



REVISTA

GEOFISICA



INSTITUTO PANAMERICANO DE GEOGRAFIA E HISTORIA

NUMERO 41

JULIO-DICIEMBRE 1994

Suavizamiento de Series Cronológicas Geofísicas con Ruido Blanco y Rojo Aditivo

F.J. Soley*

Abstract

Time sequences are usually smoothed to reduce the variance and to extract features hidden by noise. Several smoothing methods are available to the users of software packages for time series analysis. Most users, nevertheless, ignore the properties of the different methods and are unaware of the changes a given smoothing method can cause on the original data. In this article the statistical and spectral properties of commonly used smoothing methods are presented. The methods discussed are convolution of the data with time windows and multiplication of the spectra by a parabolic window. The spectral response, the autocovariance and the impulse response of the windows are calculated and it is shown how to use this characteristics to choose a suitable smoothing filter.

Some geophysical time sequences show correlated background noise that can be modelled as red noise. It is shown that the reduction in variance by smoothing is less in the presence of red noise than of white noise.

Resumen

El suavizamiento se utiliza frecuentemente en el análisis de series cronológicas para reducir la varianza y resaltar tendencias oscurecidas por el ruido de fondo. Existen diversos métodos para suavizar secuencias que están a disposición de los usuarios en los sistemas computacionales para el análisis de secuencias cronológicas. Sin embargo, una buena parte de los usuarios de estos sistemas desconocen las propiedades de los métodos y las alteraciones que los mismos producen en la información original. En este artículo se presentan las propiedades estadísticas y espectrales de métodos comunes de suavizado como convolución con ventanas temporales y multiplicación del espectro por una ventana parabólica. Se calcula el espectro, la

* Centro de Investigaciones Geofísicas y Escuela de Física, Universidad de Costa Rica.

autocovarianza y la respuesta al impulso de las ventanas y se explica como, en base a ellas, se puede escoger el método idóneo para una aplicación.

En algunas secuencias geofísicas se observa que el ruido de fondo está correlacionado y que se puede modelar como ruido rojo. Se demuestra que la reducción en varianza producida por el suavizamiento es menor en la presencia de ruido rojo que en la de ruido blanco.

Introducción

El suavizamiento se utiliza frecuentemente en el análisis de series cronológicas para reducir la varianza y resaltar tendencias oscurecidas por el ruido de fondo. Después de un proceso de suavizado adecuado, es posible en muchas ocasiones reconocer periodicidades y la presencia de efectos no estacionarios como tendencias lineales y de orden superior que estaban sumergidos en el ruido. Diversos métodos para suavizar secuencias están a disposición de los usuarios en los sistemas computacionales para el análisis de secuencias cronológicas. En este artículo consideraremos las ventanas temporales rectangular, triangular, de Henderson, de Spencer y la ventana espectral parabólica, que son las de uso más generalizado.

La discusión se limitará a señales determinísticas con ruido aditivo por ser un modelo simple y de aplicación amplia a secuencias geofísicas. Lo usual es considerar el ruido en este modelo como no correlacionado o ruido blanco, y este caso es tratado extensamente en los textos de análisis de señales. En algunas secuencias geofísicas se observa que el ruido está correlacionado exponencialmente y se denomina ruido rojo (Amador y Soley, 1982; Soley 1988). Este caso ha sido poco estudiado en la literatura.

Los procesos de suavizamiento permiten determinar una señal constante inmersa en ruido blanco a un grado de precisión arbitrario (Papoulis A. 1979). Este resultado se deriva usualmente en el caso de señales continuas y con tiempos de observación ilimitados. En este artículo demostramos que en el proceso discreto, con ruido rojo, también es posible determinar el valor de una secuencia constante. Mientras más largo se haga el filtro suavizador, mayor es la precisión de la medición. En este caso, la longitud de los datos impone una limitación práctica a la longitud del filtro de suavizado.

Si la señal no es constante, el proceso de suavizado la distorsiona mientras reduce la varianza del ruido. Es por lo tanto muy importante poder estimar el grado de distorsión producido por los diversos filtros a una señal dada. La varianza del ruido disminuye con la longitud del filtro, pero a la vez la distorsión aumenta. El analista se enfrenta a esta disyuntiva en la selección del filtro idóneo para su aplicación. En este artículo se dan el espectro, la autocovarianza y la respuesta al impulso de los diversos filtros. También se calcula la razón señal a ruido de los filtros. Con ejemplos se ilustra como se puede utilizar la información dada en la selección

de un filtro. En el cálculo de la razón señal a ruido se obtiene un resultado interesante: la reducción en varianza es menor cuanto mayor es la correlación del ruido.

Relaciones fundamentales en el suavizamiento de señales

El problema de estimar una señal en la presencia de ruido aditivo, es un problema básico de la teoría de procesos estocásticos. Se considera que la cantidad medida es una secuencia cronológica finita:

$$x[n] = f[n] + \eta[n], \quad (1)$$

compuesta de la señal de interés $f[n]$ y del ruido $\eta[n]$. El ruido puede ser producido por el proceso de medición y por la interacción del fenómeno de interés con otros. La secuencia $f[n]$ puede ser conocida, desconocida, o aleatoria. En el primer caso, es posible diseñar filtros optimizados para extraer la señal del ruido, pero esta situación es poco usual en geofísica. El modelo de una secuencia aleatoria ofrece posibilidades de aplicaciones interesantes pero no será considerada en este artículo. Nos limitaremos al caso de una señal determinística desconocida $f[n]$ con ruido estacionario aditivo $\eta[n]$ no correlacionado y correlacionado exponencialmente (ruido rojo). Suponemos, además que $E\{\eta[n]\} = 0$.

Bajo las condiciones anteriores, el valor esperado y la varianza de $x[n]$ son $E\{x[n]\} = f[n]$ y $\sigma_{xx}^2 = E\{\eta[n]^2\} = \Gamma_{\eta\eta}[0]$, respectivamente. El efecto del ruido en la señal será despreciable si $\sigma_{xx} \ll f[n]$. Si esta condición no se cumple para algunos o todos los valores de n , el efecto del ruido se puede disminuir suavizándolos. Un filtro suavizador muy sencillo es una media móvil con una ventana temporal $h[n]$, donde los coeficientes cumplen con la condición $\sum h[n] = 1$. Llamando la secuencia suavizada $y[n]$, tenemos

$$y[n] = x[n] \otimes h[n] = f[n] \otimes h[n] + \eta[n] \otimes h[n] \quad (2)$$

$$= \sum_{k=-N}^N h[k]f[n-k] + \sum_{k=-N}^N h[k]\eta[n-k].$$

Nótese que el filtro así definido no es causal, y que se están utilizando índices negativos para los elementos del filtro. Que el filtro no sea causal no presenta problemas en la práctica, y si así fuera, la causalidad puede restaurarse multiplicando la transformada zeta del filtro

$$H(z) = \sum_{n=-N}^N h[n]z^n \quad (3)$$

por el factor z^{-N} . La respuesta en frecuencia se obtiene evaluando $H(z)$ en el círculo unitario del plano complejo, obteniéndose,

$$H(\exp(jw\tau)) = \sum_{n=-N}^N h[n] \exp(-jnw\tau), \quad (4)$$

en donde τ es el tiempo de muestreo. Las ventanas temporales para suavizamiento son simétricas, es decir, $h[-k] = h[k]$. Esta simetría elimina la parte imaginaria en la Ec. (4), y $H(\exp(jw\tau))$ queda como un polinomio trigonométrico en cosenos.

$$H(\exp(jw\tau)) = h[0] + 2 \sum_{n=1}^N h[n] \cos(nw\tau), \quad (5)$$

Al ser la respuesta en frecuencia real, la salida del filtro ocurre con cero retardo respecto a la entrada.

El valor esperado de los datos suavizados es

$$E\{y[n]\} = f[n] \otimes h[n] + E\{\eta[n]\} \otimes h[n] = \sum_{k=-N}^N h[k] f[n-k], \quad (6)$$

con varianza

$$\sigma_{yy}^2 = E\{[y[n] - E\{y[n]\}]^2\} \quad (7)$$

$$= E\left\{ \sum_{k=-N}^N h[k] \eta[n-k] \sum_{l=-N}^N h[l] \eta[n-l] \right\} = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N h[l] h[k] \Gamma_{\eta\eta}[l-k]$$

Se obtiene una reducción en la varianza si $\sigma_{yy}^2/\sigma_{xx}^2 < 1$.

La autocovarianza muestral de los datos se puede calcular fácilmente de la antitransformada del espectro de potencia. Sea $X|j|$, $F|j|$ y $N|j|$ las transformadas discretas de Fourier de los datos, la parte determinística y del ruido, respectivamente. Transformando la Ec. (1), y sacando el módulo cuadrado de la transformada, obtenemos

$$|X[j]|^2 = |F[j]|^2 + F[j]N^*[j] + N[j]F^*[j] + |N[j]|^2 \quad (8)$$

El valor esperado del espectro de potencia es la suma del espectro determinístico y el espectro de potencia del ruido

$$E\{|X[j]|^2\} = |F[j]|^2 + E\{|N[j]|^2\}, \quad (9)$$

desapareciendo los términos cruzados. Antitransformando (8) se obtiene la autocovarianza muestral de los datos

$$C_{XX}[L] = C_{FF}[L] + C_{FN}[L] + C_{NF}[L] + C_{NN}[L] \quad (10)$$

donde $C_{FN}[L]$ y $C_{NF}[L]$ son términos de covarianza cruzada entre la señal conocida y el ruido aditivo. El valor esperado es

$$E\{C_{XX}[L]\} = \Gamma_{XX}[L] = C_{FF}[L] = \Gamma_{NN}[L] \quad (11)$$

La autocovarianza del filtro suavizador debe decaer en tiempo más rápido que la de la función determinística para así minimizar la distorsión de esta función.

La transformada de los datos suavizados y su módulo cuadrado son

$$Y[j] = F[j]H[j] + N[j]H[j], \quad (12)$$

$$|Y[j]|^2 = |H[j]|^2[|F[j]|^2 + F[j]N^*[j] + N[j]F^*[j] + |N[j]|^2] \quad (13)$$

El valor esperado del espectro de potencia de los datos suavizados tampoco tiene los términos cruzados

$$E\{|Y[j]|^2\} = |H[j]|^2[|F[j]|^2 + |H[j]|^2E\{|N[j]|^2\}] \quad (14)$$

Las características espectrales del filtro suavizador deben ser tales que no modifiquen sustancialmente el espectro de la señal determinística y a la vez atenúen lo más posible el espectro del ruido.

Antitransformando el módulo cuadrado se obtiene la autocovarianza muestral

$$C_{YY}[L] = C_{HH}[L] \otimes C_{FF}[L] + C_{HH}[L] \otimes C_{NN}[L] + C_{HH}[L] \otimes C_{FN}[L] + C_{HH}[L] \otimes C_{NF}[L] \quad (15)$$

que tiene un valor esperado

$$\Gamma_{YY}[L] = C_{HH}[L] \otimes C_{FF} + C_{HH}[L] \otimes \Gamma_{NN}[L] \quad (16)$$

Observamos de nuevo que la autocovarianza del filtro debe decaer muy rápidamente comparada a la autocovarianza de la señal determinística para disminuir la distorsión.

Suavizamiento de una señal constante

En el caso de señales continuas, es conocido que una señal constante con ruido aditivo correlacionado puede ser estimada a cualquier grado de precisión utilizando un intervalo de suavizamiento suficientemente largo (Papoulis 1979). En esta sección se aplican las relaciones anteriores al caso de una secuencia constante finita.

Sea $f[n] = A$, y tomemos primero ruido blanco con correlación $R[l - k] = I\delta_{lk}$. El valor suavizado y su varianza dados por las ecuaciones 6 y 7 son

$$E\{y[n]\} = A \sum_{k=-N}^N h[k] \quad \sigma_{yy}^2[n] = I \sum_{k=-N}^N h[k]^2. \quad (17)$$

Vemos ahora la justificación para la condición $\sum h[k] = 1$ que garantiza que el estimado de la constante sea sin sesgo. Para un suavizamiento de pesos iguales $h[k] = 1/(2N + 1)$, $\sigma_{yy}^2[n] = I/(2N + 1)$. El valor mínimo de la varianza es I/T , y se obtiene usando una ventana de suavizamiento con una longitud igual al intervalo de la observación T .

El ruido rojo se caracteriza por una autocovarianza exponencial $R[l - k] = I\phi^{|l-k|}$, $0 < \phi < 1$ y en este caso, la varianza es

$$\sigma_{yy}^2[n] = \sum_{k=-N}^N \sum_{l=-N}^N h[l]h[k]I\phi^{|l-k|} \quad (18)$$

La doble sumatoria es sobre un rectángulo, y resulta más conveniente hacerla sobre las diagonales a lo largo de las cuales la autocovarianza es constante

$$\begin{aligned} \sigma_{yy}^2[n] = I & \sum_{k=-N}^N h[k]^2 + 2I\phi \sum_{k=-N}^{N-1} h[k]h[k+1] \\ & + 2I\phi^2 \sum_{k=-N}^{N-2} h[k]h[k+2] \dots + 2I\phi^{2N} h[-N]h[N] \end{aligned} \quad (19)$$

Si el suavizamiento se hace con una ventana rectangular de pesos iguales tenemos

$$\sigma_{yy}^2[n] = \frac{I}{2N+1} + 2I\phi \frac{2N}{(2N+1)^2} + 2I\phi^2 \frac{2N-1}{(2N+1)^2} \dots + 2I\phi^{2N} \frac{1}{(2N+1)^2} \quad (20)$$

De nuevo el valor mínimo corresponde al tomar una ventana de longitud igual al tiempo de observación ($T = 2N + 1$). La reducción en varianza se muestra en la Fi-

gura 1 para varios órdenes de la ventana rectangular y para valores de ϕ de 0.1 a 0.9. Nótese que para ruido rojo altamente correlacionado, la reducción en varianza es baja, aún para ventanas de 15 elementos.

Si el suavizamiento se hace con una ventana triangular para la cual $h[k] = (N + 1 - |k|) / (N + 1)^2$, obtenemos que la reducción en varianza es

$$\sigma^2_{rr}[n] = \frac{I}{(N + 1)^2} + \frac{IN(2N + 1)}{3(N + 1)^2}$$

para ruido blanco. Si el ruido es rojo, se obtiene un resultado similar al de la ventana rectangular y se muestran en la Figura 2.

Secuencia variable en tiempo

Si la secuencia no es constante, el estimado tiene un sesgo SZ

$$SZ(n) = \sum_{k=-N}^N h[k]f[n-k] - f[n]. \tag{21}$$

Para una longitud dada del filtro, el sesgo es mayor en aquellas regiones donde la secuencia cambia rápidamente. Por ejemplo para una secuencia exponencial decreciente a^n , $|a| < 1$ el sesgo es

$$SZ[n] = \frac{1}{3} \{a^{n-1} + a^n + a^{n+1}\} - a^n = \frac{1}{3} a^{n-1}(1-a)^2,$$

para una ventana rectangular de tres elementos. Nótese que el sesgo mismo es una secuencia exponencial decreciente. De forma similar se puede comprobar que el sesgo aumenta con la longitud del filtro. Un análisis de los espectros de los datos y del filtro, brindan información valiosa para evaluar el efecto del filtro sobre los datos.

La varianza disminuye con la longitud del filtro, al igual que para la secuencia constante. Por lo tanto, la longitud del filtro suavizador está dictada por dos requisitos en conflicto: la disminución del sesgo pide una longitud corta, mientras que la disminución de la varianza una longitud larga.

Filtros suavizadores

El suavizado de los datos se puede llevar a cabo mediante convolución con una ventana temporal o multiplicando el espectro de los datos con una ventana espectral y antitransformando el producto. De las ventanas temporales se tratarán la rectangular, la triangular, de Henderson y de Spencer, que son de las más utilizadas en la práctica. Como ventanas espectrales, se pueden utilizar filtros pasobajo. Esa posi-

bilidad no se discutirá en este artículo ya que está orientado a los lectores con pocos conocimientos en diseño de filtros digitales. Se tratará la ventana espectral parabólica que es de fácil aplicación y sus propiedades dependen de un único parámetro, lo que facilita adaptarla a diferentes situaciones (Aubanel y Oldham, 1985).

Ventanas temporales

En la Figura 3 se muestran las ventanas temporales para suavizado. La longitud de las ventanas rectangular y triangular se puede variar de acuerdo a la aplicación deseada. Las ventanas de Henderson y de Spencer son de longitud fija.

Ventana rectangular

El suavizamiento con una ventana rectangular corresponde a una media móvil con pesos iguales. Los elementos del filtro de longitud $2N + 1$ son

$$h[k] = \begin{cases} 1/(2N + 1) & -N \leq k \leq N \\ 0 & |k| > N. \end{cases} \quad (22)$$

La respuesta espectral se obtiene de la ecuación 5,

$$\begin{aligned} H(\exp(jw\tau)) &= \frac{1}{2N + 1} + \frac{2}{2N + 1} \sum_{n=1}^N \cos(nw\tau) \\ &= \frac{1}{2N + 1} \frac{\sin((2N + 1)w\tau/2)}{\sin(w\tau/2)} \end{aligned} \quad (23)$$

y se muestra en la Figura 4 para longitudes de 3 y 11 elementos. Nótese que para la ventana de 11 elementos, el lóbulo central es más angosto y los picos secundarios de menor amplitud. Las dos ventanas tienen secciones donde la respuesta en frecuencia es negativa. Si el ruido tiene un componente espectral en una frecuencia correspondiente al mínimo de un pico negativo, este componente aparecerá en los datos suavizados con menor amplitud y una diferencia de fase de 180° . La secuencia de autocovarianza es una ventana triangular del doble de ancho

$$\Gamma[k] = \begin{cases} \frac{2N + 1 - |k|}{(2N + 1)^2} & |k| \leq 2N \\ 0 & |k| > 2N \end{cases} \quad (24)$$

Ventana triangular

La ventana triangular de $2N + 1$ elementos es

$$h[k] = \begin{cases} \frac{N+1-|k|}{(N+1)^2} & |k| \leq N \\ 0 & |k| > N \end{cases} \quad (25)$$

por lo que su respuesta espectral se obtiene como el producto de la respuesta de una ventana rectangular de la mitad de ancho

$$H(\exp(jw\tau)) = \frac{1}{(N+1)^2} \frac{\sin^2((N+1)w\tau/2)}{\sin^2(w\tau/2)} \quad (26)$$

La respuesta espectral se muestra en la Figura 5 para longitudes de 3 y 11 elementos. Los lóbulos centrales son más anchos que los de las ventanas rectangulares de igual número de elementos (Figura 4), pero los máximos secundarios son de menor amplitud. La respuesta no alcanza valores negativos lo que la hace más aceptable que la rectangular. La autocovarianza se muestra en la Figura 6 para 3, 7 y 11 elementos, en donde se nota que se suaviza y extiende conforme aumenta el número de elementos.

Ventana de Henderson

Las ventanas de Henderson de 5 y 7 elementos están definidas por las secuencias

$$\begin{aligned} &\{-0.073427, \quad 0.293706, \quad 0.559441, \quad 0.293706, \quad -0.073427\}, \\ &\quad \{-0.058741, \quad 0.058741, \quad 0.293706, \quad 0.412587, \\ &\quad \quad \quad 0.293706, \quad 0.058741, \quad -0.058741\}, \end{aligned}$$

y las respuestas en frecuencia respectivas se muestran en la Figura 7. Nótese que al igual que la ventana rectangular, las respuestas en frecuencia alcanzan valores negativos. La secuencia de autocovarianza se muestra en la Figura 8.

Ventana de Spencer

Las ventanas de Spencer de 15 y 21 elementos están definidas por las secuencias

$$\begin{aligned} &\{-0.009375, \quad -0.018750, \quad -0.015625, \quad 0.009375, \quad 0.065625, \\ &\quad 0.143750, \quad 0.209375, \quad 0.231250, \quad 0.209375, \\ &\quad 0.143750, \quad 0.065625, \quad 0.009375, \quad -0.015625, \\ &\quad -0.018750, \quad -0.009375\} \end{aligned}$$

{-0.002857,	-0.008571,	-0.014286,	-0.014286,	-0.005714,
	0.017143,	0.051429,	0.094286,	0.134286
	0.162857,	0.171429,	0.162857,	0.134286,
	0.094286,	0.051429,	0.017143,	-0.005714,
	-0.014286,	-0.014286,	-0.008571,	-0.002857}

y su respuesta en frecuencia se muestra en la Figura 9. Los máximos secundarios apenas se notan, pero la secuencia de autocovarianza (Figura 10) es más ancha.

Ventana espectral parabólica

La ventana espectral parabólica de longitud total NT debe cumplir con la simetría $H[j] = H[NT - j]$ para que los datos filtrados sean reales. Se ilustrará el uso de esta ventana para el caso de una longitud total par. La extensión a un número impar es inmediata.

Sea $M = NT/2$. La ventana depende del parámetro E que determina el grado con que se filtra el ruido a las frecuencias altas, y se define así,

$$H[j] = \begin{cases} 1 - \left(\frac{j}{E}\right)^2 & j = 0, 1, 2, \dots, E-1, \\ 0 & j = E, E+1, \dots, M, \end{cases} \quad (27)$$

Si $E \leq M$, y si $E > M$

$$H[j] = 1 - \left(\frac{j}{E}\right)^2 \quad j = 0, 1, 2, \dots, M. \quad (28)$$

La segunda mitad simétrica de la ventana se construye de la relación $H[NT-j] = H[j]$ para $j = 1, 2, \dots, M-1$. Teniendo ahora la ventana completa, la parte real y la imaginaria del espectro $X[j]$ de los datos se multiplican por la ventana $H[j]$ para obtener el espectro $Y[j]$ de los datos suavizados (ecuación 12). Finalmente, se antitransforma $Y[j]$ para obtener los datos suavizados $y[k]$. La Figura 11 muestra la ventana parabólica para tres casos de filtrado: bajo, intermedio y alto; contra la frecuencia normalizada $f_j = j/NT$.

La respuesta en frecuencia de la ventana parabólica es muy conveniente y fácil de adaptar a diferentes situaciones de suavizado. El precio que se paga es una respuesta al impulso extendida. En la Figura 12 se observa que la ventana tiene unos tres o cuatro elementos dominantes, seguidos de una cola exponencial que decae lentamente.

Ejemplo 1: suavizamiento de un brinco en nivel

Para ilustrar el comportamiento de las ventanas de suavizamiento, estas se aplicarán a una secuencia cronológica construida artificialmente. La secuencia a suavizar consiste de un brinco en nivel de 4 a 5 unidades al que se le ha sumado ruido blanco distribuido normalmente con media cero y desviación estandar $\sigma = 0.5$. El brinco es apreciable a simple vista a pesar del ruido (Figura 13). Sin embargo, el ruido es suficiente para hacer que el histograma sea unimodal en lugar de bimodal (Figura 14). La magnitud del espectro se muestra en la Figura 15 y en él se observa que la energía de la señal se encuentra en frecuencias normalizadas menores a 0.06. El espectro a frecuencias mayores es casi plano y característico del ruido blanco. La región de separación es más apreciable calculando el espectro acumulado. Nótese la diferencia en pendiente promedio en los rangos 0.01 a 0.07 y de 0.07 a 0.5.

Las Figuras 16 y 17 muestran la señal suavizada con una ventana rectangular y una ventana triangular, respectivamente, de 3 y 11 elementos. Como es de esperar, las respectivas ventanas de 11 elementos suavizan más que las de 3 elementos. Además, se observa que la ventana rectangular da un resultado ligeramente más suave que la ventana triangular de igual número de elementos. Las respuestas en frecuencia de estas ventanas mostradas en las Figuras 4 y 5 explican estos resultados. El lóbulo principal de la ventana rectangular de 3 elementos se extiende hasta cerca de 0.34, mientras que el de la ventana triangular hasta 0.5, por lo que la atenuación del ruido es menor para la ventana triangular. Las ventanas de 11 elementos tienen el primer cero en la respuesta en frecuencia cerca de 0.09 la rectangular y cerca de 0.17 la triangular. La ventana de Henderson tiene características espectrales (Figura 7) muy parecidas a las ventanas rectangular y triangular de 3 elementos por lo que es de esperar que el suavizamiento será similar al mostrado en las Figuras 16 y 17.

La ventana de Spencer efectivamente corta el ruido para frecuencias mayores de 0.2 en los dos casos mostrados en la Figura 9, y el lóbulo principal de la ventana de 21 elementos es más angosto que el de 15. El suavizamiento es mayor, pero debido a la respuesta al impulso más larga, el ajuste al cambio de nivel es más lento (Figura 18) que para las ventanas rectangular y triangular. El histograma de la señal suavizada con esta ventana muestra una distribución bimodal, con modas de 4 y 5.25 (Figura 19).

La ventana espectral parabólica se puede ajustar para que la frecuencia de corte deje pasar, con poca atenuación, la energía del brinco y elimine la mayor parte del ruido. Escogiendo $E = 10$ se obtiene una frecuencia normalizada de corte de 0.078125 si el orden de la transformada es 128. Los datos suavizados se muestran en la Figura 20, el suavizamiento es mayor que el de la ventana de Spencer y el ajuste al cambio de nivel es similar.

La Figura 21 muestra el mismo cambio de nivel con ruido rojo aditivo. El coeficiente de correlación es de 0.5 y la desviación estandar, como en el caso ante-

rior, también es de 0.5. Nótese el efecto de persistencia presente en esta serie, y ausente cuando el ruido es blanco (Figura 13): los valores de un mismo signo tienden a estar agrupados y se reduce el número de cruces del promedio local. El suavizamiento con una ventana rectangular de 11 elementos (Figura 22) da un resultado similar al de ruido blanco (Figura 16).

Ejemplo 2: suavizamiento de dos sinusoides con ruido

La importancia de la respuesta espectral de las ventanas de suavizamiento se puede visualizar suavizando una señal compuesta de dos sinusoides con ruido blanco aditivo,

$$x[n] = \sin(2\pi f_1 n\tau + \delta_1) + \sin(2\pi f_2 n\tau + \delta_2) + \eta[n]. \quad (29)$$

En este ejemplo, las frecuencias normalizadas y los ángulos de fase tienen los siguientes valores: $f_1 = 0.0546875$, $f_2 = 0.2265625$, $\delta_1 = 11.5^\circ$ y $\delta_2 = 52.6^\circ$, mientras que el ruido blanco η tiene una distribución $N(0,0.3177)$. La secuencia cronológica se muestra en la Figura 23 y la magnitud de su espectro en la Figura 24, donde se observan claramente los dos picos de las sinusoides sobre el fondo plano del ruido blanco. La secuencia suavizada con las ventanas rectangular de 11 elementos, Henderson de 5 y Spencer de 21, se muestra en la Figura 25. La ventana de Spencer de 21 elementos elimina la componente sinusoidal de frecuencia alta, pasa con poca atenuación la de frecuencia baja, y elimina parte del ruido, como puede verificarse en el espectro en la Figura 26. Debido a las características espectrales de la ventana de Henderson de 5 elementos (Figura 7), la componente de alta frecuencia es atenuada por un factor de aproximadamente 0.5 y el ruido a frecuencias altas es atenuado (Figura 24). En la Figura 25 todavía se puede observar la interferencia producida por la frecuencia alta. Compárese con la secuencia suavizada con la ventana rectangular de 11 elementos, la cual atenúa la frecuencia alta por un factor menor de 0.2 (Figura 4): la secuencia cronológica suavizada en la Figura 25 apenas muestra la interferencia de la frecuencia alta. Su espectro en la Figura 26 muestra el pico a la frecuencia alta muy atenuado al igual que el ruido.

Conclusiones

La selección del filtro idóneo para suavizar una secuencia cronológica dada, depende del espectro de la secuencia y de la respuesta en frecuencia del filtro suavizador. Primero, es necesario determinar las características espectrales de los datos que se desean preservar, y la región del espectro que se desea atenuar. En segundo lugar se escoge el filtro con una respuesta en frecuencia adecuada. Por último, es recomendable comparar los espectros de los datos originales y de los suavizados para verificar los resultados del procesamiento.

VENTANA RECTANGULAR RUIDO ROJO

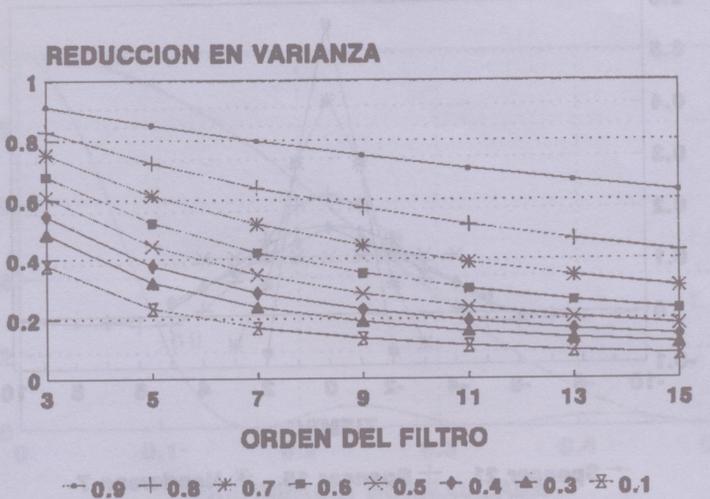


Figura 1. Reducción de la varianza del ruido aditivo de una secuencia constante producida por una ventana rectangular en función del número de elementos de la ventana y para varios valores del coeficiente de correlación del ruido.

VENTANA TRIANGULAR RUIDO ROJO

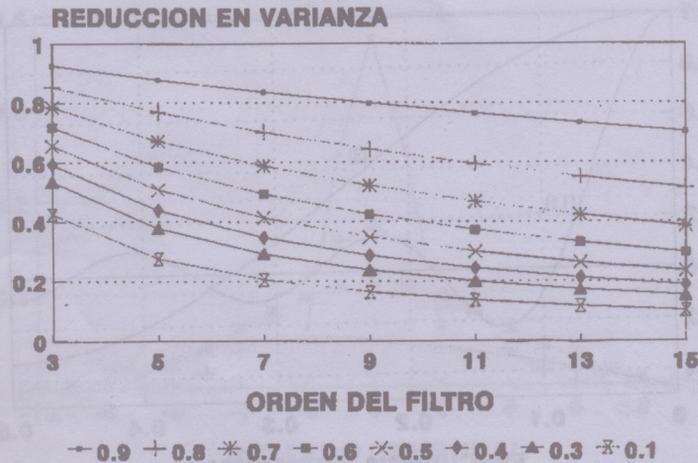


Figura 2. Reducción de la varianza del ruido aditivo de una secuencia constante producida por una ventana triangular en función del número de elementos de la ventana y para varios valores del coeficiente de correlación del ruido.

VENTANAS TEMPORALES PARA SUAVIZADO

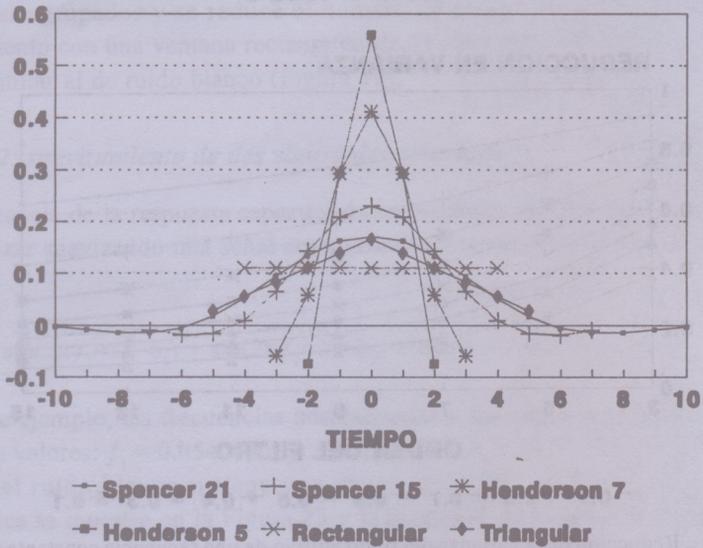


Figura 3. Ventanas temporales para suavizado: rectangular, triangular, de Henderson y de Spencer.

VENTANA RECTANGULAR RESPUESTA EN FRECUENCIA

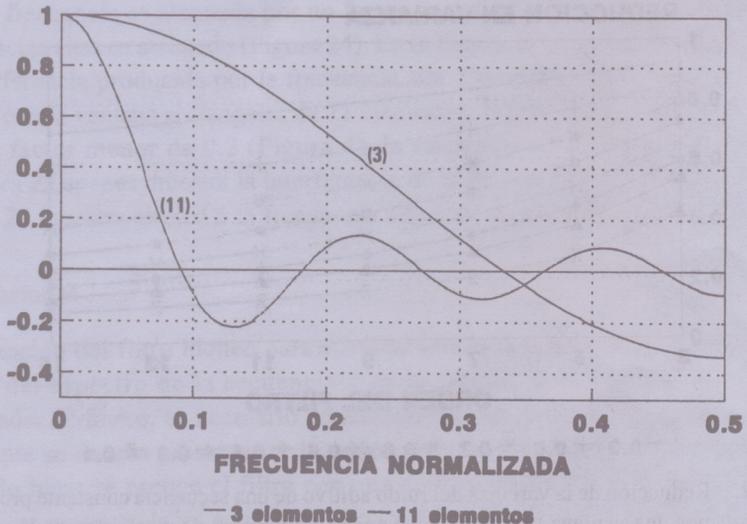


Figura 4. Respuesta en frecuencia de la ventana rectangular de 3 y 11 elementos.

VENTANA TRIANGULAR RESPUESTA EN FRECUENCIA

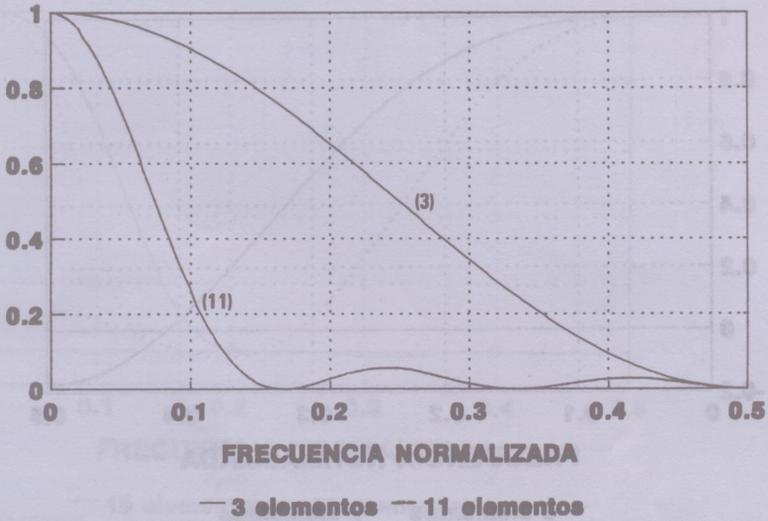


Figura 5. Respuesta en frecuencia de la ventana triangular de 3 y 11 elementos.

VENTANA TRIANGULAR AUTOCOVARIANZA

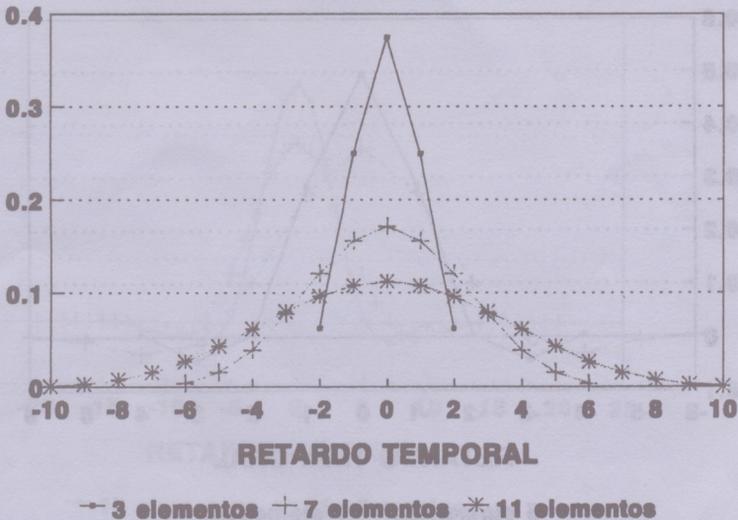


Figura 6. Autocovarianza de la ventana triangular de 3, 7 y 11 elementos.

VENTANA DE HENDERSON RESPUESTA EN FRECUENCIA

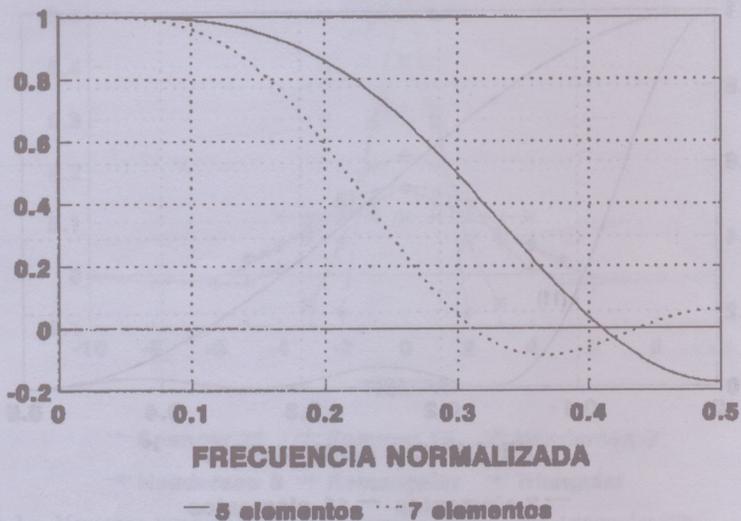


Figura 7. Respuesta en frecuencia de la ventana de Henderson de 5 y 7 elementos.

VENTANA DE HENDERSON AUTOCOVARIANZA

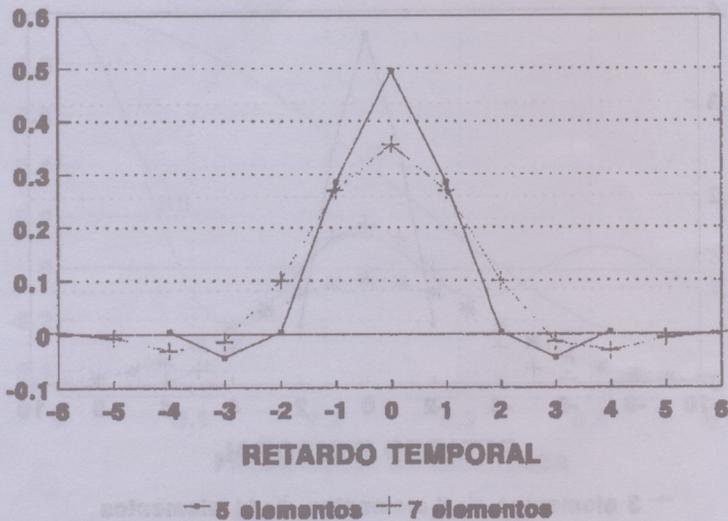


Figura 8. Autocovarianza de la ventana de Henderson de 5 y 7 elementos.

VENTANA DE SPENCER RESPUESTA EN FRECUENCIA

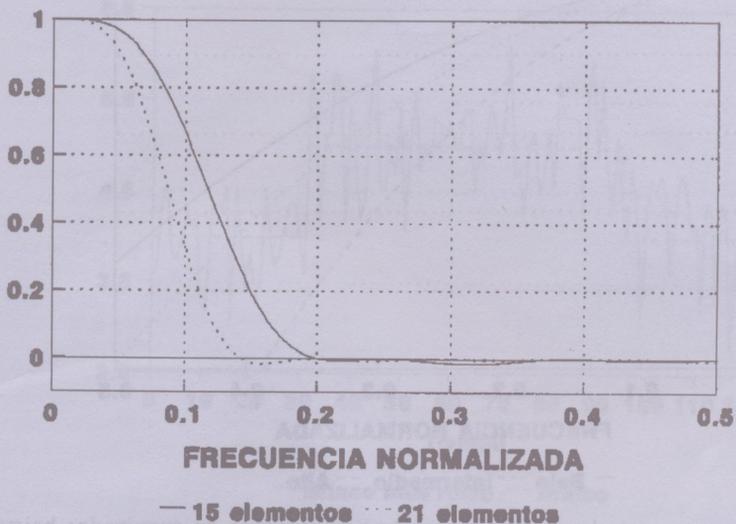


Figura 9. Respuesta en frecuencia de la ventana de Spencer de 15 y 21 elementos.

VENTANA DE SPENCER AUTOCOVARIANZA

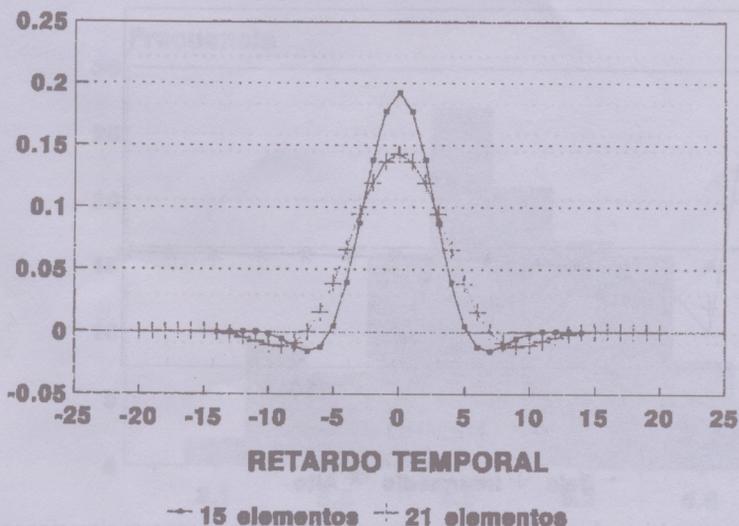


Figura 10. Autocovarianza de la ventana de Spencer de 15 y 21 elementos.

VENTANA ESPECTRAL PARABOLICA

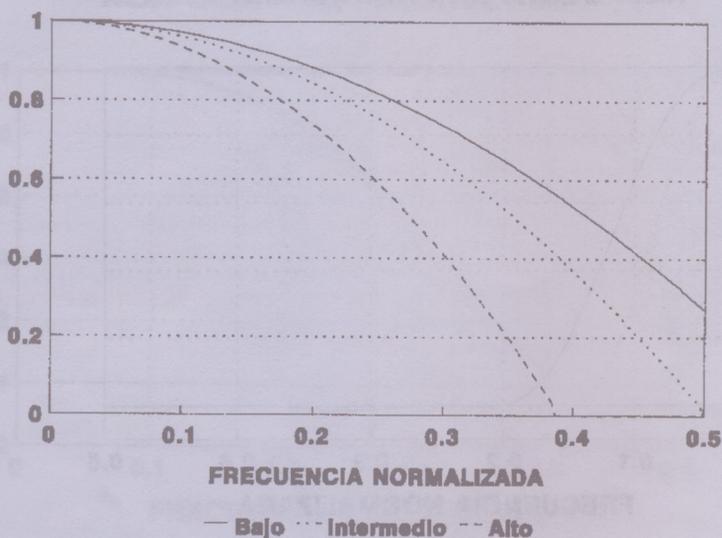


Figura 11. Ventana espectral parabólica para tres situaciones de suavizado: bajo, intermedio y alto.

RESPUESTA AL IMPULSO VENTANA PARABOLICA

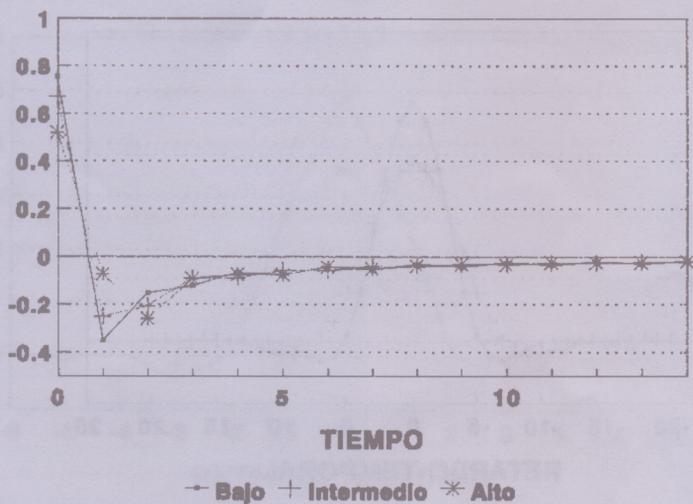


Figura 12. Respuesta al impulso de la ventana espectral parabólica para tres situaciones de suavizado: bajo, intermedio y alto.

EJEMPLO 1: BRINCO EN NIVEL SECUENCIA CRONOLOGICA

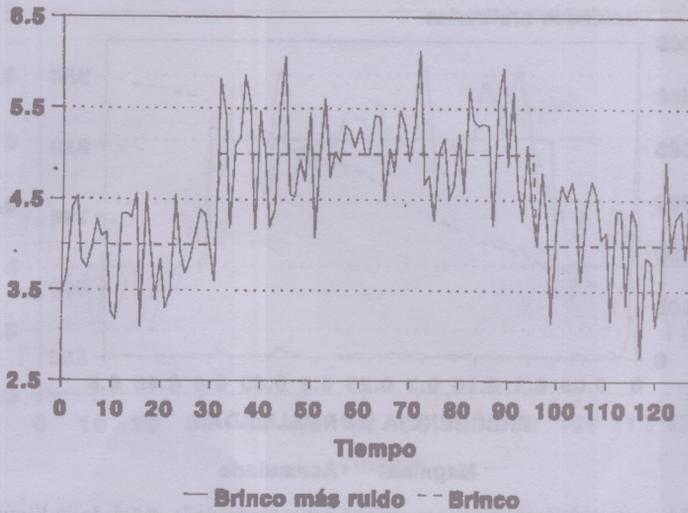


Figura 13. Señal compuesta de un brinco en nivel de 4 a 5 unidades con ruido blanco aditivo de distribución normal $N(0, 0.5)$.

EJEMPLO 1: BRINCO EN NIVEL HISTOGRAMA

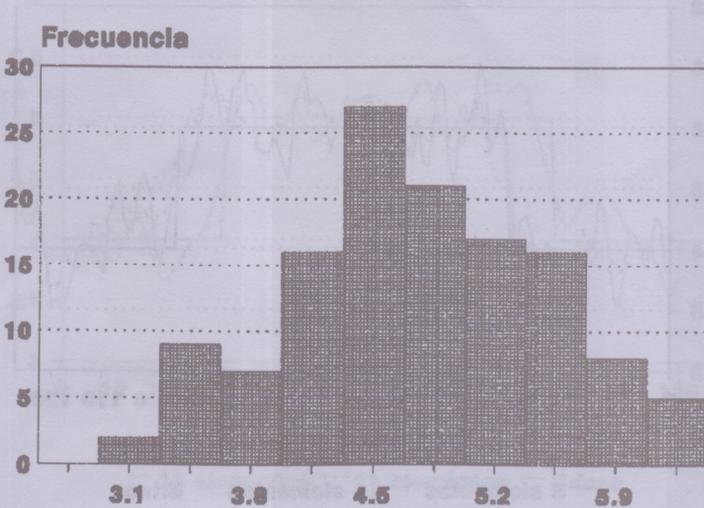


Figura 14. Histograma de la señal de la Figura 11. El ruido hace que esta distribución sea unimodal en lugar de bimodal.

EJEMPLO 1: BRINCO EN NIVEL ESPECTRO

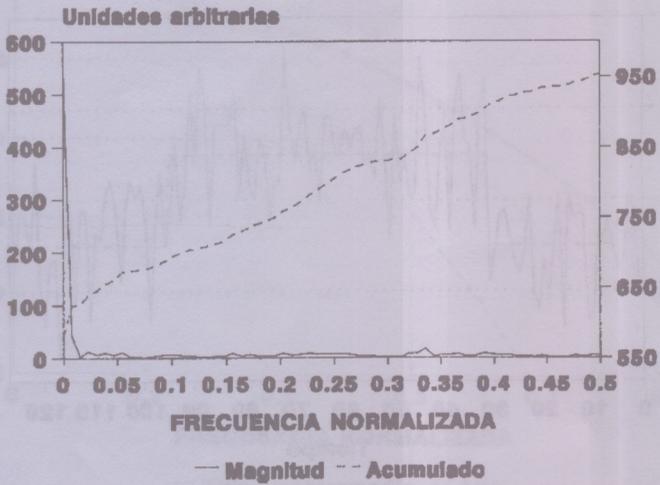


Figura 15. Magnitud del espectro y magnitud acumulada de la señal de la Figura 11. La energía de la señal determinística se encuentra para frecuencias normalizadas menores de 0.07.

EJEMPLO 1: BRINCO EN NIVEL VENTANA RECTANGULAR

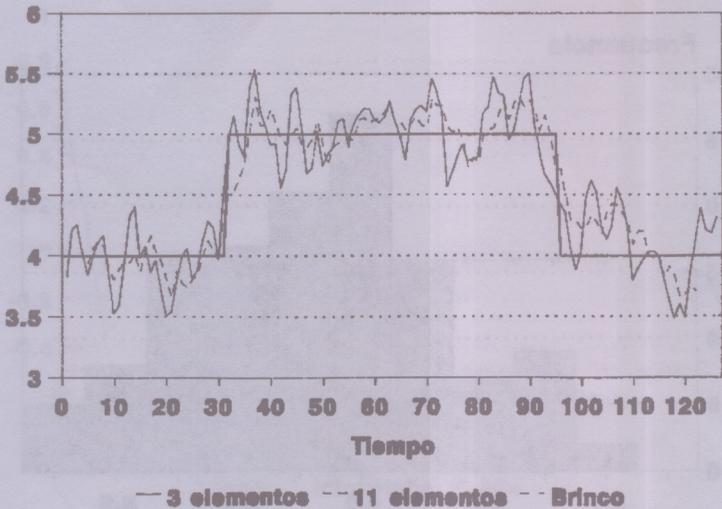


Figura 16. La señal de la Figura 11 suavizada con la ventana rectangular de 3 y 11 elementos.

EJEMPLO 1: BRINCO EN NIVEL VENTANA TRIANGULAR

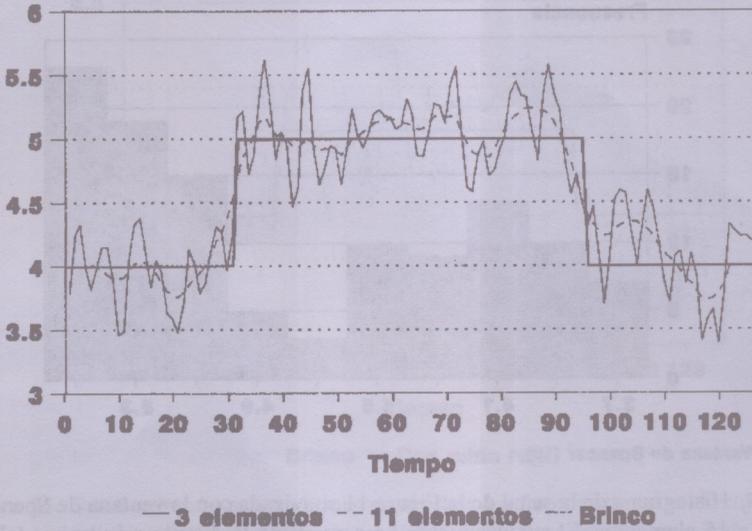


Figura 17. La señal de la Figura 11 suavizada con la ventana triangular de 3 y 11 elementos.

EJEMPLO 1: BRINCO EN NIVEL VENTANA DE SPENCER

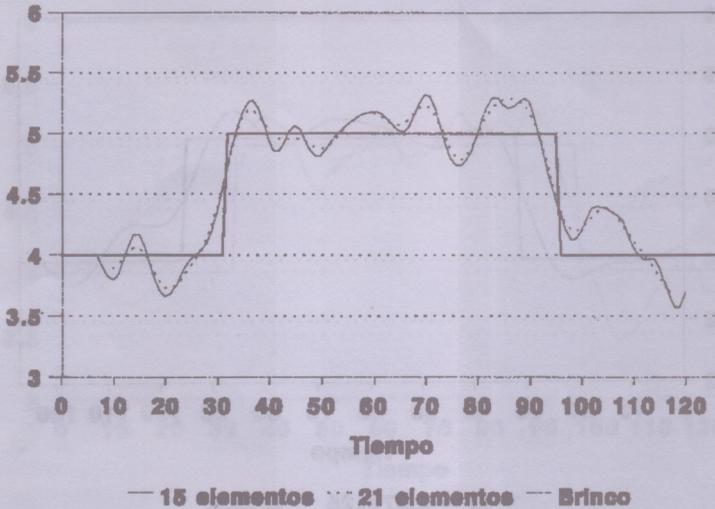


Figura 18. La señal de la Figura 11 suavizada con la ventana de Spencer de 15 y 21 elementos.

EJEMPLO 1: BRINCO EN NIVEL HISTOGRAMA DE DATOS SUAVIZADOS

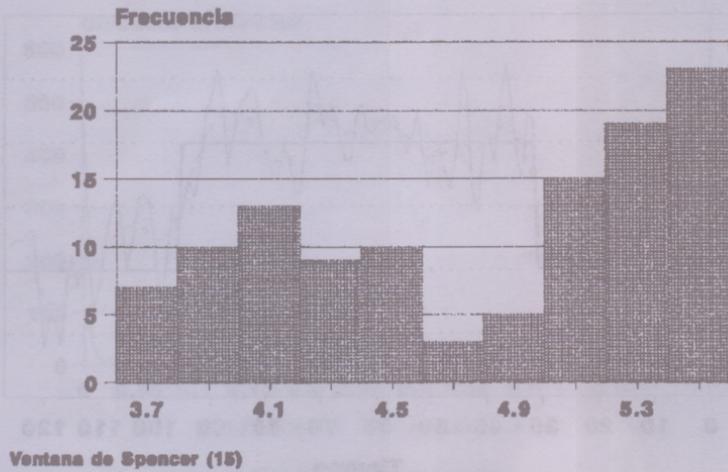


Figura 19. Histograma de la señal de la Figura 11 suavizada con la ventana de Spencer de 15 elementos. El suavizamiento ha convertido la distribución unimodal de la Figura 12 a una distribución bimodal.

EJEMPLO 1: BRINCO EN NIVEL VENTANA PARABOLICA

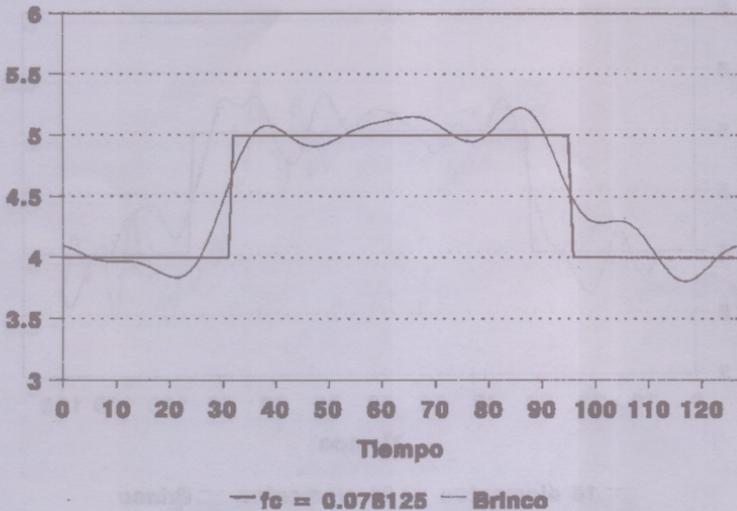


Figura 20. La señal de la Figura 11 suavizada con la ventana espectral parabólica. La frecuencia de corte se ajustó a 0.078125 (E = 10).

EJEMPLO 1: BRINCO EN NIVEL RUIDO ROJO ADITIVO

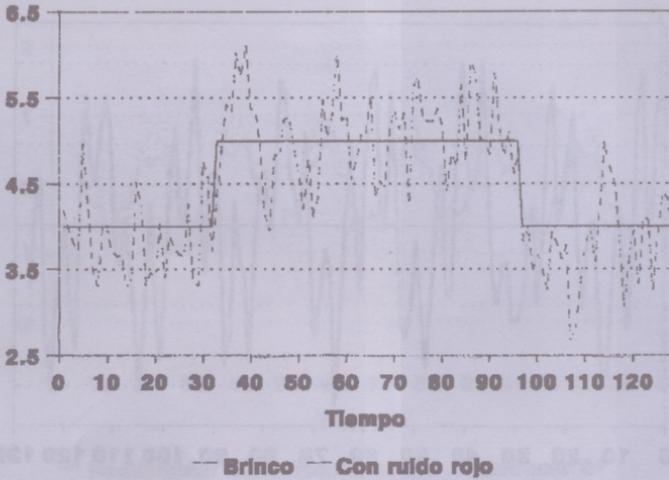


Figura 21. Señal compuesta de un brinco en nivel de 4 a 5 unidades con ruido rojo ($\gamma = 0.5$) aditivo de distribución normal $N(0, 0.5)$. Nótese la persistencia de valores de un mismo signo.

EJEMPLO 1: BRINCO EN NIVEL RUIDO ROJO ADITIVO

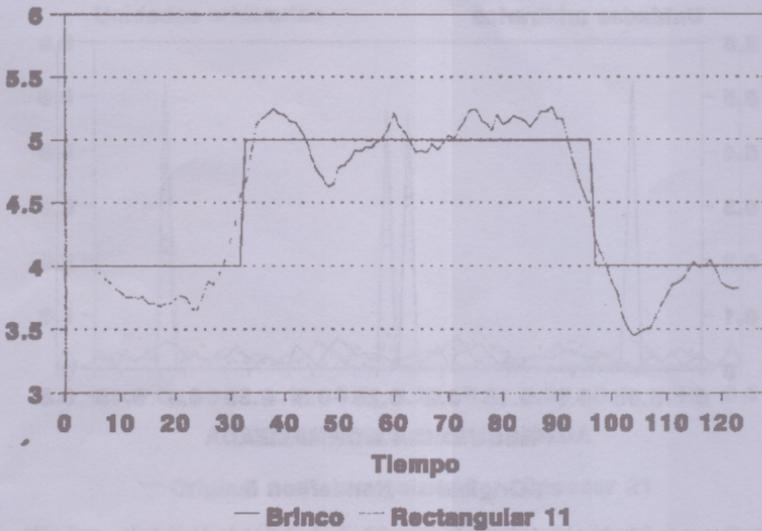


Figura 22. La señal de la Figura 21 suavizada con la ventana rectangular de 11 elementos.

EJEMPLO 2: SINUSOIDE RUIDO ADITIVO

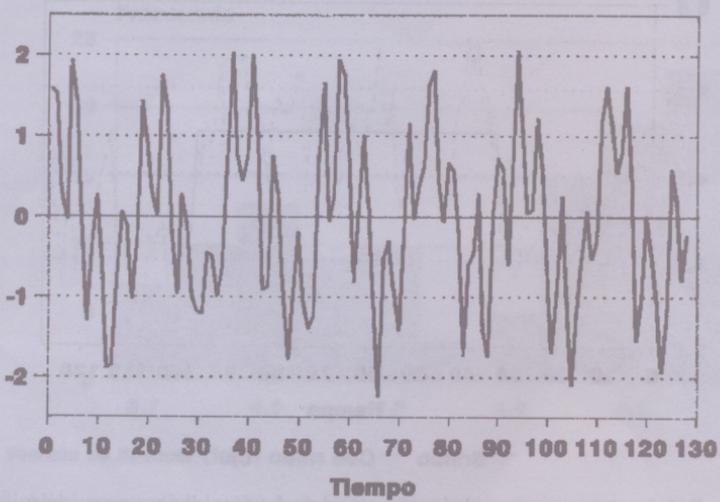


Figura 23. Señal compuesta de dos sinusoides de amplitud unitaria y con ruido blanco aditivo de distribución normal $n(0, 0.3177)$.

EJEMPLO 2: SINUSOIDES ESPECTRO

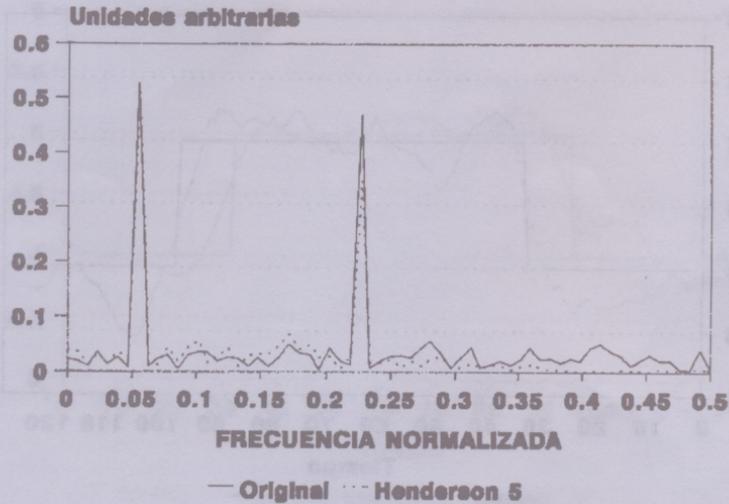


Figura 24. Espectro de la señal de la Figura 23 y espectro de la señal suavizada con una ventana de Henderson de 5 elementos.

EJEMPLO 2: SINUSOIDES SUAVIZADA

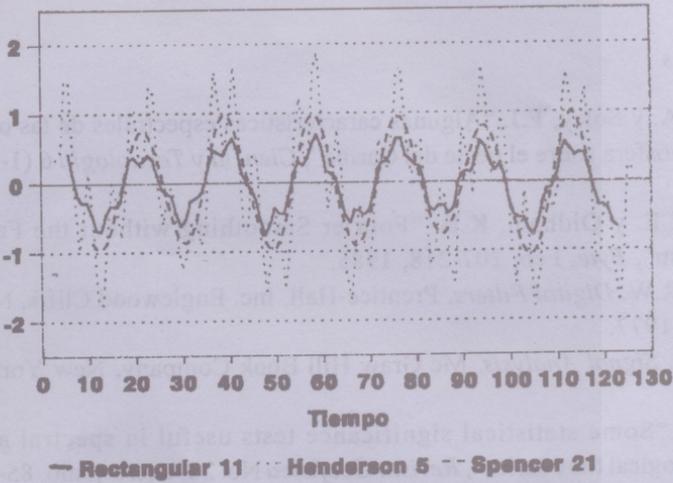


Figura 25. La señal de la Figura 23 suavizada mediante una ventana rectangular de 11 elementos, la ventana de Henderson de 5 elementos y la de Spencer de 21 elementos.

EJEMPLO 2: SINUSOIDES ESPECTRO

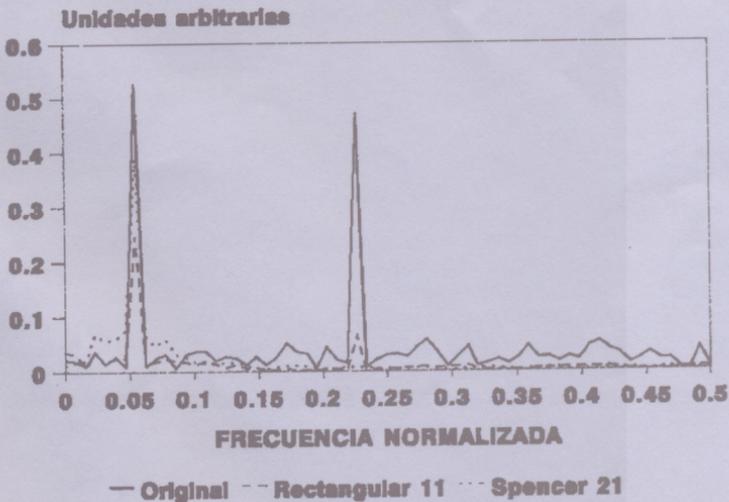


Figura 26. Espectro de la señal de la Figura 23 y espectro de la señal suavizada con una ventana rectangular de 11 elementos y de Spencer de 21 elementos.

Si el ruido de trasfondo es ruido rojo, la reducción en varianza es menor que si fuera ruido blanco. Entre mayor sea el coeficiente de correlación, menor es la reducción en varianza.

Referencias

- Amador, J.A. y Soley, F.J. "Algunas características espectrales de las oscilaciones en la atmósfera sobre el oeste del Caribe", *Ciencia y Tecnología* 6 (1-2), 99-130, 1982.
- Aubanel, E.E. y Oldham, K.B. "Fourier Smoothing without the Fast Fourier Transform", *Byte*, Feb, 207-218, 1985.
- Hamming, R.W. *Digital Filters*, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, New Jersey, 226 pp., 1977.
- Papoulis, A. *Signal Analysis*, Mc Graw Hill Book Company, New York, 431 pp., 1979.
- Soley, F.J. "Some statistical significance tests useful in spectral analysis of meteorological time series", *Revista Geofísica* No. 28, enero-junio, 85-100, 1988.