theta < 5\pi/4$; y también $V \subset \mathbb{T}^2$ por $3\pi/4 < \theta < 9\pi/4$.

Demostrar que $\{U,V\}$ es una copla escisiva en $\mathbb{T}^2$. Mostrar que U, V y $U \cap V$ son homotópicamente equivalentes a $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^1$ y $\mathbb{S}^1 \uplus \mathbb{S}^1$, respectivamente. Dado que $H_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$, calcular $H_k(\mathbb{T}^2)$ para cada $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 11.9. (a) Si $\{U,V\}$ es una copla excisiva con $X = U \cup V$ y si $\widetilde{H}_k(U \cap V) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, comprobar que $\widetilde{H}_k(X) \simeq \widetilde{H}_k(U) \oplus \widetilde{H}_k(V)$ para todo k.

(b) Si (X,p) y (Y,q) son espacios puntuados; si hay vecindarios contractibles W de p en X y W' de q en Y; y si $(X \vee Y, r)$ es la cuña de estos dos espacios puntuados, demostrar que $\widetilde{H}_k(X \vee Y) \simeq \widetilde{H}_k(X) \oplus \widetilde{H}_k(Y)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

(c) Usar este resultado para demostrar que los espacios $\mathbb{T}^2$ y $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^2$ poseen la misma homología singular.

Ejercicio 11.10. (a) Si $\{U,V\}$ es una copla excisiva con $X = U \cup V$ y si $\widetilde{H}_k(U) = \widetilde{H}_k(V) = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$, comprobar que $\widetilde{H}_{k+1}(X) \simeq \widetilde{H}_k(U \cap V)$ para todo k.

(b) Si X es un espacio topológico, su **suspensión** $SX = X \star \mathbb{S}^0$ se identifica con el cociente $(X \times I)/\sim$ donde $(x,0) \sim (x',0)$ y también $(x,1) \sim (x',1)$ para todo $x,x' \in X$. En otras palabras, el subespacio $X \times \{0\}$ de $X \times I$ se identifica con un punto $p \in SX$; y el subespacio $X \times \{1\}$ se identifica con otro punto $q \in SX$. Demostrar que $\{SX \setminus \{q\}, SX \setminus \{p\}\}$ es una copla escisiva en SX.

(c) Concluir que $\widetilde{H}_{k+1}(SX) \simeq \widetilde{H}_k(X)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 11.11. Si $f \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es continua, el homomorfismo $f_* \colon H_n(\mathbb{S}^n) \to H_n(\mathbb{S}^n)$ tiene la forma $f_*(\bar{z}) := m\bar{z}$ para algún $m \in \mathbb{Z}$, ya que $H_n(\mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{Z}$. Este número entero $m =: \operatorname{gr}(f)$ se llama el **grado** de f.

(a) Comprobar que $\operatorname{gr}(1_{\mathbb{S}^n}) = 1$ y que $\operatorname{gr}(f \circ g) = \operatorname{gr}(f)\operatorname{gr}(g)$.

(b) Si $f,g \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ son homotópicas, mostrar que $\operatorname{gr}(f) = \operatorname{gr}(g)$.

(c) Para el caso $n = 1$, si $f(z) = z$ para algún $z \in \mathbb{S}^1$, comprobar que esta definición de $\operatorname{gr}(f)$ coincide con el grado del lazo f.

(d) Si ρ es la reflexión $(x_0,x_1,\dots,x_n) \mapsto (-x_0,x_1,\dots,x_n)$, mostrar que $\operatorname{gr}(\rho) = -1$.

$\llbracket$ Indicación: Inducción sobre n. $\rrbracket$

(e) Si $a_n \colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es la aplicación antipodal $x \mapsto -x$, mostrar que $\operatorname{gr}(a_n) = (-1)^{n+1}$.

[17] Walther Mayer, *Über abstrakte Topologie*, Monatshefte für Mathematik **36** (1929), 1–42.

Indíce General