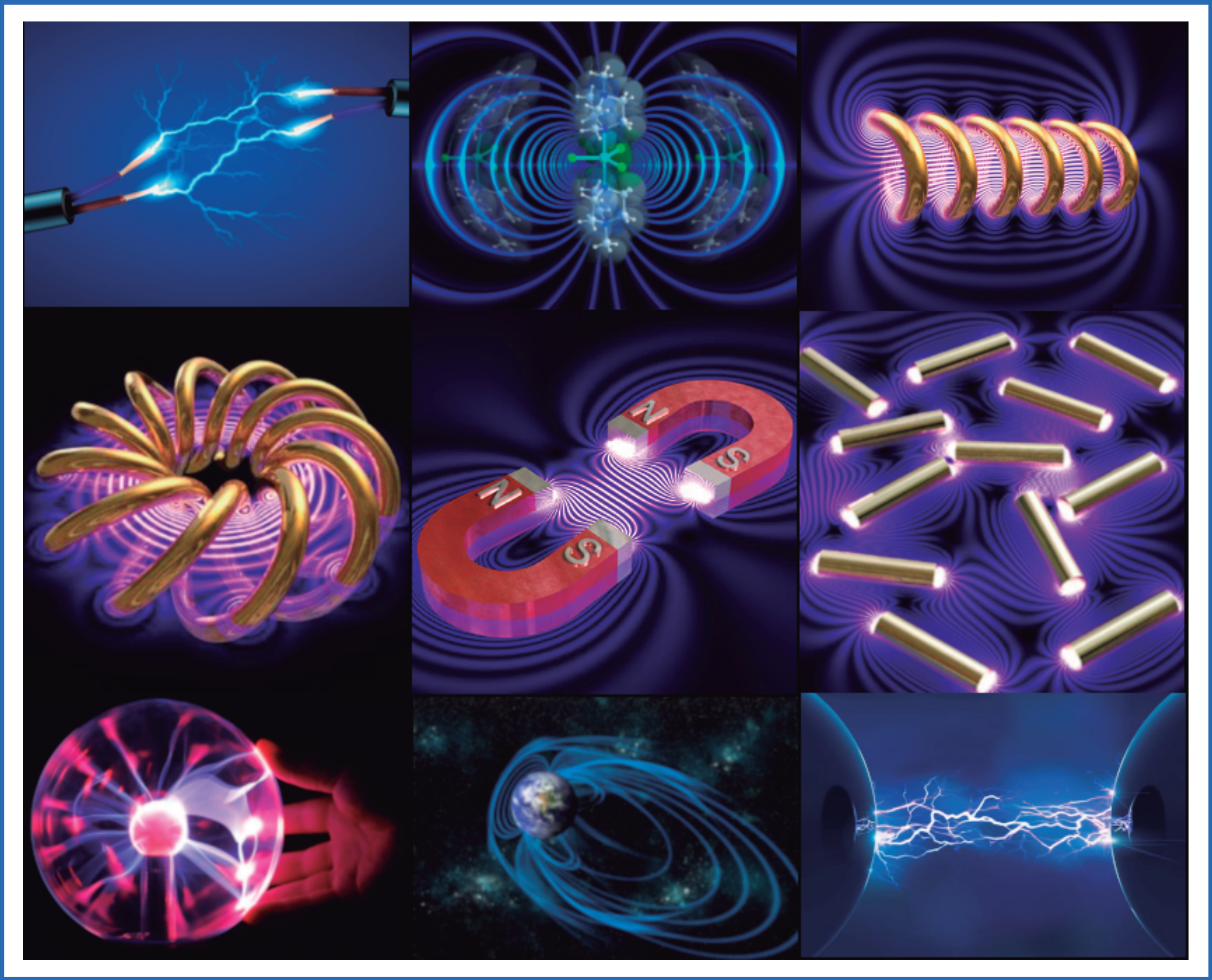


Electricidad y Magnetismo:
Compendio de Exámenes Resueltos

Universidad de Costa Rica
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
11501 San José, Costa Rica
2019

Universidad de Costa Rica

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

FS0427 Física General para Físicos III

"Electricidad y Magnetismo"

Compendio de Exámenes Resueltos

Rodrigo Castillo Rodríguez

Centro de Investigaciones Geofísicas
Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
11501 San José, Costa Rica

2019

Contenidos

Resumen

La Electricidad y el Magnetismo son posiblemente de los tópicos más bonitos de la física, los cuales tienen muchas aplicaciones cotidianas que a menudo pasan desapercibidas. Ejemplo de ello son el encender un bombillo para iluminarnos, llamar por celular o usar una computadora. El estudio de esta rama de la física en el último siglo ha provocado un gran avance tecnológico que ha impulsado el crecimiento del bienestar humano.

El documento aquí presente, nace como una recopilación de los exámenes aplicados durante el tiempo que he sido profesor del curso FS0427 Física General para Físicos III en la Universidad de Costa Rica. La mayoría de los problemas han sido extraídos de evaluaciones de anteriores cursos que impartí, tales como FS0310 Física General II y FS0410 Física General III. Aclaro que gran parte de los problemas presentes no son de mi autoría sino de los profesores con los que he trabajado, notas de internet y de los libros de la bibliografía.

Mi principal objetivo con esta recopilación es entregar un buen material de estudio para las personas que necesiten estudiar o que simplemente quieran aprender. Además, el hecho de reunir el material que confeccioné durante varios semestres en un solo lugar hace que el trabajo sea mucho más útil y duradero para las personas que quieran utilizarlo.

Este compendio posee problemas con su solución completa de manera exhaustiva. No obstante, es recomendado que al momento de usar este documento se den el tiempo de pensar el problema antes de mirar su solución. Un rol activo en la resolución de problemas les traerá muy buenos resultados durante este curso.

Finalmente, quiero agradecer a mis asistentes Carlos Madrigal Araya, Jafet Deliyore Ramírez, Juan Carlos Badilla Rojas y Juan José Bermúdez Vargas que de forma inadvertida contribuyeron a las diferentes correcciones que se hicieron a cada una de las partes de este documento.

1. Exámenes Resueltos

IIC-2017

**“La ciencia es una ecuación diferencial.
La religión es una condición de frontera”**
- Alan Mathison Turing -

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

EFis Escuela de Física

— I Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Modelo Molecular.

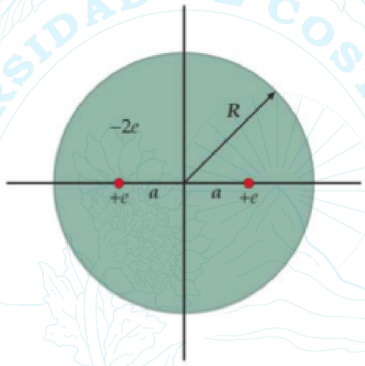
(**25 pts**) **1.** Un modelo simple, pero sorprendentemente preciso de una molécula de hidrógeno es aquel que considera dos cargas puntuales de carga +e colocadas en el interior de una esfera de radio R, que contiene una nube de carga -2e uniformemente distribuida en todo su volumen. Las dos cargas puntuales se colocan simétricamente respecto al centro, como indica la figura. Se pide:

(10 pts) a) Campo eléctrico creado por la nube de carga -2e sobre la carga puntual de la derecha.

(5 pts) b) Fuerza que ejerce la carga puntual de la izquierda sobre la carga puntual de la derecha.

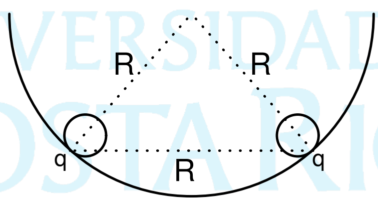
(5 pts) c) Campo eléctrico total sobre la carga de la derecha.

(5 pts) d) Distancia a, a la que las dos cargas puntuales se tienen que situar respecto al centro de la esfera, para que la fuerza neta sobre cualquiera de las dos sea nula.



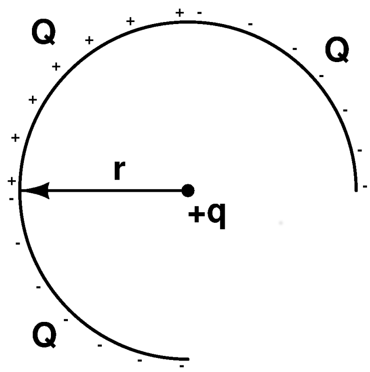
Ley de Coulomb.

(**25 pts**) **2.** Dos bolitas tienen una masa m y carga q. Cuando se ponen en un tazón esférico de radio R con paredes no conductoras y sin fricción, las bolitas se mueven hasta que en la posición de equilibrio están separadas por una distancia R. Determine las cargas de las bolitas.



Campo Eléctrico.

(**25pts**) **3.** Calcule el campo eléctrico sobre la carga +q, que ejerce el alambre de vidrio que tiene distribuidas uniformemente unas cargas -Q en las porciones del círculo del primer y tercer cuadrante, y una carga +Q en el segundo cuadrante como lo muestra la siguiente figura.



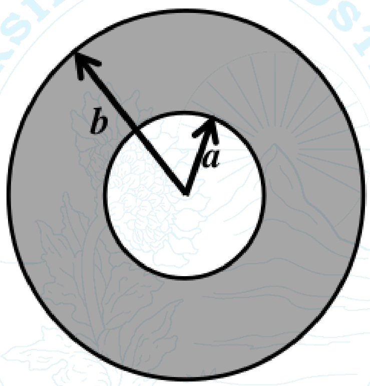
Potencial Eléctrico.

(**25 pts**) **4.** Una cantidad total de carga positiva Q es distribuida en un disco circular plano no conductor de radio b, con un agujero cicular concéntrico de radio a, formándose un anillo superficial plano como se muestra en la figura. La carga se distribuye de modo que la densidad superficial de carga está dada por $\sigma = \frac{\beta}{r^3}$, en donde β es una constante positiva y r es la distancia desde el centro del anillo a cualquier punto sobre él. Determine:

(10 pts) a) El valor de la carga Q en términos de β, a y b.

(5 pts) b) Una expresión para β en términos de Q, a y b.

(10 pts) c) El potencial en el centro del anillo en función de Q, a y b.



— Solución I Examen Parcial —

Modelo Molecular.

(10 pts) a)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E\left(4\pi a^2\right) = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{enc}}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

$$q_{enc} = -2e\frac{\frac{4\pi}{3}a^3}{\frac{4\pi}{3}R^3} = -2e\frac{a^3}{R^3}$$

$$\Rightarrow E = \frac{-2ea^3}{4\pi\epsilon_0 a^2 R^3} = \frac{-ea}{2\pi\epsilon_0 R^3}$$

(5 pts) b)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{(2a)^2} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a^2}$$

(5 pts) c)

$$E_T = E_e + E_\rho$$

$$E_e = \frac{F}{e} = \frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{e}{a^2}$$

$$E_T = \frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{e}{a^2} - \frac{ea}{2\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{e}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{8a^2} - \frac{a}{R^2}\right)$$

(5 pts) d)

$$F_T = F_e + F_\rho = 0$$

$$\frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a^2} - \frac{e^2 a}{2\pi\epsilon_0 R^3} = 0$$

$$\frac{1}{16\pi\epsilon_0}\frac{e^2}{a^2} = \frac{e^2 a}{2\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\frac{R^3}{8} = a^3$$

$$\Rightarrow a = \frac{R}{2}$$

Ley de Coulomb.

La fuerza normal $\vec{N}$ se puede escribir usando sus componentes rectangulares como **(5pts)**:

$$\vec{N} = Ncos\left(\frac{\pi}{3}\right)\hat{\mathbf{i}} + Nsin\left(\frac{\pi}{3}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

La fuerza $\vec{F_e}$ es la ejercida por la bolita de la derecha sobre la bolita de la izquierda y es **(2.5pts)**:

$$\vec{F_e} = \frac{kq^2}{R^2}$$

Ahora sumamos fuerzas por componentes sobre la bolita de la derecha y aplicamos la condición de equilibrio **(5pts)**:

Fuerza en X:

$$\sum F_x = Ncos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{kq^2}{R^2} = 0 \tag{1}$$

Fuerza en Y:

$$\sum F_y = Nsin\left(\frac{\pi}{3}\right) - mg = 0 \tag{2}$$

De (2) vemos que **(2.5pts)**:

$$N = \frac{mg}{sin(\frac{\pi}{3})}$$

Reemplazando esta expresión en (1) tenemos **(5pts)**:

$$\frac{mg}{sin(\frac{\pi}{3})}cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{kq^2}{R^2} = 0$$

Despejando para q **(5pts)**:

$$q = \pm R\sqrt{\frac{mgcot(\frac{\pi}{3})}{k}}$$

Campo Eléctrico.

Como se puede observar las atracciones y repulsiones de cargas situadas en el primer y segundo cuadrante cancelan las contribuciones a la fuerza sobre el eje vertical, mientras que las cargas situadas en el segundo y tercer cuadrante cancelan las contribuciones a la fuerza sobre el eje horizontal. Dejando sólo la contribución de la carga $-Q$ en el primer cuandrante hacia la derecha o sobre el eje x positvo; mientras que la carga $-Q$ en el tercer cuadrante contribuye a la fuerza hacia abajo o sobre el eje y negativo. Por lo tanto calcularemos el aporte de estas 2 contribuciones de la siguiente forma **(5pts)**.
La fuerza estaría dada por:

$$\vec{F} = F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}}$$

Donde el diferencial de carga sobre el alambre daría el siguiente diferencial de fuerza:

$$d\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{qdQ}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Como la carga se distribuye de forma uniforme en cada porción del alambre su densidad puede expresarse de la siguiente forma:

$$\lambda dl = dQ$$

Donde la componente en x se integraría en el primer cuadrante de la siguiente forma **(7.5pts)**:

$$dF_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{qdQ}{r^2}\cos\theta$$

$$F_x = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q\lambda dl}{r^2}\cos\theta$$

Explotando la simetría polar podemos expresar la longitud del alambre en términos de θ de la siguiente manera:

$$dl = rd\theta$$

Sustituyendo obtenemos:

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q\lambda}{r}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q\lambda}{r}(\sin\theta)\mid_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q\lambda}{r}(1-0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q\lambda}{r}$$

Como este tramo de la varilla recorre un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, su densidad de carga se calcula de la siguiente forma:

$$\lambda = \frac{2Q}{r\pi}$$

Finalmente la componente x es:

$$F_x = \frac{1}{2\pi^2\epsilon_o}\frac{qQ}{r^2}$$

Para el cálculo de la componente en y, procedemos de la siguiente manera **(7.5pts)**:

$$dF_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{qdQ}{r^2}\sin\theta$$

$$F_y = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q\lambda dl}{r^2}\sin\theta$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q\lambda}{r}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin\theta d\theta$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q\lambda}{r}(-\cos\theta)\mid_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}$$

$$F_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q\lambda}{r}[0-(-(-1))] = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{q\lambda}{r}$$

Al igual que con la componente en x, el tramo de la varilla recorre un ángulo de $\frac{\pi}{2}$, por lo tanto F_y sería:

$$F_y = -\frac{1}{2\pi^2\epsilon_o}\frac{qQ}{r^2}$$

Finalmente la fuerza que ejerce el alambre sobre la carga $+q$, estaría dada por **(5pts)**:

$$\vec{F} = \frac{1}{2\pi^2\epsilon_o}\frac{qQ}{r^2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2\pi^2\epsilon_o}\frac{qQ}{r^2}\hat{\mathbf{j}}$$

La cual se puede reescribir como:

$$\vec{F} = \frac{1}{2\pi^2\epsilon_o}\frac{qQ}{r^2}\,(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{2\pi^2\epsilon_o}\frac{Q}{r^2}\,(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$$

Potencial Eléctrico.

(10 pts) a)

$$dq = \sigma dA \Rightarrow q = \int_a^b \sigma dA$$

$$Q = \int_a^b \tfrac{\beta}{r^3}\,(2\pi r)\,dr = 2\pi\beta \int_a^b \tfrac{dr}{r^2}$$

$$Q = 2\pi\beta\left(\tfrac{1}{a} - \tfrac{1}{b}\right) = 2\pi\beta\left(\tfrac{b-a}{ab}\right)$$

(5 pts) b)

$$\beta = \frac{Q}{2\pi}\left(\frac{ab}{b-a}\right) \tag{3}$$

(10 pts) c)

$$dV = k\tfrac{dq}{r} \Rightarrow V = k\int_a^b \tfrac{\sigma dA}{r} = k\int_a^b \tfrac{2\pi\beta}{r^3}dr = \tfrac{\beta}{2\epsilon_0}\int_a^b \tfrac{dr}{r^3}$$

$$V = \tfrac{\beta}{4\epsilon_0}\left(\tfrac{1}{a^2} - \tfrac{1}{b^2}\right) = \tfrac{\beta}{4\epsilon_0}\tfrac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2}$$

Sustituyendo (3) en anterior obtenemos:

$$V = \tfrac{1}{4\epsilon_0}\tfrac{Q}{2\pi}\left(\tfrac{ab}{b-a}\right)\tfrac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2} = \tfrac{Q}{8\pi\epsilon_0}\left(\tfrac{b+a}{ab}\right)$$

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— II Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

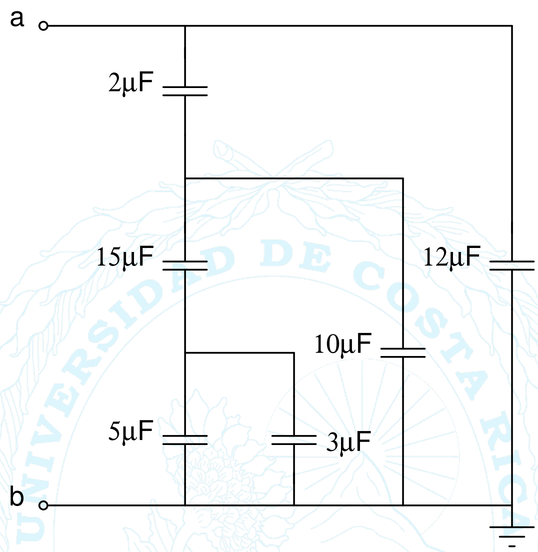
Circuito Capacitivo.

(**25 pts**) **1.** Dada la siguiente red capacitiva, calcule:

(10 pts) a) la capacitancia equivalente vista desde los puntos a y b.

(5 pts) b) si se conecta una fuente de 5V en las terminales a y b, ¿cuánta carga demanda la red?.

(10 pts) c) ¿cuánta energía almacena el capacitor de 2μF?.

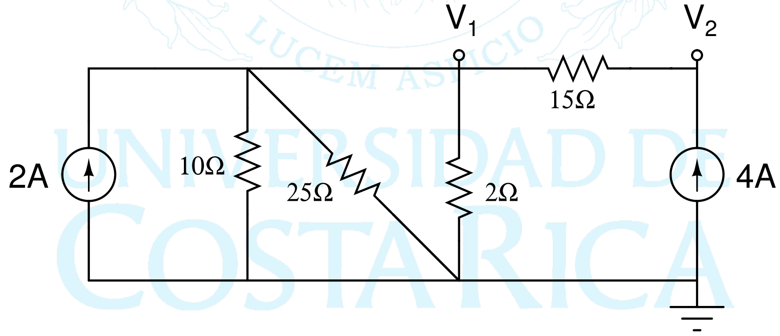


Leyes de Kirchhoff.

(**25 pts**) **2.** Para el siguiente circuito calcule:

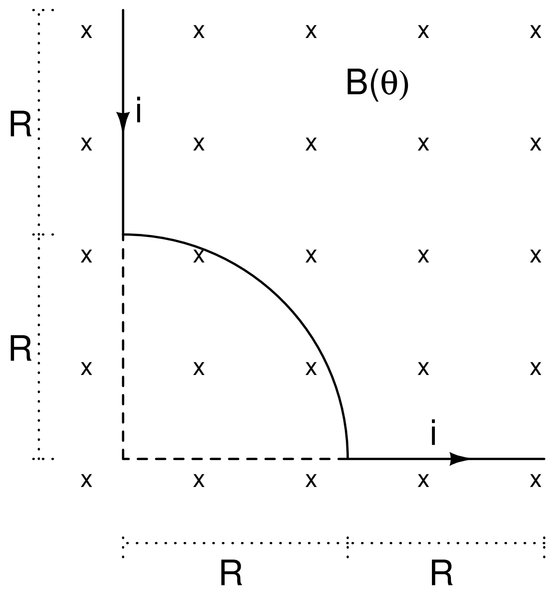
(17.5 pts) a) los voltajes V_1, V_2.

(7.5 pts) b) la potencia que disipa la resistencia de 25Ω.



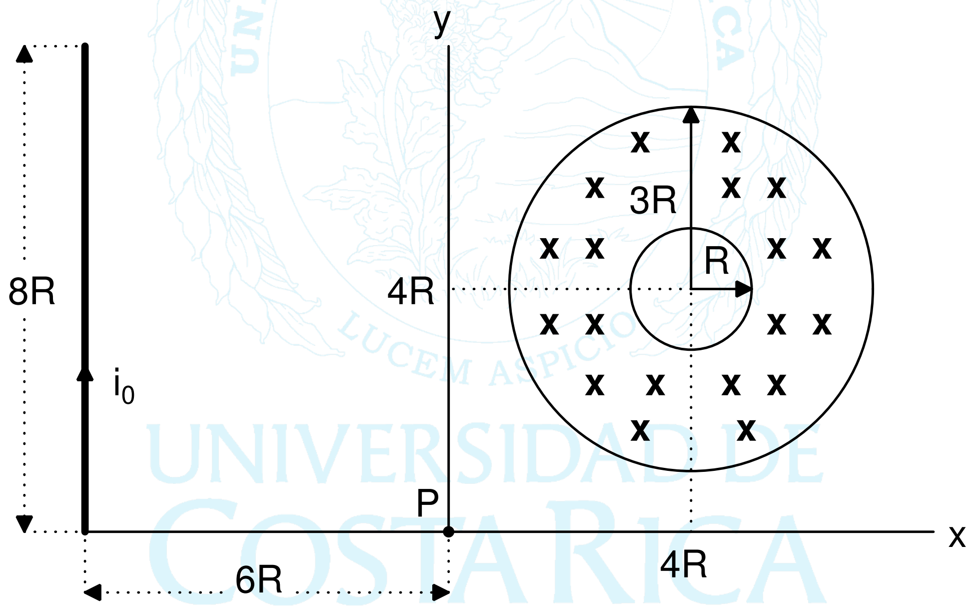
Fuerza Magnética.

(**25 pts**) **3.** En la figura se muestra un alambre conductor que transporta una corriente eléctrica i la cual se desplaza en el sentido indicado. Este alambre está inmerso dentro de un campo magnético no uniforme que entra a la página y tiene una magnitud de $B(\theta) = 2\left(\frac{\theta}{\pi}\right) + 3$, donde θ es el ángulo medido desde el eje x positivo y en sentido contrario a las manecillas del reloj. El cable consta de dos segmentos rectos, de longitud R cada uno, y un arco circular de radio R. Encontrar la fuerza magnética neta sobre el cable.



Campo Magnético de una corriente.

(**25 pts**) **4.** Se tiene un cable que es paralelo al eje y, está a una distancia 6R de este, con longitud finita igual a 8R y lleva una corriente eléctrica constante i_0 en el sentido mostrado. El segundo cable es un cilindro hueco muy largo perpendicular al plano de la página, con radios interno R y externo 3R, su eje central pasa por el punto (4R,4R) del sistema de coordenadas y lleva una corriente eléctrica descrita por la densidad de corriente $\vec{J} = -i_0 \frac{r}{\pi R^3}\hat{\mathbf{k}}$, donde r es la distancia medida desde el centro del cable. Calcular el campo magnético en el punto P (origen del sistema de coordenadas).



— Solución II Examen Parcial —

Circuito Capacitivo.

(10 pts) a)

$$3\mu F + 5\mu F = 8\mu F$$

$$\left(\frac{1}{8\mu F} + \frac{1}{15\mu F}\right)^{-1} = 5{,}217\mu F$$

$$10\mu F + 5{,}217\mu F = 15{,}217\mu F$$

$$\left(\frac{1}{15{,}217\mu F} + \frac{1}{2\mu F}\right)^{-1} = 1{,}767\mu F$$

$$1{,}767\mu F + 12\mu F = 13{,}767\mu F$$

$$\Rightarrow C_{eq} = 13{,}767\mu F$$

(5 pts) b)

$$q_T = C_{eq}\triangle V$$

$$q_T = (13{,}767\mu F)(5V)$$

$$q_T = 68{,}838\mu C$$

(10 pts) c) Divisor de corriente (carga)

$$q_T = q_1 + q_2$$

$$q_2 = (12\mu F)(5V)$$

$$q_2 = 60\mu C$$

$$\Rightarrow q_1 = q_T - q_2$$

$$q_1 = 68{,}838\mu C - 60\mu C$$

$$q_1 = 8{,}838\mu C$$

$$\triangle V_1 = \frac{q_1}{C_1}$$

$$\triangle V_1 = \frac{8{,}838\mu C}{2\mu F}$$

$$\triangle V_1 = 4{,}419V$$

$$U_1 = \frac{1}{2}C_1(\triangle V_1)^2$$

$$U_1 = \frac{1}{2}(2\mu F)(4{,}419V)^2$$

$$U_1 = 19{,}529\mu J$$

Leyes de Kirchhoff.

a.) LCK

$$\sum_n i_n = 0$$

(5 pts) Nodo 1

$$\frac{V_1}{10} + \frac{V_1}{25} + \frac{V_1}{2} + \frac{V_1 - V_2}{15} - 2 = 0$$

$$0{,}707V_1 - 0{,}067V_2 = 2$$

(5 pts) Nodo 2

$$\frac{V_2 - V_1}{15} - 4 = 0$$

$$-0{,}067V_1 + 0{,}067V_2 = 4$$

(5 pts) Reducción Gaussiana

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}707 & -0{,}067 & 2 \\ -0{,}067 & 0{,}067 & 4 \end{array}\right)$$

(2.5 pts)

$$\Rightarrow \begin{array}{l} V_1 = 9{,}375V \\ V_2 = 69{,}345V \end{array}$$

(7.5 pts) b.) Potencia en el resistor

$$P_R = \frac{(\Delta V)^2}{R}$$

$$P_R = \frac{(9{,}375V)^2}{25\Omega}$$

$$P_R = 3{,}516Watts$$

Fuerza Magnética.

La fuerza magnética debida a los alambres rectos se expresan de la siguiente forma:
Alambre vertical **(2.5 pts)**

$$\vec{F_1} = iRB\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\frac{\pi}{2})\mathbf{\hat{i}}$$

$$B\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\pi}\right) + 3 = 4$$

$$\vec{F_1} = 4iR\mathbf{\hat{i}}$$

Alambre horizontal **(2.5 pts)**

$$\vec{F_2} = iRB\,(0)\sin(\frac{\pi}{2})\mathbf{\hat{j}}$$

$$B(0) = 2\left(\frac{0}{\pi}\right) + 3 = 3$$

$$\vec{F}_2 = 3iR\hat{\mathbf{j}}$$

La fuerza magnética debida al arco de alambre circular está dada por:

$$d\vec{F} = dF_x\hat{\mathbf{i}} + dF_y\hat{\mathbf{j}}$$

donde las componentes rectangulares estarían dadas por **(2.5 pts)**:

$$dF_x = dF\cos\theta$$

$$dF_y = dF\sin\theta$$

Calculo de las componentes, donde $dl = Rd\theta$
Componente X **(7.5 pts)**:

$$dF_x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} iR\left(2\left(\frac{\theta}{\pi}\right) + 3\right)\cos\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)d\theta$$

$$dF_x = iR\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos\theta d\theta + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\right]$$

$$dF_x = iR\left[\frac{2}{\pi}\left(\theta\sin\theta\,|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\right) + 3\sin\theta\,|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$dF_x = iR\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} + \cos\theta\,|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) + 3\right]$$

$$dF_x = iR\left[\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + 3\right]$$

$$dF_x = iR\left[1 - \frac{2}{\pi} + 3\right] = iR\left(4 - \frac{2}{\pi}\right)$$

Componente Y **(7.5 pts)**:

$$dF_y = \int_0^{\frac{\pi}{2}} iR\left(2\left(\frac{\theta}{\pi}\right) + 3\right)\sin\theta\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)d\theta$$

$$dF_y = iR\left[\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin\theta d\theta + 3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\right]$$

$$dF_y = iR\left[\frac{2}{\pi}\left(-\theta\cos\theta\,|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\right) - 3\cos\theta\,|_0^{\frac{\pi}{2}}\right]$$

$$dF_y = iR\left[\frac{2}{\pi}\left(\sin\theta\,|_0^{\frac{\pi}{2}}\right) + 3\right]$$

$$dF_y = iR\left(\frac{2}{\pi} + 3\right)$$

La fuerza neta sobre el alambre completo es la siguiente **(2.5 pts)**:

$$\vec{F}_N = 4iR\hat{\mathbf{i}} + iR\left(4 - \frac{2}{\pi}\right)\hat{\mathbf{i}} + iR\left(\frac{2}{\pi} + 3\right)\hat{\mathbf{j}} + 3iR\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{F}_N = iR\left[\left(8 - \frac{2}{\pi}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(6 + \frac{2}{\pi}\right)\hat{\mathbf{j}}\right]$$

Campo Magnético de una corriente.

Para un alambre recto de longitud finita sabemos que la magnitud del campo magnético está dado por **(10 pts)**:

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi r}\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)$$

donde

$$\cos\theta_1 = \cos 90^\circ = 0$$

$$\cos\theta_2 = \frac{8R}{\sqrt{(8R)^2+(6R)^2}} = \frac{8}{\sqrt{100}} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$$

La distancia r al punto P está dado por:

$$r = 6R$$

Por lo tanto

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi(6R)}\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{\mu_0 i}{30\pi R}$$

Y con su dirección sería

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 i}{30\pi R}\hat{\mathbf{k}}$$

Para el cilindro hueco utilizamos la Ley de Ampère **(10 pts)**

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

Sabiendo que

$$i = \int \vec{J}\cdot d\vec{A}$$

Tenemos

$$\oint B dl \cos 0^\circ = \mu_0 \int \vec{J}\cdot d\vec{A}$$

$$B\oint dl = \mu_0 \int i_o \frac{r}{\pi R^3} dA \cos 0^\circ$$

$$B 2\pi r = \mu_0 i_o \int_R^{3R} \frac{r}{\pi R^3} 2\pi r dr$$

$$B 2\pi r = \frac{\mu_0 i_o 2\pi}{\pi R^3}\int_R^{3R} r^2 dr$$

$$Br = \frac{\mu_0 i_o}{\pi R^3}\frac{27R^3 - R^3}{3}$$

$$Br = \frac{26\mu_0 i_o}{3\pi}$$

La distancia r al punto P está dada por:

$$r = \sqrt{(4R)^2 + (4R)^2} = 4\sqrt{2}R$$

Por lo que la magnitud del campo magnético estaría dada por:

$$B 4\sqrt{2}R = \frac{26\mu_0 i_o}{3\pi}$$

$$B = \frac{13\mu_0 i_o}{6\sqrt{2}\pi R}$$

Y con su dirección sería **(2.5 pts)**

$$\vec{B} = \frac{13\mu_0 i_o}{6\sqrt{2}\pi R}\left(-\cos 45°\hat{\mathbf{i}} + \sin 45°\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\vec{B} = \frac{13\mu_0 i_o}{6\sqrt{2}\pi R}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\vec{B} = \frac{13\mu_0 i_o}{12\pi R}\left(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right)$$

Finalmente el campo magnético neto es la suma vectorial de los dos cables **(2.5 pts)**:

$$\vec{B}_P = \frac{13\mu_0 i_o}{12\pi R}\left(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}\right) - \frac{\mu_0 i}{30\pi R}\hat{\mathbf{k}}$$

$$\vec{B}_P = \frac{\mu_0 i_o}{6\pi R}\left(-\frac{13}{2}\hat{\mathbf{i}} + \frac{13}{2}\hat{\mathbf{j}} - \frac{1}{5}\hat{\mathbf{k}}\right)$$

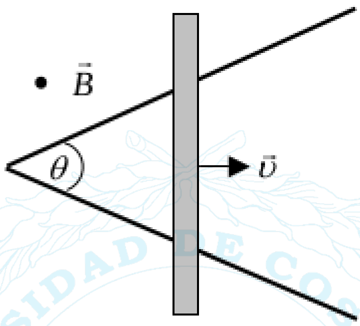
Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— III Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Inducción Eléctrica.

(**25 pts**) **1.** Dos rieles conductores forman un ángulo θ en donde se unen sus extremos. Una barra conductora en contacto con los rieles y formando un triángulo isósceles con ellos empieza a moverse en el vértice en el instante $t = 0$, y se mueve con velocidad constante $\vec{v}$ hacia la derecha, como se muestra en la figura. Un campo magnético uniforme $\vec{B}$ apunta hacia fuera de la página. Determine el flujo magnético y la fem inducida.



Inducción Magnética.

(**25 pts**) **2.** Un condensador cuyas placas circulares tienen un área de 0.5 m^2 se carga de manera que fluye por él una corriente de 10 A.
(2.5 pts) a) ¿Cuál es la corriente de desplazamiento entre las placas?.
(7.5 pts) b) Calcule la variación de la intensidad del campo eléctrico por unidad de tiempo entre las placas para esta corriente.
(15 pts) c) Calcule la circulación del campo magnético a lo largo de las circunferencias de 10 cm y 50 cm de radio que son paralela a las placas y está situada entre ellas.

Magnetización.

(**25 pts**) **3.** Un campo magnético de 0.2 μT se aplica a un material con una permeabilidad magnética de 5000. Calcular:
(10 pts) a) La magnetización.
(7.5 pts) b) El campo magnético de magnetización.
(7.5 pts) c) El campo magnético neto del sistema.

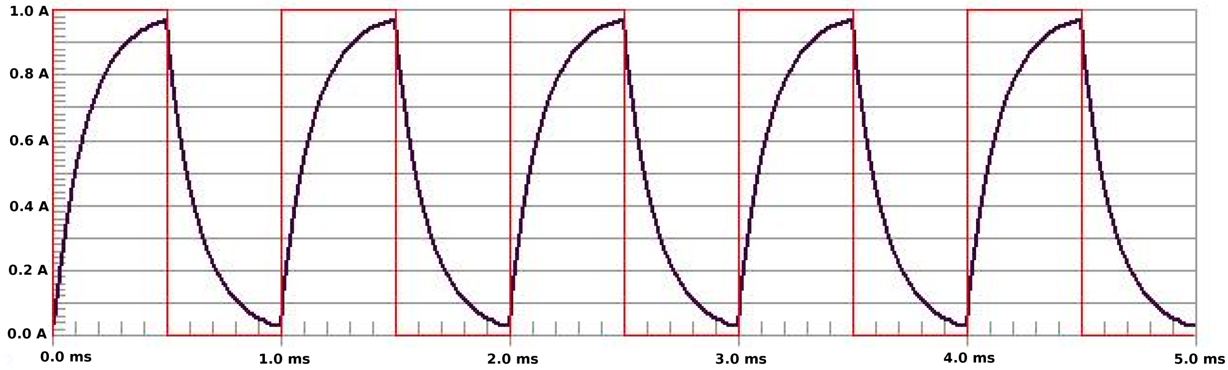
Circuito RL.

(**25 pts**) **4.** Dada la siguiente respuesta de un circuito RL serie conectado a un generador de funciones con una señal cuadrada, calcule:

(10 pts) a) si la resistencia tiene un valor de 1kΩ, ¿cuál es el valor de la inductancia?.

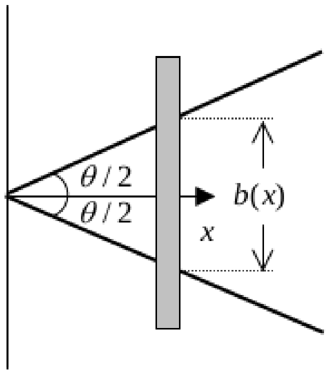
(10 pts) b) escriba las expresiones de la corriente en función del tiempo del inductor cuando se está cargando y cuando se está descargando.

(5 pts) c) ¿cuál es el valor de la corriente en el inductor en t=1.2ms?.



— Solución III Examen Parcial —

Inducción Eléctrica.



Según Faraday-Lenz la fem está dada por:

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Donde el flujo magnético es: (12.5pts)

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

como el campo es paralelo con el vector área y $\vec{B}$ es constante, se tiene:

$$\Phi_B = BA(x)$$

de la figura se tiene que $A(x) = \frac{1}{2}bx$, reemplazando en el flujo se obtiene:

$$\Phi_B = \frac{1}{2}Bbx$$

de la figura se encuentra que

$$tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{b/2}{x}$$

$$\Rightarrow b(x) = 2xtan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

luego el flujo se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\Phi_B = Bx^2tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Cabe destacar que este flujo es variante en el tiempo por la variación de la componente x, por lo tanto

$$\Phi_B(t) = B(x(t))^2\, tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Finalmete reemplazando en la ecuación de Faraday-Lenz (12.5pts)

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{d}{dt}\left(B\left(x\left(t\right)\right)^2 tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$\varepsilon = -B2x\frac{dx}{dt}tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

con $v = \frac{dx}{dt}$

$$\varepsilon = -2Bxvtan\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Inducción Magnética.

La corriente de desplazamiento a través del espacio entre las placas es igual a la corriente en los cables que entran y salen del condensador (2.5pts)

$$i_d = i_c = 10A$$

Utilizando la ley de Gauss eléctrica sobre una de las placas tenemos (7.5pts)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{A\epsilon_0}$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{Q}{A\epsilon_0}\right) = \frac{1}{A\epsilon_0}\frac{dQ}{dt}$$

Evaluando

$$\frac{dE}{dt} = \frac{10}{0{,}5 \cdot 8{,}85 \times 10^{-12}} = 2{,}26 \times 10^{12}\frac{V}{m \cdot s}$$

Primero averiguamos el radio que tienen las placas del condensador (2.5pts)

$$A = \pi R^2$$

$$\Rightarrow R = \sqrt{\frac{A}{\pi}} = \sqrt{\frac{0{,}5}{3{,}14}} = 40cm$$

La circulación estaría dada por la ley de Ampere generalizada por Maxwell (2.5pts)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_d$$

Caso $r < R$ (5pts)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0\epsilon_0\frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0\epsilon_0\frac{d}{dt}\left(E\pi r^2\right) = \mu_0\epsilon_0\pi r^2\frac{dE}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 4\pi \times 10^{-7} \cdot 8{,}85 \times 10^{-12} \cdot 3{,}14 \cdot (0{,}1)^2 \cdot 2{,}26 \times 10^{12}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 7{,}8 \times 10^{-7} T \cdot m$$

Caso $r > R$ (5pts)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_d = 4\pi \times 10^{-7} \cdot 10$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 12{,}56 \times 10^{-6} T \cdot m$$

Magnetización.

La magnetización se puede obtener utilizando la siguiente ecuación:(10 pts)

$$\mu_0 \vec{M} = (k_m - 1)\,\vec{B}_0$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{(k_m-1)\vec{B}_0}{\mu_0} = \frac{(5000-1)\cdot 0{,}2\times 10^{-6}}{4\pi\times 10^{-7}} = 796{,}02\frac{A\cdot vuelta}{m}$$

El campo magnético de magnetización se obtiene de la siguiente forma: (7.5 pts)

$$\vec{B}_m = \mu_0 \vec{M} = (k_m - 1)\,\vec{B}_0 = (5000-1)\cdot 0{,}2\times 10^{-6} = 999{,}8\mu T$$

El campo magnético neto del sistema está dado por: (7.5 pts)

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_m = 0{,}2\times 10^{-6} + 999{,}8\times 10^{-6} = 1000\mu T$$

Circuito RL.

Conociendo que el inductor dura 5τ en cargarse y 5τ en descargarse tenemos: (10 pts)

$$5\tau = 5\frac{L}{R} = 0{,}5ms$$

$$\Rightarrow L = \frac{(0{,}5ms)R}{5}$$

$$L = \frac{(0{,}5ms)(1k\Omega)}{5}$$

$$L = 0{,}1H$$

Ecuación de carga (5 pts)

$$i\,(t) = i_o\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$i\,(t) = 1 - e^{-1\times 10^4 t}$$

Ecuación de descarga (5 pts)

$$i\,(t) = i_o e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$i\,(t) = e^{-1\times 10^4 t}$$

En $t = 1{,}2ms$ el inductor se está cargando y llevaría $0{,}2ms$ de carga, por lo tanto (5 pts)

$$i\,(0{,}2ms) = 1 - e^{-1\times 10^4 (0{,}2ms)}$$

$$i\,(0{,}2ms) = 0{,}865A$$

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— IV Examen Parcial —

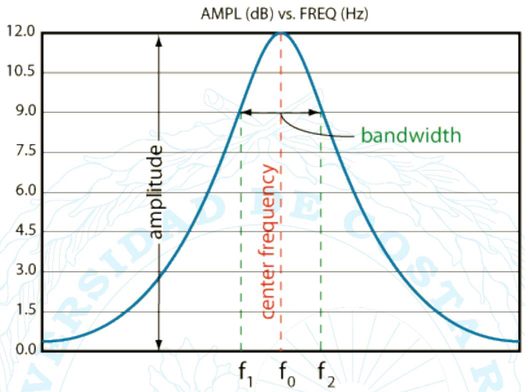
Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Oscilador Electromagnético.

(**25 pts**) **1.** El factor de calidad Q de un oscilador mide cómo de agudo es el pico de una resonancia, el cual se define como:

$$Q \simeq \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

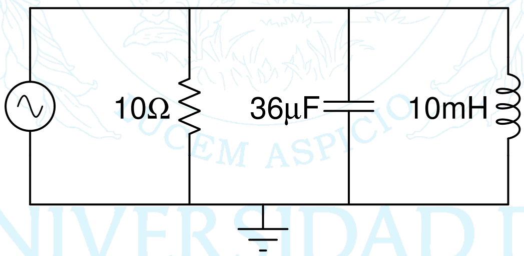
Para un oscilador paso banda la respuesta en frecuencia tiene la forma que se muestra acontinuación:



donde las frecuencias de corte para un circuito RLC paralelo están dadas por:

$$\omega_{1,2} = \pm\frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

Para el circuito que se muestra acontinuación calcule:



(15 pts) a) El factor de calidad Q.

(10 pts) b) Muestre que la frecuencia de resonancia f_0 puede calcularse de la siguiente forma:

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$$

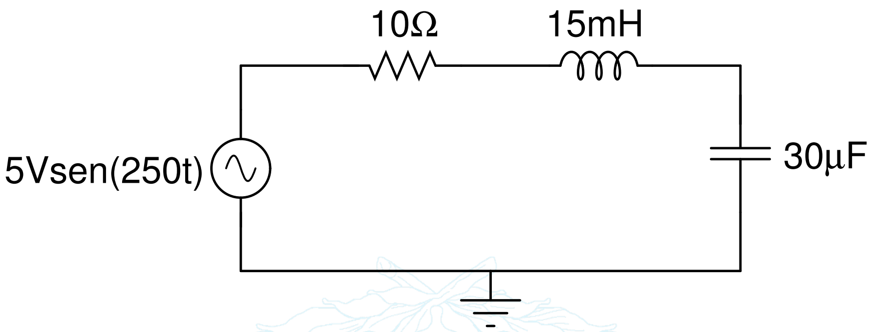
Señal de Corriente Alterna.

(**20 pts**) **2.** Demuestre que para una señal de corriente alterna, su aprovechable en corriente directa es el 70 % del valor máximo de la misma. El equivalente matemático se expresa de la siguiente manera:

$$I_{RMS} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Circuito RLC en Estado Forzado.

(**30 pts**) **3.** Dado el siguiente circuito RLC calcule:
(7.5 pts) a) La corriente en el dominio del tiempo.
(7.5 pts) b) En un mismo diagrama fasorial represente la resistencia, la impedancia capacitiva, la impedancia inductiva y la impedancia total del circuito.
(5 pts) c) Calcule la potencia promedio que disipa el circuito.
(5 pts) d) Calcule la potencia máxima que disipa la resistencia.
(5 pts) e) Calcule la longitud de ondas electromagnéticas que se pueden capturar utilizando este circuito.



Ondas Electromagnéticas.

(**25 pts**) **4.** El campo magnético de una onda electromagnética que se propaga por el aire viene dado por:

$$\vec{B} = 10^{-7} T \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} x - 10^{15} t\right) \hat{\jmath}$$

Determine:
(5 pts) a) El sentido de propagación de la onda.
(5 pts) b) Su longitud de onda.
(5 pts) c) La expresión del campo eléctrico correspondiente.
(5 pts) d) La energía por unidad de tiempo y unidad de área que transporta.
(5 pts) e) La energía que transporta a través de una superficie de 3 m^2 durante dos horas.

— Solución IV Examen Parcial —

Oscilación Electromagnética.

Primero encontramos los valores de las frecuencias angulares de corte. (7.5 pts)

$$\omega_1 = -\frac{1}{2\cdot 10\cdot 36\times 10^{-6}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\cdot 10\cdot 36\times 10^{-6}}\right)^2 + \frac{1}{10\times 10^{-3}\cdot 36\times 10^{-6}}} = 780{,}625\,\frac{rad}{s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2\cdot 10\cdot 36\times 10^{-6}} + \sqrt{\left(\frac{1}{2\cdot 10\cdot 36\times 10^{-6}}\right)^2 + \frac{1}{10\times 10^{-3}\cdot 36\times 10^{-6}}} = 3{,}558\times 10^3\,\frac{rad}{s}$$

Seguidamente encontramos el valor de la frecuencia angular de resonancia. (2.5 pts)

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{10\times 10^{-3}\cdot 36\times 10^{-6}}} = 1{,}667\times 10^3\,\frac{rad}{s}$$

Ahora podemos calcular el valor del factor de calidad, de la siguiente manera: (5 pts)

$$Q \simeq \frac{\omega_0}{\Delta\omega} \simeq \frac{1{,}667\times 10^3}{3{,}558\times 10^3 - 780{,}625} \simeq 0{,}600$$

Para mostrar la igualdad tenemos que calcular las frecuencias de corte. (5 pts)

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 124{,}240 Hz$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 566{,}337 Hz$$

Calculamos la frecuencia de resonancia. (2.5 pts)

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 265{,}263 Hz$$

Evaluamos en la identidad y encontramos. (2.5 pts)

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{124{,}240\cdot 566{,}337} = 265{,}260 Hz$$

$$\therefore 265{,}263 Hz \simeq 265{,}260 Hz$$

Señal de Corriente Alterna.

El valor RMS de una señal está dado por: (5 pts)

$$X_{RMS} = \sqrt{\langle X^2\rangle}$$

Si tomamos una señal de corriente alterna de la forma:

$$I(t) = I_m \sin(\omega t + \phi)$$

Su valor RMS estaría dado por:

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{T}\int (I(t))^2 \, dt}$$

Por lo tanto (5 pts)

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_m^2 \sin^2(\omega t + \phi) \, dt}$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$$

Tenemos (10 pts)

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} I_m^2 \left(\frac{1-\cos[2(\omega t+\phi)]}{2}\right) dt}$$

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{I_m^2}{4\pi}\left(\int_0^{2\pi} dt - \int_0^{2\pi} \cos\left[2(\omega t + \phi)\right] dt\right)}$$

$$I_{RMS} = \sqrt{\frac{I_m^2}{4\pi}(2\pi - 0)} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore I_{RMS} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

Circuito RLC en Estado Forzado.

Utilizando las leyes voltajes de Kirchhoff (LVK) tenemos: (7.5 pts)

$$\sum V_k = 0$$

$$iR + iZ_L + iZ_C = V$$

$$i(R + Z_L + Z_C) = V$$

$$i = \frac{V}{R+Z_L+Z_C}$$

$$i = \frac{V}{R+j\omega L-\frac{j}{\omega C}} = \frac{V}{R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$$

$$i = \frac{5}{10+j(3{,}75-133{,}33)}$$

$$i = \frac{5}{10-129{,}583j} \cdot \frac{10+129{,}583j}{10+129{,}583j}$$

$$i = \frac{50+647{,}920j}{16892} = 0{,}003 + 0{,}038j$$

$$I_m = \sqrt{(0{,}003)^2 + (0{,}038)^2} = 0{,}038 = 38mA$$

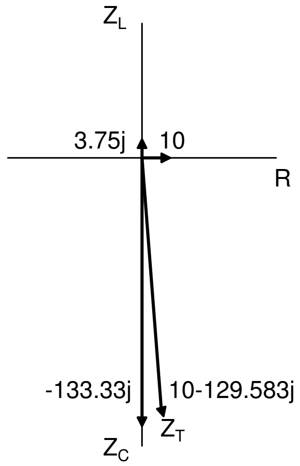
$$\phi = \arctan\left(\frac{0{,}038}{0{,}003}\right) = 1{,}4928$$

$$\Rightarrow i(t) = 38mA \sin(250t + 1{,}4928)$$

La impedancia total del circuito estaría dado por: (2.5 pts)

$$Z_T = \frac{V}{i} = 10 + j(3{,}75 - 133{,}33) = 10 - 129{,}583j$$

Su representación en un diagrama fasorial es la siguiente: (5 pts)



La potencia promedio que disipa el circuito está dada por: (5 pts)

$$\langle P \rangle = \frac{I_m V_m}{2} \cos(\phi) = \frac{(38\times10^{-3})(5)}{2} \cos(1{,}4928 - 0) = 7{,}4mW$$

La potencia máxima que disipa la resistencia está dada por: (5 pts)

$$P_{max} = (I_m)^2 R = \left(38 \times 10^{-3}\right)^2 (10) = 14mW$$

La longitud de ondas electromagnéticas que se pueden capturar utilizando el circuito es: (5 pts)

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$\Rightarrow \lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 2\pi\left(3 \times 10^8\right)\sqrt{(15 \times 10^{-3})(30 \times 10^{-6})} = 1{,}2645 \times 10^6 m$$

Ondas Electromagnéticas.

La onda se propaga en el sentido +X. (5 pts)

La longitud de onda está dada por: (5 pts)

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3\times10^8 \cdot 2\pi}{10^{15}} = 1{,}88 \times 10^{-6} m$$

El campo eléctrico asociado al campo magnético dado es: (5 pts)

$$\vec{E} = B_0 c \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - 10^{15}t\right)\left(-\hat{\mathbf{k}}\right)$$

$$\vec{E} = -30\frac{V}{m}\sin\left(3{,}33 \times 10^6 x - 10^{15}t\right)\hat{\mathbf{k}}$$

La energía que transporta la onda por unidad de tiempo y de área es: (5 pts)

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2\mu_0 c}E_m^2 = \frac{1}{2(4\pi\times10^{-7})(3\times10^8)}(30)^2 = 1{,}1937\frac{W}{m^2}$$

La energía transportada después de 2 horas a través de 3 m^2 es: (5 pts)

$$E = \langle S \rangle tA = 1{,}1937 \cdot 2 \cdot 3600 \cdot 3 = 25784J$$

2. Exámenes Resueltos

IC-2018

“La Tierra es un conductor de resonancia acústica”
- Nikola Tesla -

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— I Examen Parcial —

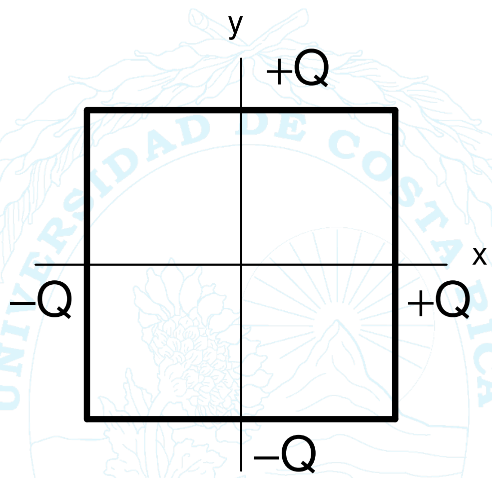
Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Ley de Coulomb.

(**25 pts**) **1.** Dos esferas conductoras idénticas, con cargas de signo opuesto, se atraen entre sí con una fuerza de 0.108 N cuando las separa una distancia de 50.0 cm. De repente las conecta un alambre conductor delgado el cual distribuye la carga por igual entre ellas; luego se quita quedando estas a la misma distancia y después de eso las esferas se repelen con una fuerza de 0.0360 N. ¿Cuál era la carga inicial de cada esfera?

Campo Eléctrico.

(**25 pts**) **2.** Una espira cuadrada como la que se muestra en la figura mide L de lado. Encuentre el campo eléctrico en el centro de la espira.



Ley de Gauss

(**25pts**) **3.** Una carga positiva se distribuye uniformemente a través de un cascarón cilíndrico largo no conductor de radio interno R y de radio externo 2R. ¿A qué profundidad radial debajo de la superficie externa de la distribución de carga será la intensidad del campo eléctrico la mitad del valor superficial?

Potencial Eléctrico.

(**10 pts**) **4.** Dada una función potencial, definida como

$$V(x, y, z) = 3x^2y^2 + zy^2 + z + 2$$

(5 pts) a.) Encuentre una expresión para el campo eléctrico.
(5 pts) b.) Evalúe el campo eléctrico en el punto P(0,0,0).

Teórico-Experimental

(**25 pts**) **5.** Se tiene un disco cargado de radio R, el cual tiene una variación de campo eléctrico dado por la siguiente expresión:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

Además de manera experimental se tomaron los siguientes valores de campo a diferentes alturas sobre su eje de simetría, como lo muestra la siguiente tabla:

z [**cm**]	**E** [10^7 **N/C**]
0	2,043
1	1,732
2	1,442
3	1,187
4	0,972
5	0,797

Calcule:
(10 pts) a) El radio del disco.
(5 pts) b) La carga en él.
(10 pts) c) La altura sobre el eje del disco a la cual es la magnitud del campo eléctrico igual a la mitad del valor del campo en el centro de la superficie del disco.

— Solución I Examen Parcial —

Ley de Coulomb.

Usando la magnitud de la Fuerza de Coulomb

$$F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

con

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} = 8{,}99 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Antes de colocar la varilla (5 pts)

$$F_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}$$

$$-0{,}108 = \frac{8{,}99 \times 10^9 q_1 q_2}{\left(50 \times 10^{-2}\right)^2} \tag{1}$$

Después de colocar la varilla y quitarla (10 pts)

$$F_{12} = k\frac{\frac{1}{2}(q_1+q_2)\frac{1}{2}(q_1+q_2)}{r_{12}^2}$$

con

$$q = q_1 + q_2$$

$$0{,}0360 = \frac{8{,}99 \times 10^9 q^2}{4\left(50 \times 10^{-2}\right)^2} \tag{2}$$

$$\Rightarrow q = 2 \times 10^{-6} C$$

Ahora (2.5 pts)

$$q_1 + q_2 = 2 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow q_1 = 2 \times 10^{-6} - q_2$$

Sustituyendo q_1 en (1) (2.5pts)

$$-0{,}108 = \frac{8{,}99\times 10^9 \left(2\times 10^{-6} - q_2\right) q_2}{\left(50\times 10^{-2}\right)^2}$$

$$-3 \times 10^{-12} = \left(2 \times 10^{-6} - q_2\right) q_2$$

$$\Rightarrow 0 = -q_2^2 + 2 \times 10^{-6} q_2 + 3 \times 10^{-12}$$

Cuya solución es (5pts)

$$q_2 = -1 \times 10^{-6}$$

ó

$$q_2 = 3 \times 10^{-6}$$

Existen dos soluciones

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = 3 \times 10^{-6}C \\ q_2 = -1 \times 10^{-6}C \end{cases}$$

ó

$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = -1 \times 10^{-6}C \\ q_2 = 3 \times 10^{-6}C \end{cases}$$

Campo Eléctrico.

Note que este problema se puede resolver encontrando el campo eléctrico que genera cualquiera de las varillas a una distancia $\frac{L}{2}$ de su centro (Problema resuelto en clase de forma general). Luego puede aplicar el principio de superposición para conocer el campo eléctrico en el centro de la espira cuadrada debido al aporte de las cuatro varillas.

Se dispondrá a calcular el campo eléctrico debido a la varilla horizontal inferior. La cual tiene únicamente componente en la dirección $\hat{\mathbf{j}}$ dado que en la componente $\hat{\mathbf{i}}$ sus aportes se anulan.

$$E_y = \int dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{(\lambda dx)\, cos\theta}{r^2}$$

con

$$dq = \lambda dx$$

$$\lambda = \frac{Q}{L}$$

y

$$cos\theta = \frac{y}{r}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Tenemos (10 pts)

$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{y\lambda}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} dx$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Q}{y\sqrt{y^2+\left(\frac{L}{2}\right)^2}}(-\hat{\mathbf{j}})$$

Como la distancia al centro de la espira mide $\frac{L}{2}$, obtenemos (5 pts)

$$\vec{E} = \frac{Q}{\pi\sqrt{2}\epsilon_o L^2}\,(-\hat{\mathbf{j}})$$

Se sabe que los cuatro alambres van a tener la misma magnitud de campo eléctrico. Lo que les va a variar es la dirección a la que lo dirijen. Las dos varillas horizontales dirijen su campo en dirección $-\hat{\mathbf{j}}$ y las dos varillas verticales lo dirijen en la dirección $-\hat{\mathbf{i}}$.

Por lo tanto el campo eléctrico total es la suma del aporte de las cuatro varillas y estaría dado por (10 pts):

$$\Rightarrow \vec{E}_{Total} = \frac{2Q}{\pi\sqrt{2}\epsilon_o L^2}\,(-\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}})$$

Ley de Gauss.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E\,(2\pi r L) = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{q_{enc}}{2\pi\epsilon_0 r L}$$

La carga encerrada por el cilíndro gaussiano es la siguiente:

$$q_{enc} = \rho \cdot V_{enc}$$

donde el volumen encerrado estaría dado por:

$$V_{enc} = A \cdot L = \pi\left(r^2 - R^2\right) L$$

Por lo tanto el campo eléctrico para cualquier radio dentro del cascarón estaría dado por (10 pts):

$$E\,(2\pi r L) = \frac{\rho\pi\left(r^2 - R^2\right)L}{\epsilon_0}$$

$$E\,(r) = \frac{\rho\left(r^2 - R^2\right)}{2\epsilon_0 r}$$

En la superficie externa del cascarón tenemos que $r = 2R$ por lo tanto el campo eléctrico ahí tiene un valor de (5 pts):

$$E\,(2R) = \frac{\rho\left((2R)^2 - R^2\right)}{2\epsilon_0 2R}$$

$$E\,(2R) = \frac{3\rho R}{4\epsilon_0}$$

Se pide encontrar esta condición (5 pts)

$$E\,(r) = \frac{E(2R)}{2}$$

$$\frac{\rho\left(r^2 - R^2\right)}{2\epsilon_0 r} = \frac{3\rho R}{8\epsilon_0}$$

$$\frac{r^2 - R^2}{2r} = \frac{3R}{8}$$

$$4r^2 - 3rR - 4R^2 = 0$$

La solución de esa ecuación cuadrática es $r = 1{,}443R$, pero como me estan pidiendo la profundidad radial desde la superficie externa, esta estaría dada por (5 pts):

$$2R - 1{,}443R = 0{,}557R$$

Potencial Eléctrico.

(5 pts) **a.)** El campo eléctrico estaría dado por:

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$\vec{E} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

$$E(x,y,z) = -\left(6xy^2\right)\hat{\mathbf{i}} - \left(6x^2y + 2zy\right)\hat{\mathbf{j}} - \left(y^2+1\right)\hat{\mathbf{k}}$$

(5 pts) **b.)** Al evaluarlo en $P(0,0,0)$ obtenemos:

$$E(0,0,0) = -\hat{\mathbf{k}}$$

Teórico-Experimental.

(10 pts) **a.)** Con el valor del campo en superficie podríamos encontrar el valor de σ dado por:

$$E_z(z=0) = \frac{\sigma}{2\epsilon_o}$$

$$\sigma = 2\epsilon_o E_z = 2\left(8{,}85\times 10^{-12}\right)\left(2{,}043\times 10^{7}\right)$$

$$\Rightarrow \sigma = 3{,}618\times 10^{-4}\,\frac{C}{m^2}$$

Ahora utilizando la expresión dada para cualquier z tenemos:

$$E_z = \frac{\sigma}{2\epsilon_o}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

$$\frac{2\epsilon_o E_z}{\sigma} = 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$\frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}} = 1 - \frac{2\epsilon_o E_z}{\sigma}$$

$$\sqrt{z^2+R^2} = \frac{z}{1-\frac{2\epsilon_o E_z}{\sigma}}$$

$$z^2 + R^2 = \left(\frac{z}{1-\frac{2\epsilon_o E_z}{\sigma}}\right)^2$$

$$R^2 = \left(\frac{z}{1-\frac{2\epsilon_o E_z}{\sigma}}\right)^2 - z^2$$

$$R = z\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{2\epsilon_o E_z}{\sigma}\right)^2} - 1}$$

Usando $z = 0{,}03m$ y $E_z = 1{,}187\times 10^{7}\,\frac{N}{C}$ tenemos:

$$R = (0{,}03)\sqrt{\frac{1}{\left(1-\frac{2\left(8{,}85\times10^{-12}\right)\left(1{,}187\times10^{7}\right)}{\left(3{,}618\times10^{-4}\right)}\right)^2}-1}$$

$$\Rightarrow R = 0{,}065m$$

(5 pts) **b.)** El cálculo de la carga estaría dado por:

$$\sigma = \frac{q}{A}$$

$$q = \sigma A = \sigma \pi R^2$$

$$q = \left(3{,}618 \times 10^{-4}\right) \pi \left(0{,}065\right)^2$$

$$\Rightarrow q = 4{,}8 \times 10^{-6} C$$

(10 pts) **c.)** Para la altura, sabemos que:

$$E_z\left(z = 0\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_o}$$

La mitad de este valor estaría dado por:

$$\frac{E_z(z=0)}{2} = \frac{\sigma}{4\epsilon_o}$$

Por lo tanto tenemos que resolver la condición donde:

$$\frac{E_z(z=0)}{2} = E_z\left(z\right)$$

$$\frac{\sigma}{4\epsilon_o} = \frac{\sigma}{2\epsilon_o}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{z}{\sqrt{z^2+R^2}}$$

$$\sqrt{z^2 + R^2} = 2z$$

$$z^2 + R^2 = 4z^2$$

$$3z^2 = R^2$$

$$z = \frac{R}{\sqrt{3}} = \frac{0{,}065}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow z = 0{,}0375m$$

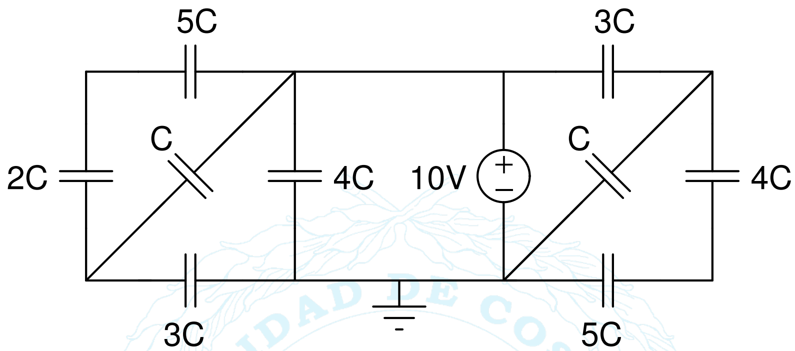
Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— II Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

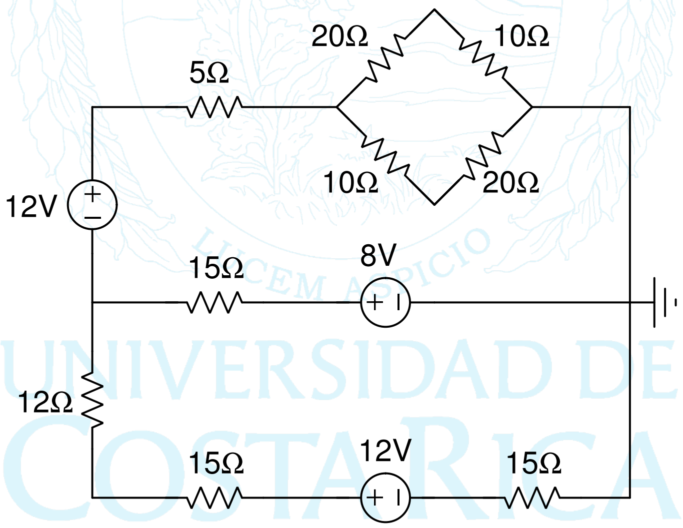
Circuito Capacitivo.

(**25 pts**) **1.** Dado el siguiente circuito capacitivo y tomando $C = 10{,}3\ \mu F$, calcule:
(15 pts) a.) la capacitancia equivalente que ve la fuente.
(5 pts) b.) la carga que está demandando la red capacitiva.
(5 pts) c.) ¿cuánta energía almacena la red capacitiva?.



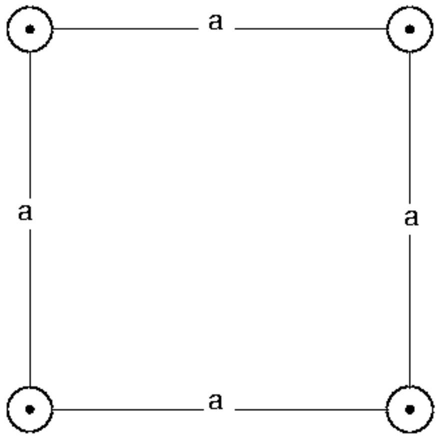
Leyes de Kirchhoff.

(**25 pts**) **2.** Para el siguiente circuito calcule:
(10 pts) a) la corriente que pasa por la resistencia de 12Ω.
(10 pts) b) la potencia que disipan las resistencias de 20Ω.
(5 pts) c) la caída de potencial en la resistencia de 5Ω.



Fuerza Magnética.

(**20 pts**) **3.** Cuatro alambres largos de cobre son paralelos y están dispuestos en un cuadrado. Sacan de la página corrientes iguales, como se indica en la figura. Calcule la fuerza por unidad de longitud (m) en cualquiera de ellos; diga la magnitud y la dirección. Suponga que $i = 18{,}7$A y que $a = 24{,}5$cm.

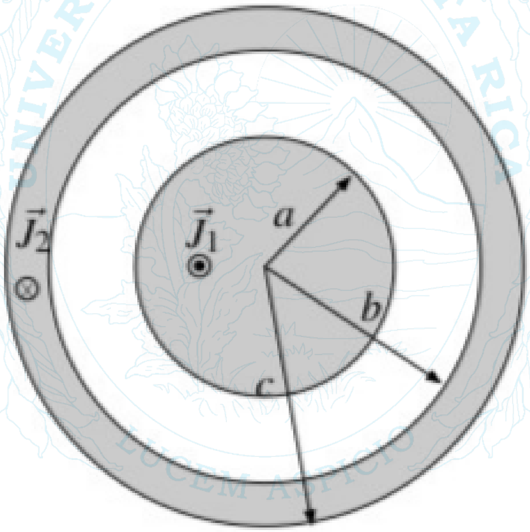


Campo Magnético de una corriente.

(**30 pts**) **4.** Un cable coaxial muy largo consiste en un cilindro sólido con un radio interior de longitud a, rodeado por un cascarón cilíndrico conductor concéntrico de radio interno b y exterior c. El conductor interior tiene una densidad de corriente no uniforme dada por $J_1 = \alpha r\hat{\mathbf{k}}$, donde α es una constante positiva. El cilindro exterior tiene una densidad de corriente dada por $J_2 = -\beta\hat{\mathbf{k}}$, donde β es una constante positiva. Los conductores llevan una igual y opuesta corriente de magnitud I_0. Entre ambos conductores existe vacío.

(10 pts) a) Encuentre los valores α y β en términos de a, b, c y I_0.

(20 pts) b) Determine el campo magnético en: r < a, a < r < b, b < r < c y r > c. Exprese sus resultados en términos de a, b, c y I_0.



— Solución II Examen Parcial —

Circuito Capacitivo.

(15 pts) a) Para reducir el circuito, primeramente se calculan los capacitores en serie

$$\left(\frac{1}{2C}+\frac{1}{5C}\right)^{-1}=\left(\frac{5+2}{10}\right)^{-1}C=\frac{10}{7}C$$

$$\left(\frac{1}{4C}+\frac{1}{5C}\right)^{-1}=\left(\frac{5+4}{20}\right)^{-1}C=\frac{20}{9}C$$

Luego resuelvo los paralelos que me van quedando

$$\frac{10}{7}C+C=\frac{17}{7}C$$

$$\frac{20}{9}C+C=\frac{29}{9}C$$

Ahora resolvemos las series que nos van quedando

$$\left(\frac{1}{\frac{17}{7}C}+\frac{1}{3C}\right)^{-1}=\left(\frac{7}{17}+\frac{1}{3}\right)^{-1}C=\left(\frac{21+17}{51}\right)^{-1}C=\frac{51}{38}C$$

$$\left(\frac{1}{\frac{29}{9}C}+\frac{1}{3C}\right)^{-1}=\left(\frac{9}{29}+\frac{1}{3}\right)^{-1}C=\left(\frac{27+29}{87}\right)^{-1}C=\frac{87}{56}C$$

Finalmente me quedan tres capacitancias en paralelo

$$\frac{51}{38}C+4C+\frac{87}{56}C=\frac{2856+8512+3306}{2128}C=\frac{14674}{2128}C=\frac{7337}{1064}C=6{,}9C$$

Con $C=10{,}3\mu F$ la capacitancia equivalente es

$$C_{eq}=71{,}03\mu F$$

(5 pts) b) La carga que demanda la red capacitiva estaría dada por:

$$q_T=C_{eq}\Delta V=7{,}103\times10^{-4}C$$

(5 pts) c) La energía que almacena la red capacitiva estaría dada por:

$$U_T=\frac{1}{2}C_{eq}\left(\Delta V\right)^2=\frac{1}{2}q_t\Delta V=3{,}55\times10^{-3}J$$

Leyes de Kirchhoff.

a.) Antes de aplicar las LVK, primero hay que reducir el cuadrado de resistencias en una resistencia equivalente **(2.5 pts)**

$$20\Omega + 10\Omega = 30\Omega$$

$$\left(\frac{1}{30\Omega} + \frac{1}{30\Omega}\right)^{-1} = \left(\frac{2}{30\Omega}\right)^{-1} = 15\Omega$$

Ahora podemos aplicar LVK, para la primera malla, tenemos **(5 pts)**:

$$5i_1 + 15i_1 - 8 + 15\left(i_1 - i_2\right) - 12 = 0$$

$$20i_1 + 15i_1 - 15i_2 = 20$$

$$35i_1 - 15i_2 = 20$$

Para la segunda malla, tenemos **(5 pts)**:

$$12i_2 + 15\left(i_2 - i_1\right) + 8 + 15i_2 - 12 + 15i_2 = 0$$

$$42i_2 + 15i_2 - 15i_1 = 4$$

$$-15i_1 + 57i_2 = 4$$

Haciendo reducción Gaussiana, tenemos **(2.5 pts)**:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 35 & -15 & 20 \\ -15 & 57 & 4 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = 0{,}68A \\ i_2 = 0{,}25A \end{cases}$$

La corriente que pasa por la resistencia de 12Ω es i_2.
(7.5 pts) b.) La corriente que atraviesa cada una de las ramas del cuadrado de resistencias es igual a $\frac{i_1}{2} = 0{,}34A$, dada la simetría de cada rama, por lo tanto la potencia de las dos resistencias estaría dada por:

$$2 \cdot P_{20\Omega} = 2 \cdot i_{20\Omega}^2 \cdot R = 4{,}62W$$

(2.5 pts) c.) La caída de tensión en la resistencia de 5Ω, estaría dada por:

$$\Delta V_{5\Omega} = i_1 R = 3{,}4V$$

Fuerza Magnética.

Tomado la ecuación

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Y conociendo que el campo magnético de un alambre muy largo está dado por **(2.5 pts)**:

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}$$

Por lo tanto la magnitud de la fuerza por unidad de longitud estaría dada por **(2.5 pts)**:

$$\frac{\left|\vec{F}\right|}{L} = iB = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi r}$$

Ahora posicionandonos en el alambre de la esquina superior izquierda, y sabiendo que los alambres paralelos que conducen corrientes en la misma dirección se atraen, podemos calcular el aporte de cada uno.
La fuerza por unidad de longitud que ejerce el alambre de la esquina superior derecha sobre este está dado por **(2.5 pts)**:

$$\frac{\vec{F_{12}}}{L} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a}\hat{\mathbf{i}}$$

La fuerza por unidad de longitud que ejerce el alambre de la esquina inferior izquierda sobre este está dado por:

$$\frac{\vec{F_{13}}}{L} = -\frac{\mu_0 i^2}{2\pi a}\hat{\mathbf{j}}$$

La fuerza por unidad de longitud que ejerce el alambre de la esquina inferior derecha sobre este está dado por **(5 pts)**:

$$\frac{\vec{F_{14}}}{L} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{\mathbf{j}}\right) = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a}\left(\frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

Por lo tanto la fuerza por unidad de longitud total, sería **(5 pts)**:

$$\frac{\vec{F_T}}{L} = \frac{\vec{F_{12}}}{L} + \frac{\vec{F_{13}}}{L} + \frac{\vec{F_{14}}}{L} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a}\hat{\mathbf{i}} - \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a}\left(\frac{1}{2}\hat{\mathbf{i}} - \frac{1}{2}\hat{\mathbf{j}}\right)$$

$$\frac{\vec{F_T}}{L} = \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\hat{\mathbf{i}} - \frac{\mu_0 i^2}{2\pi a}\left(1 + \frac{1}{2}\right)\hat{\mathbf{j}} = \frac{3\mu_0 i^2}{4\pi a}\left(\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}\right)$$

La dirección como se puede observar de esta expresión es hacia el centro del cuadrado, y su magnitud estaría dada por **(2.5 pts)**:

$$\left|\frac{\vec{F_T}}{L}\right| = \frac{3\sqrt{2}\mu_0 i^2}{4\pi a} = \frac{3\sqrt{2}(4\pi\times 10^{-7})(18{,}7)^2}{4\pi(0{,}245)} = 6{,}06\times 10^{-4}\,\frac{N}{m}$$

Campo Magnético de una corriente.

(10 pts) a) Usando la definición de corriente eléctrica a partir de la densidad de corriente, se obtiene que:

$$I_0 = \int \vec{J_1}\cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi}\int_0^a \alpha r\hat{\mathbf{k}}\cdot r dr d\theta\hat{\mathbf{k}} = \frac{2\pi\alpha a^3}{3}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{3I_0}{2\pi a^3}$$

$$-I_0 = \int \vec{J_2}\cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi}\int_b^c -\beta\hat{\mathbf{k}}\cdot r dr d\theta\hat{\mathbf{k}} = -\beta\pi\left(c^2 - b^2\right)$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{I_0}{\pi\left(c^2 - b^2\right)}$$

b) El campo magnético se calcula utilizando la ley de Ampère.
Para $r < a$ **(5 pts)**:

$$\oint \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$B\left(2\pi r\right) = \mu_0\int_0^{2\pi}\int_0^r \alpha r\hat{\mathbf{k}}\cdot r dr d\theta\hat{\mathbf{k}} = \mu_0\frac{2\pi\alpha r^3}{3}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0\alpha r^2}{3} = \frac{\mu_0 I_0 r^2}{2\pi a^3}$$

Para $a < r < b$ **(5 pts)**:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$B\,(2\pi r) = \mu_0 I_0$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_o}{2\pi r}$$

Para $b < r < c$ **(5 pts)**:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$B\,(2\pi r) = \mu_0 \left(I_0 - \int_0^{2\pi} \int_b^r \beta \hat{\mathbf{k}} \cdot r dr d\theta \hat{\mathbf{k}} \right)$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_o}{2\pi r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}$$

Para $r > c$ **(5 pts)**:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$B\,(2\pi r) = \mu_0\,(I_0 - I_0)$$

$$\Rightarrow B = 0$$

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— III Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

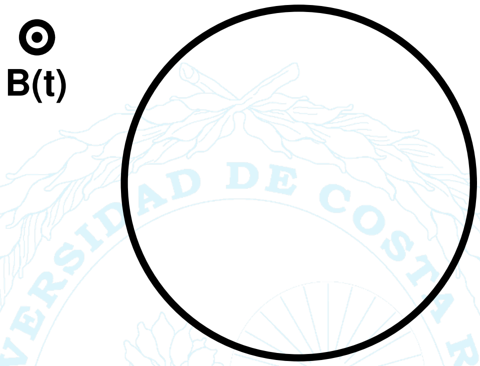
Inducción Eléctrica.

(**25 pts**) **1.** Una espira circular de $10cm^2$ de área está situada perpendicularmente en el seno de un campo magnético de 1T (ver figura). Si el campo disminuye proporcionalmente hasta anularse al cabo de 2s.

(7.5 pts) a) Calcule la fuerza electromotriz inducida.

(12.5 pts) b) Represente de forma gráfica el campo magnético y la fuerza electromotriz inducida en función del tiempo.

(5 pts) c) Indique el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica inducida en la espira



Corriente de Desplazamiento.

(**25 pts**) **2.** Demuestre que la corriente de desplazamiento en un capacitor tal como la concibió el físico escocés James Clerk Maxwell, está dada por:

$$i_d = C\frac{dV}{dt}$$

Magnetización.

(**25 pts**) **3.** La magnetización dentro de una barra de una aleación metálica es de $1{,}2 \times 10^6 \frac{A\cdot vuelta}{m}$ para un campo magnético de $251.2\mu T$. Calcular:

(10 pts) a) La susceptibilidad magnética.

(7.5 pts) b) La permeabilidad magnética.

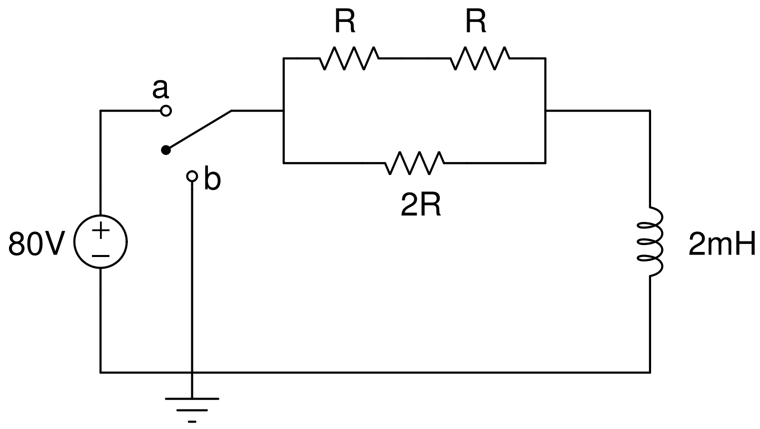
(7.5 pts) c) El campo magnético neto del sistema.

Circuito RL en Estado Transitorio.

(**25 pts**) **4.** En el siguiente circuito, el inductor inicialmente está descargado.

(12.5 pts) a) Cuando el interruptor se conecta a a, el inductor se carga a través del sistema de resistores, donde $R = 2k\Omega$. Hallar el tiempo para que el inductor obtenga 78V.

(12.5 pts) b) Al llegar a los 78V, el interruptor es reconectado a b, calcular entonces, el tiempo necesario para que el voltaje en el inductor disminuya hasta los 8V.



— Solución III Examen Parcial —

Inducción Eléctrica.

Si el campo disminuye proporcionalmente con el tiempo responde a una ecuación de tipo:

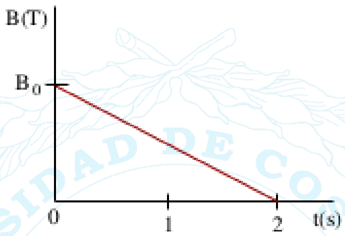
$$y = ax + b$$

con $b = B_0 = 1T$. Para calcular la pendiente tenemos en cuenta que $B(t = 2) = 0$, y sustituyendo en la ecuación de la recta

$$0 = a \cdot 2 + 1 \Rightarrow a = -\tfrac{1}{2}$$

La ecuación que describe la variación del campo magnético es (7.5pts):

$$B(t) = 1 - \tfrac{1}{2}t$$

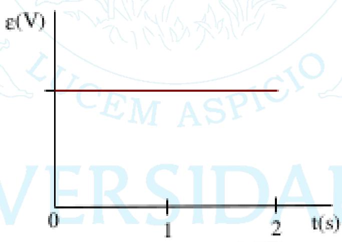


El flujo del campo magnético que atraviesa la espira, teniendo en cuenta que los vectores $\vec{B}$ y $\vec{A}$ son paralelos entre sí, es:

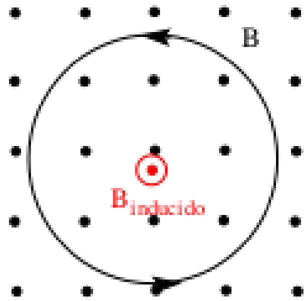
$$\Phi_B = BA = \left(1 - \tfrac{1}{2}t\right) \cdot 10^{-3} Wb$$

Aplicando la ley de Faraday-Lenz, se tiene que la fuerza electromotriz inducida es (12.5pts):

$$\varepsilon = -\tfrac{d\Phi_B}{dt} = 0{,}5 \times 10^{-3} V$$



Durante el proceso, disminuye el flujo del campo magnético que atraviesa la superficie que delimita la espira. Aplicando la ley de Lenz, el sentido de la intensidad de la corriente eléctrica inducida es al contrario del de las manecillas del reloj. De esta forma, se genera un campo magnético inducido en el



centro de la espira, del mismo sentido al campo magnético externo, para así oponerse a la disminución del flujo del campo magnético (5pts).

Corriente de Desplazamiento.

Usando la ley de Gauss Eléctrica, tenemos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow EA = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{1}$$

Usando la circulación del campo eléctrico

$$V = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \Rightarrow \frac{V}{d} = E \tag{2}$$

Sustituyendo (2) en (1), obtenemos

$$\frac{\epsilon_0 A}{d} V = q$$

Derivando esta expresión con respecto al tiempo

$$\frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{dV}{dt} = \frac{dq}{dt}$$

Sabiendo que la capacitancia de un capacitor de placas paralelas está dado por

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

Y la corriente está dada por

$$i = \frac{dq}{dt}$$

Obtenemos finalmente la corriente de desplazamiento en un capacitor

$$\therefore i_d = C\frac{dV}{dt}$$

Magnetización.

La susceptibilidad magnética se puede obtener utilizando la siguiente ecuación:(10 pts)

$$\mu_0 \vec{M} = (k_m - 1)\vec{B}_0$$

$$\Rightarrow \frac{\mu_0 \vec{M}}{\vec{B}_0} = (k_m - 1) = \frac{4\pi\times10^{-7} \cdot 1{,}2\times10^6}{251{,}2\times10^{-6}} = 6000$$

La permeabilidad magnética se obtiene de la siguiente forma: (7.5 pts)

$$k_m = \frac{\mu_0 \vec{M}}{\vec{B_0}} + 1 = 6000 + 1 = 6001$$

El campo magnético neto del sistema está dado por: (7.5 pts)

$$\vec{B} = k_m \vec{B_0} = 6001 \cdot 251{,}2 \times 10^{-6} = 1{,}507T$$

Circuito RL en Estado Transitorio.

Donde la configuración de resistencias tiene una resistencia equivalente de:

$$R_{eq} = R$$

Lo que dura el capacitor en cargarse/descargarse

$$5\tau = 5\frac{L}{R_{eq}} = 5\frac{L}{R}$$

(12.5 pts) a) La expresión de carga está dada por:

$$V(t) = V_0\left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}}\right)$$

Al despejar el tiempo obtenemos:

$$t = -\frac{L}{R} ln\left(1 - \frac{V(t)}{V_0}\right)$$

$$t = -\frac{(2\times 10^{-3})}{(2\times 10^{3})} ln\left(1 - \frac{78}{80}\right)$$

$$t = 3{,}69\mu s$$

(12.5 pts) b) La expresión de descarga está dada por:

$$V(t) = V_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$$

Al despejar el tiempo obtenemos:

$$t = -\frac{L}{R}\ln\left(\frac{V(t)}{V_0}\right)$$

$$t = -\frac{(2\times 10^{-3})}{(2\times 10^{3})} ln\left(\frac{8}{78}\right)$$

$$t = 2{,}28\mu s$$

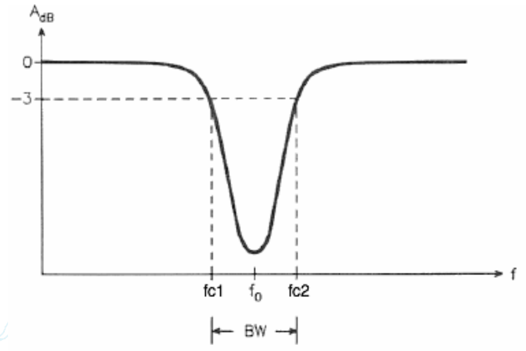
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
FS0427 Física General para Físicos III
INSTRUCTOR: RODRIGO CASTILLO R.

— IV Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Oscilador Electromagnético.

(**25 pts**) **1.** Las aplicaciones de los osciladores electromagnéticos en la física son múltiples, y en este caso vamos a estudiar uno en particular que en vez de dejar pasar una banda de frecuencias del espectro electromagnético, más bien la rechaza. Este oscilador es conocido como rechaza banda y su respuesta en frecuencia se muestra acontinuación:



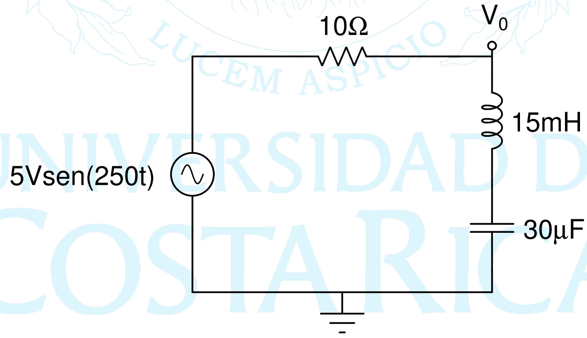
donde las frecuencias de corte para un circuito RLC serie están dadas por:

$$\omega_{1,2} = \pm\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

y su ganancia de voltaje estaría dada por la siguiente expresión:

$$A_v = \frac{V_0}{V_i} = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

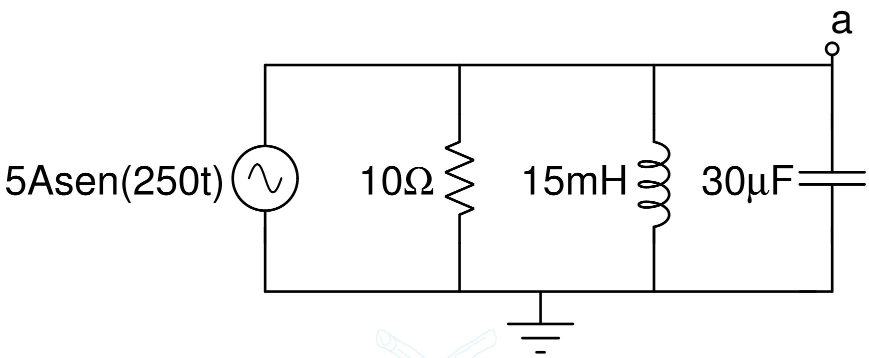
Para el circuito que se muestra acontinuación calcule:



(7.5 pts) a) La ganancia de voltaje A_v, ¿es este circuito un amplificador?.
(7.5 pts) b) El ancho de banda de rechazo.
(10 pts) c) Demuestre que la frecuencia de resonancia f_0 puede calcularse de la siguiente forma:

$$f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$$

Circuito RLC en Estado Forzado.
(**30 pts**) **2.** Dado el siguiente circuito RLC calcule:
(7.5 pts) a) El voltaje en el dominio del tiempo en el punto a de la figura.
(7.5 pts) b) En un mismo diagrama fasorial represente la resistencia, la reactancia total y la impedancia total del circuito, vistas por la fuente.
(5 pts) c) Calcule la potencia promedio que disipa el circuito.
(5 pts) d) Calcule la potencia máxima que disipa la resistencia.
(5 pts) e) Calcule la longitud de ondas electromagnéticas que se pueden capturar utilizando este circuito.



Ondas Electromagnéticas Esféricas.
(**20 pts**) **3.** Un observador mide una intensidad de $1{,}13\frac{W}{m^2}$ a una distancia desconocida, de una antena de telecomunicaciones cuya salida de potencia se ignora. El observador camina $5{,}30m$ acercándose a la fuente, y mide una intensidad de $2{,}41\frac{W}{m^2}$ en este nuevo lugar. Calcule la salida de potencia de la antena, asumiendo que irradia igual en todas direcciones.

Ondas Electromagnéticas Planas.
(**25 pts**) **4.** Una onda electromagnética que se propaga en cierto medio esta descrita por:

$$\vec{E} = 25\frac{V}{m}\sin\left(2\pi \times 10^6 t + 6z\right)\hat{\mathbf{j}}$$

Determine:
(3 pts) a) El sentido de propagación de la onda.
(12 pts) b) Su periodo, longitud de onda y velocidad de fase.
(5 pts) c) La expresión del campo magnético correspondiente.
(5 pts) d) La intensidad promedio de la onda.

— Solución IV Examen Parcial —

Oscilación Electromagnética.

a) Con la ganancia del circuito, sustituimos para los valores que se nos dan (2.5 pts)

$$A_v = \frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{10}{\sqrt{10^2+\left(250\cdot 15\times 10^{-3}-\frac{1}{250\cdot 30\times 10^{-6}}\right)^2}} = 0{,}0769$$

Debido a que $A_v < 1$, este circuito no amplifica la señal, más bien la atenúa (5 pts).

b) Para calcular el ancho de banda de rechazo, primero tenemos que calcular las frecuencias angulares de corte

$$\omega_1 = -\frac{10}{2\cdot 15\times 10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{10}{2\cdot 15\times 10^{-3}}\right)^2 + \frac{1}{15\times 10^{-3}\cdot 30\times 10^{-6}}} = 1{,}194\times 10^3 \frac{rad}{s}$$

$$\omega_2 = \frac{10}{2\cdot 15\times 10^{-3}} + \sqrt{\left(\frac{10}{2\cdot 15\times 10^{-3}}\right)^2 + \frac{1}{15\times 10^{-3}\cdot 30\times 10^{-6}}} = 1{,}861\times 10^3 \frac{rad}{s}$$

Luego calculamos las frecuencias de corte (5 pts)

$$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 190{,}063 Hz$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{2\pi} = 296{,}171 Hz$$

El ancho de banda de rechazo, estaría dado por (2.5 pts):

$$\Delta f = f_2 - f_1 = 106{,}109 Hz$$

c) Calculamos el lado derecho de la igualdad

$$f_1 = -\frac{R}{4\pi L} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = a - b$$

$$f_2 = \frac{R}{4\pi L} + \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} = a + b$$

Con

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}} \\ b = \frac{R}{4\pi L} \end{cases}$$

$$\sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{(a-b)(a+b)} = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Volviendo a las variables originales

$$\sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2}\left[\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \frac{1}{LC}\right] - \frac{R^2}{16\pi^2 L^2}} = \sqrt{\frac{1}{16\pi^2}\frac{R^2}{L^2} + \frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{16\pi^2 L^2}}$$

$$\sqrt{f_1 f_2} = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2}\frac{1}{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{1}$$

Calculando el lado izquierdo de la igualdad

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\omega_0 = 2\pi f_0$$

Tenemos que

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \tag{2}$$

Igualando (1) y (2), demostramos que

$$\therefore\ f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$$

Circuito RLC en Estado Forzado.

a) Utilizando las leyes de corrientes de Kirchhoff (LCK) tenemos (7.5 pts):

$$\sum i_n = 0$$

$$\frac{V}{R} + \frac{V}{Z_L} + \frac{V}{Z_C} = i$$

$$V\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}\right) = i$$

$$V = \frac{i}{\frac{1}{R}+\frac{1}{Z_L}+\frac{1}{Z_C}}$$

$$V = \frac{i}{\frac{1}{R}+\frac{1}{j\omega L}-\frac{1}{\frac{j}{\omega C}}} = \frac{i}{\frac{1}{R}+j\left(\omega C-\frac{1}{\omega L}\right)}$$

$$V = \frac{5}{0{,}1+j(0{,}0075-0{,}2667)}$$

$$V = \frac{5}{0{,}1-0{,}2592j}\cdot\frac{0{,}1+0{,}2592j}{0{,}1+0{,}2592j}$$

$$V = \frac{0{,}5+1{,}2960j}{0{,}0772} = 6{,}4767 + 16{,}7876j$$

$$V_m = \sqrt{(6{,}4767)^2 + (16{,}7876)^2} = 17{,}9936V$$

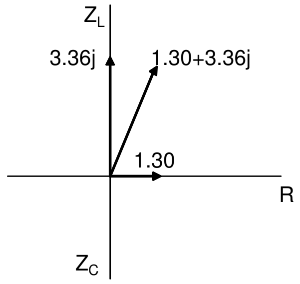
$$\phi = \arctan\left(\frac{16{,}7876}{6{,}4767}\right) = 1{,}2026$$

$$\Rightarrow V(t) = 17{,}9936V\sin(250t + 1{,}2026)$$

b) La impedancia total del circuito estaría dado por (7.5 pts):

$$Z_T = \frac{V}{i} = (0{,}1 - 0{,}2592j)^{-1} = 1{,}2956 + 3{,}3582j$$

Su representación en un diagrama fasorial es la siguiente:



c) La potencia promedio que disipa el circuito está dada por (5 pts):

$$\langle P \rangle = \frac{I_m V_m}{2} \cos(\phi) = \frac{(5)(17{,}9936)}{2} \cos(0 - 1{,}2026) = 16{,}1912W$$

d) La potencia máxima que disipa la resistencia está dada por (5 pts):

$$P_{max} = \frac{(V_m)^2}{R} = \frac{(17{,}9936)^2}{10} = 32{,}3770W$$

e) La longitud de ondas electromagnéticas que se pueden capturar utilizando el circuito es (5 pts):

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

$$\Rightarrow \lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 2\pi\left(3 \times 10^8\right)\sqrt{\left(15 \times 10^{-3}\right)\left(30 \times 10^{-6}\right)} = 1{,}2645 \times 10^6 m$$

Ondas Electromagnéticas Esféricas.

La intensidad está dada por la potencia por unidad de área, y como la antena irradia igual en todas las direcciones, esta se puede analizar como un cascarón esférico, de la siguiente forma:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Sabemos que la potencia tiene que ser igual en los dos puntos, por lo tanto

$$P_1 = P_2$$

$$4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi r_2^2 I_2$$

Sustituyendo los valores del enunciado y con $r_2 = r_1 - 5{,}30m$. Obtenemos la siguiente ecuación cuadrática:

$$0{,}531 r_1^2 - 10{,}6 r_1 + 28{,}1 = 0$$

Cuyas soluciones son:

$$\begin{cases} r_{11} = 16{,}8 \\ r_{12} = 3{,}15 \end{cases}$$

La solución con sentido físico es $r = 16{,}8m$. Por lo tanto la potencia de salida de la antena, estaría dada por:

$$P = 4\pi r_1^2 I_1 = 4\pi\,(16{,}8)^2\,(1{,}13) = 4{,}01\times 10^3 W$$

Ondas Electromagnéticas Planas.

a) La onda se propaga en el sentido -Z. (3 pts)

b) El periodo de la onda está dada por (4 pts):

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi\times 10^6} = 1\times 10^{-6} s$$

La longitud de onda está dada por (4 pts):

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{6} = 1{,}05m$$

La velocidad de fase está dada por (4 pts):

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\times 10^6}{6} = 1{,}05\times 10^6 \frac{m}{s}$$

c) El campo magnético asociado al campo eléctrico dado es (5 pts):

$$\vec{B} = \frac{E_m}{v_p}\sin\left(2\pi\times 10^6 t + 6z\right)\hat{\mathbf{i}}$$

$$\vec{B} = 2{,}38\times 10^{-5} T \sin\left(2\pi\times 10^6 t + 6z\right)\hat{\mathbf{i}}$$

d) La intensidad promedio de la onda es (5 pts):

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2\mu_0 v_p} E_m^2 = \frac{1}{2\left(4\pi\times 10^{-7}\right)\left(1{,}05\times 10^6\right)}(25)^2 = 236{,}84\frac{W}{m^2}$$

3. Exámenes Resueltos

IIC-2018

"Si la gente no piensa que las matemáticas son simples,
es solo porque no se dan cuenta de lo complicada que es la vida"
- John Von Neumann -

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
FS0427 Física General para Físicos III
INSTRUCTOR: RODRIGO CASTILLO R.

— I Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Nube de Tormenta.

(**25 pts**) **1.** La distribución de cargas dentro de una nube de tormenta (cumulonimbus) se aproxima mediante dos cargas puntuales. Al hacer una medición sobre un cumulonimbus se encuentra que tiene una distribución aproximada de cargas de la siguiente forma: una carga de +40 C a 10,0 km de altura, y una carga de −30 C a 4,0 km de altura.

(17.5 pts) a.) ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza eléctrica producida por este cumulonimbus sobre una carga de +5 C a 10,0 km de altura, y a una distancia de 6,0 km a la derecha?

(7.5 pts) b.) ¿Cuál es la magnitud de la fuerza que ejerce este cumulonimbus sobre la carga?

Modelo Atómico.

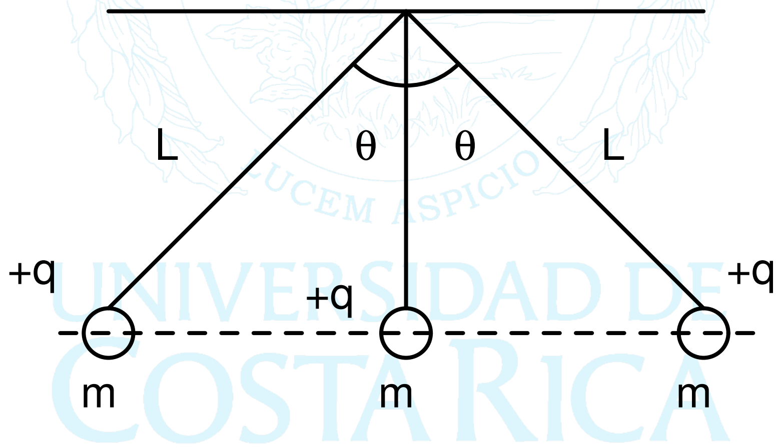
(**25 pts**) **2.** De acuerdo a la mecánica cuántica, la nube electrónica para un átomo de hidrógeno en el estado base tiene una densidad de carga, dada por:

$$\rho(r) = \frac{q}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$$

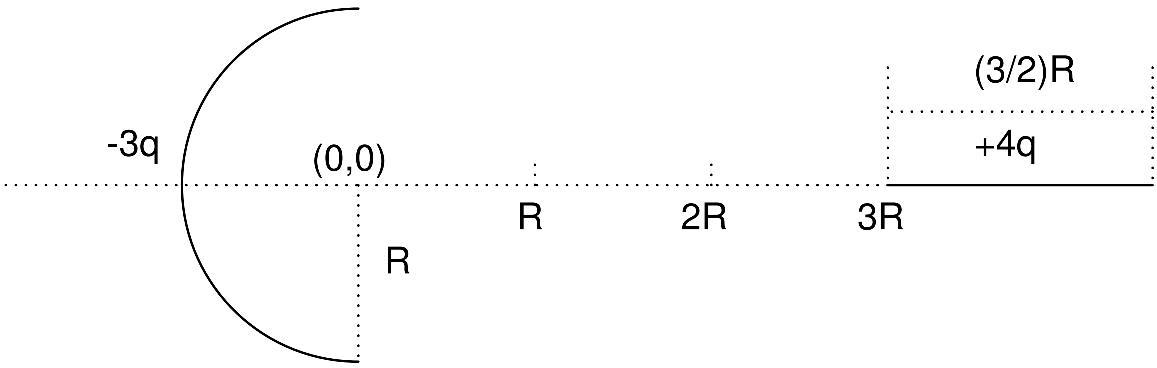
donde q es la carga del electrón y a es el radio de Bohr. Calcula el campo eléctrico debido a esta nube electrónica.

Sistema Electrostático Gravitacional.

(**25pts**) **3.** Tres cargas puntuales idénticas, cada una con una masa $m = 0{,}1$ kg, cuelgan de tres cuerdas como se muestra en la figura. Si las longitudes de las cuerdas izquierda y derecha son cada una $L = 30$ cm y el ángulo $\theta = 45°$, determine el valor de q.



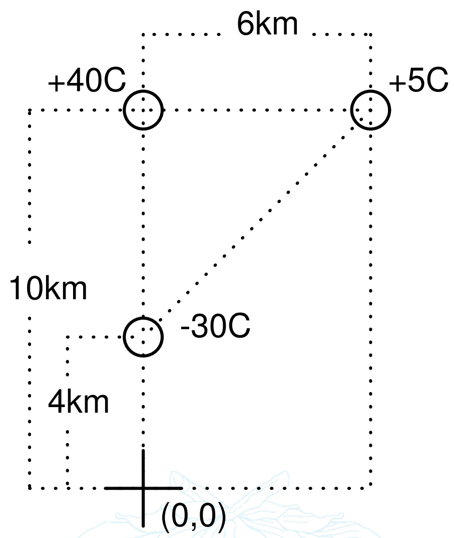
Potencial Eléctrico.
(**25 pts**) **4.** Determine el potencial eléctrico que se genera en el origen del sistema de coordenadas debido a la sección anular que se encuentra cargada uniformemente con $-3q$ y a la línea de carga, la cual tiene distribuida uniformemente una carga de $+4q$, como se muestra en la figura.



Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— Solución I Examen Parcial —

Nube de Tormenta.



(17.5 pts) **a.)** La fuerza que ejerce el tope de la nube a la carga de +5 C estaría dada por (5 pts):

$$F_{13} = k\frac{q_1 q_3}{r^2} = \frac{(8{,}99\times10^9)(40)(5)}{(6\times10^3)^2} = 4{,}9944\times10^4 N$$

La fuerza que ejerce la parte inferior de la nube a la carga de +5 C estaría dada por (10 pts):

$$F_{23x} = k\frac{q_2 q_3}{r^2}\cos\theta = \frac{(8{,}99\times10^9)(-30)(5)}{\left(6\sqrt{2}\times10^3\right)^2}\cos(45) = -1{,}3243\times10^4 N$$

$$F_{23y} = k\frac{q_2 q_3}{r^2}\sin\theta = \frac{(8{,}99\times10^9)(-30)(5)}{\left(6\sqrt{2}\times10^3\right)^2}\sin(45) = -1{,}3243\times10^4 N$$

Por lo tanto las componentes de la fuerza ejercida por el cumulonimbus sobre la carga, estarían dadas por (2.5 pts):

$$F_x = 4{,}9944\times10^4 N - 1{,}3243\times10^4 N = 3{,}6700\times10^4 N$$

$$F_y = -1{,}3243\times10^4 N$$

(7.5 pts) **b.)** La magnitud de la fuerza que ejerce el cumulonimbus sobre la carga, estaría dada por:

$$F_T = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{\left(3{,}2286\times10^4\right)^2 + \left(-1{,}3243\times10^4\right)^2} = 3{,}9017\times10^4 N$$

Modelo Atómico.

Utilizando la ley de Gauss, tenemos (5 pts)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_{enc}}{r^2} \tag{1}$$

Ahora calculamos la carga encerrada en la nube electrónica (5 pts)

$$q_{enc} = \int \rho dV = \int \rho\left(r'\right) A dr'$$

$$q_{enc} = \int \rho\left(r'\right)\left(4\pi r'^2\right) dr'$$

$$q_{enc} = \int_0^r \frac{q}{\pi a^3} e^{-\frac{2r'}{a}}\left(4\pi r'^2\right) dr'$$

$$q_{enc} = \frac{4q}{a^3}\int_0^r e^{-\frac{2r'}{a}} r'^2 dr'$$

Integrando por partes, obtenemos (5 pts)

$$\begin{array}{ll} u = r'^2 & v = -\frac{a}{2}e^{-\frac{2r'}{a}} \\ du = 2r'dr' & dv = e^{-\frac{2r'}{a}}dr' \end{array}$$

$$q_{enc} = \frac{4q}{a^3}\left[-\frac{a}{2}r'^2 e^{-\frac{2r'}{a}}\Big|_0^r + \int_0^r a r' e^{-\frac{2r'}{a}} dr'\right]$$

$$q_{enc} = \frac{4q}{a^3}\left[-\frac{a}{2}r^2 e^{-\frac{2r}{a}} + a\int_0^r r' e^{-\frac{2r'}{a}} dr'\right]$$

Se vuelve a integrar por partes (5 pts)

$$\begin{array}{ll} u = r' & v = -\frac{a}{2}e^{-\frac{2r'}{a}} \\ du = dr' & dv = e^{-\frac{2r'}{a}}dr' \end{array}$$

$$q_{enc} = \frac{4q}{a^3}\left[-\frac{a}{2}r^2 e^{-\frac{2r}{a}} + a\left(-\frac{a}{2}r' e^{-\frac{2r'}{a}}\Big|_0^r + \int_0^r \frac{a}{2} e^{-\frac{2r'}{a}} dr'\right)\right]$$

$$q_{enc} = \frac{4q}{a^3}\left[-\frac{a}{2}r^2 e^{-\frac{2r}{a}} + a\left(-\frac{a}{2}r e^{-\frac{2r}{a}} + \left(-\frac{a^2}{4}e^{-\frac{2r'}{a}}\right)\Big|_0^r\right)\right]$$

$$q_{enc} = \frac{4q}{a^3}\left[-\frac{a}{2}r^2 e^{-\frac{2r}{a}} + a\left(-\frac{a}{2}r e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{a^2}{4}e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{a^2}{4}\right)\right]$$

$$q_{enc} = \frac{4q}{a^3}\left[-\frac{a}{2}r^2 e^{-\frac{2r}{a}} + -\frac{a^2}{2}r e^{-\frac{2r}{a}} - \frac{a^3}{4}e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{a^3}{4}\right]$$

$$q_{enc} = q\left\{1 - e^{-\frac{2r}{a}}\left[1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2}\right]\right\}$$

Finalmente sustituyendo en (1) (5 pts)

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\left\{1 - e^{-\frac{2r}{a}}\left[1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2}\right]\right\}$$

Sistema Electrostático Gravitacional.

Se plantean las ecuaciones de la fuerza electrostática por componentes en el equilibrio (12.5 pts)

$$\sum F_x = 0$$

$$F_{12} + F_{13} - T\sin\theta = 0$$

$$\frac{kq^2}{\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{kq^2}{\left(\frac{2L}{\sqrt{2}}\right)^2} - T\sin\theta = 0 \tag{2}$$

$$\sum F_y = 0$$

$$T\cos\theta - mg = 0$$

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2) (12.5 pts)

$$\frac{kq^2}{\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{kq^2}{\left(\frac{2L}{\sqrt{2}}\right)^2} - \frac{mg}{\cos\theta}\sin\theta = 0$$

$$\frac{kq^2}{\left(\frac{L}{\sqrt{2}}\right)^2} + \frac{kq^2}{\left(\frac{2L}{\sqrt{2}}\right)^2} = mg\tan\theta$$

$$q = \sqrt{\frac{2mg\tan\theta L^2}{5k}}$$

$$q = 1{,}98\times10^{-6}C$$

Potencial Eléctrico.

El potencial eléctrico debido a una distribución de carga está dado por:

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Para la sección anular de carga tenemos (10 pts):

$$\lambda = \frac{dq}{dl}$$

$$\Rightarrow dq = \lambda R d\theta$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda R d\theta}{R}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\theta = \left(\frac{-3q}{\pi R}\right)\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\pi = \frac{-3q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Para la línea de carga tenemos (10 pts):

$$dq = \lambda dx$$

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\lambda dx}{x}$$

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}\int_{3R}^{\frac{9R}{2}}\frac{dx}{x} = \left(\frac{8q}{3R}\right)\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2q}{3\pi\epsilon_0 R}\ln\left(\frac{3}{2}\right)$$

El potencial en el origen de coordenadas estaría dado por (5 pts):

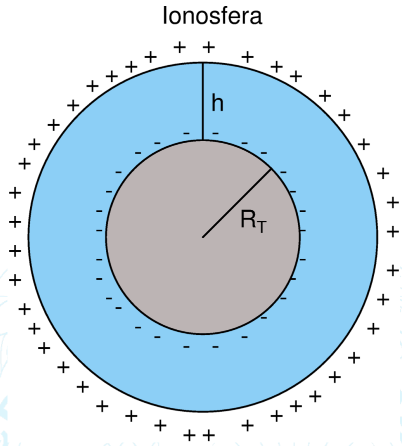
$$V_T = \frac{-3q}{4\pi\epsilon_0 R} + \frac{2q}{3\pi\epsilon_0 R}\ln\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{q}{\pi\epsilon_0 R}\left(-\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right) = -\frac{0{,}4797q}{\pi\epsilon_0 R}$$

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

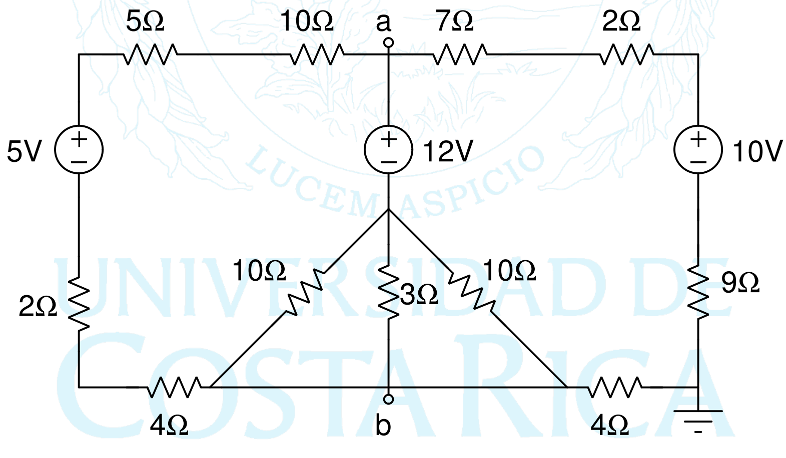
— II Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Capacitor Atmosférico.
(**25 pts**) **1.** En la figura se muestra el sistema tierra-atmósfera, donde la masa terrestre está representada por un conductor esférico de radio $R_T = 6371$ km y la atmósfera es el espacio que se abarca desde la superficie terrestre hasta la inósfera, la cual está limitada por un cascarón esférico a una altura $h = 500$ km. Calcule la capacitancia atmosférica.

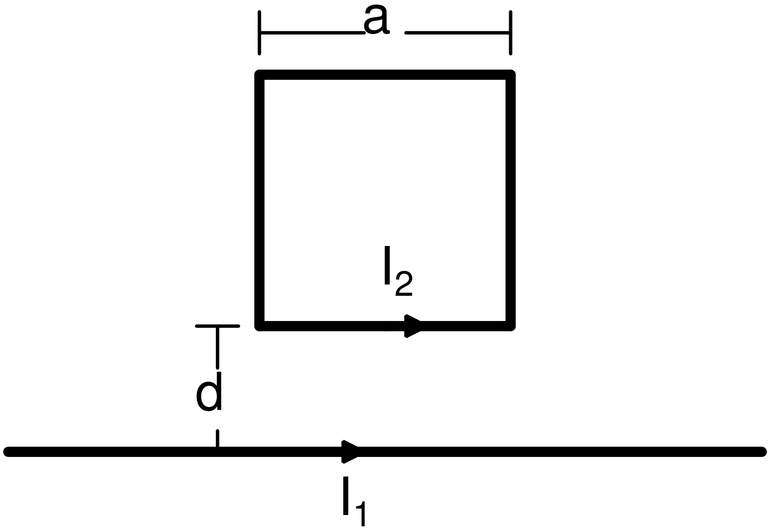


Leyes de Kirchhoff.
(**25 pts**) **2.** Para el siguiente circuito calcule:
(15 pts) a) las corrientes que pasan por cada una de las fuentes de voltaje.
(5 pts) b) la potencia que disipa la resistencia de 3Ω.
(5 pts) c) la diferencia de potencial $V_b - V_a$.



Fuerza Magnética.

(**25 pts**) **3.** Un hilo conductor rectilíneo de longitud indefinida que transporta una corriente de intensidad I_1 se encuentra en el mismo plano que una espira cuadrada de lado a recorrida por una corriente I_2. El lado más cercano de la espira al hilo es paralelo a éste, se encuentra a una distancia d de él y su corriente tiene el mismo sentido que la del hilo. Calcule la maginitud y el sentido de fuerza neta que el campo del hilo ejerce sobre la espira.



Campo Magnético de una corriente.

(**25 pts**) **4.** Un cable conductor cilíndrico hueco muy largo, de radio interno R y radio externo $2R$, conduce una corriente eléctrica (en la región entre R y $2R$) definida por una densidad de corriente no uniforme dada por $J(r) = \frac{J_0 r}{R}$, donde r es la distancia medida desde el centro del cilindro. Encontrar la magnitud del campo magnético en las regiones:

(12.5 pts) a) $R < r < 2R$.

(12.5 pts) b) $r > 2R$.

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— Solución II Examen Parcial —

Capacitor Atmosférico.

Sabiendo que el campo eléctrico entre los radios $R_T < r < R_T + h$ está dado por (5 pts)

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}$$

Ahora procedemos a calcular la diferencia de potencial debido a este campo eléctrico (12.5 pts)

$$\Delta V = \int_+^- \vec{E}\cdot d\vec{l} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int_{R_T+h}^{R_T}\frac{dr}{r^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R_T+h}\right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{R_T+h} - \frac{1}{R_T}\right)$$

$$\Delta V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{R_T-(R_T+h)}{R_T(R_T+h)}\right) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{h}{R_T(R_T+h)}\right)$$

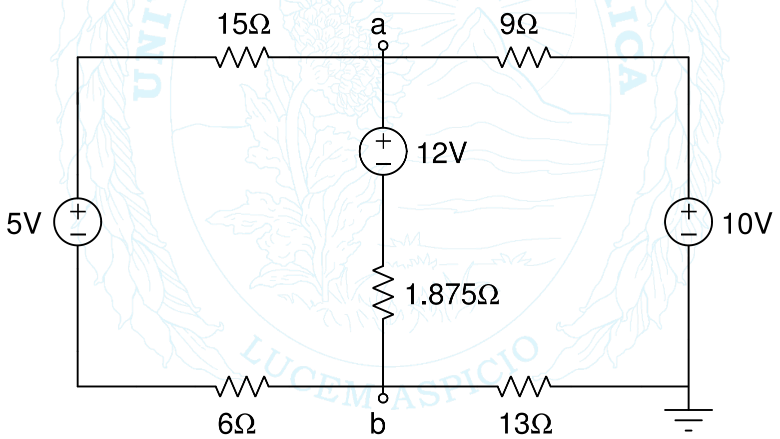
Con $C = \left|\frac{q}{\Delta V}\right|$, tenemos (7.5 pts)

$$C = 4\pi\epsilon_0\left(\frac{R_T(R_T+h)}{h}\right) = 4\pi\cdot 8{,}85\times10^{-12}\left(\frac{6371\times10^3\cdot 6871\times10^3}{500\times10^3}\right) = 9{,}74mF$$

Leyes de Kirchhoff.

a.) Lo primero que hay que realizar es juntar las resistencias que estan en serie y en paralelo y reducir el circuito al mostrado en la figura (2.5 pts). El paralelo se resuelve de la siguiente manera:

$$\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{3}+\frac{1}{10}\right)^{-1} = 1{,}875\Omega$$



Aplicamos LVK
Malla1 (5 pts)

$$15i_1 + 12 + 1{,}875\,(i_1 - i_2) + 6i_1 - 5 = 0$$

$$22{,}875i_1 - 1{,}875i_2 = -7$$

Malla2 (5 pts)

$$9i_2 + 10 + 13i_2 + 1{,}875\,(i_2 - i_1) - 12 = 0$$

$$-1{,}875i_1 + 23{,}875i_2 = 2$$

Aplicando reducción Gaussiana tenemos

$$\left(\begin{array}{cc|c} 22{,}875 & -1{,}875 & -7 \\ -1{,}875 & 23{,}875 & 2 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 = -0{,}30A \\ i_2 = 0{,}06A \end{cases}$$

Por lo tanto las corrientes de cada fuente estarían dadas por (2.5 pts):

$$\begin{aligned} i_{5V} &= 0{,}30A \\ i_{12V} &= 0{,}36A \\ i_{10V} &= 0{,}06A \end{aligned}$$

b.) Como la resistencia de 3Ω se encuentra en un paralelo, podemos calcular la corriente que la atraviesa con un divisor de corriente de la siguiente forma (5 pts):

$$I_x = I_s \frac{R_{eq}}{R_x} = 0{,}36\frac{1{,}875}{3} = 0{,}225A$$

Por lo que la potencia que disipa esa resistencia, estaría dada por:

$$P_{3\Omega} = i^2 R = (0{,}225)^2 \cdot 3 = 0{,}152W$$

c.) Para calcular $V_b - V_a$, primero debemos calcular V_b, el cual está dado por (5 pts):

$$V_b = iR_{eq} = 0{,}36 \cdot 1{,}875 = 0{,}675V$$

$$V_b - V_a = 0{,}675V - 12V = -11{,}325V$$

Fuerza Magnética.

Haciendo el cálculo de la fuerza sobre cada uno de los lados de la espira tenemos:
Lado horizontal más cercano al hilo (3.5 pts)

$$\vec{F} = i\vec{L} \times \vec{B}$$

Con $\vec{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi d}\hat{\mathbf{k}}$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi d}\left(\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}\right) = -\frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi d}\hat{\mathbf{j}}$$

Lado horizontal más lejano al hilo (3.5 pts)

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi(d+a)}\left(-\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}\right) = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi(d+a)}\hat{\mathbf{j}}$$

Lado vertical izquierdo (4 pts)

$$d\vec{F} = id\vec{L} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = i_2 dy B\left(-\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}}\right) = -i_2 dy B\hat{\mathbf{i}}$$

Con $B = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi y}$

$$\vec{F} = \int_d^{d+a} -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi y} dy\hat{\mathbf{i}} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dy}{y}\hat{\mathbf{i}}$$

$$\vec{F} = -\frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

Lado vertical derecho (4 pts)

$$d\vec{F} = i_2 dy B\left(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}}\right) = i_2 dy B\hat{\mathbf{i}}$$

$$\vec{F} = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi y} dy\hat{\mathbf{i}} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dy}{y}\hat{\mathbf{i}}$$

$$\vec{F} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

Por lo que la fuerza total estaría dada por la suma de las cuatro fuerzas (5 pts)

$$\vec{F}_T = \frac{\mu_0 i_1 i_2 a}{2\pi}\left(\frac{1}{d+a} - \frac{1}{d}\right)\hat{\mathbf{j}}$$

Se puede notar de esta expresión que $\vec{F}_T < 0$ por lo tanto la fuerza es de atracción (5 pts).

Campo Magnético de una corriente.

a) Utilizando la Ley de Ampère tenemos que para $R < r < 2R$ (12.5 pts)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$B 2\pi r = \mu_0 \int_R^r \frac{J_0 r'}{R} 2\pi r' dr'$$

$$B = \frac{\mu_0 J_0}{3rR}\left(r^3 - R^3\right)$$

b) Utilizando la Ley de Ampère tenemos que para $r > 2R$ (12.5 pts)

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$B 2\pi r = \mu_0 \int_R^{2R} \frac{J_0 r'}{R} 2\pi r' dr'$$

$$B = \frac{7\mu_0 J_0 R^2}{3r}$$

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
FS0427 Física General para Físicos III
INSTRUCTOR: RODRIGO CASTILLO R.

— III Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

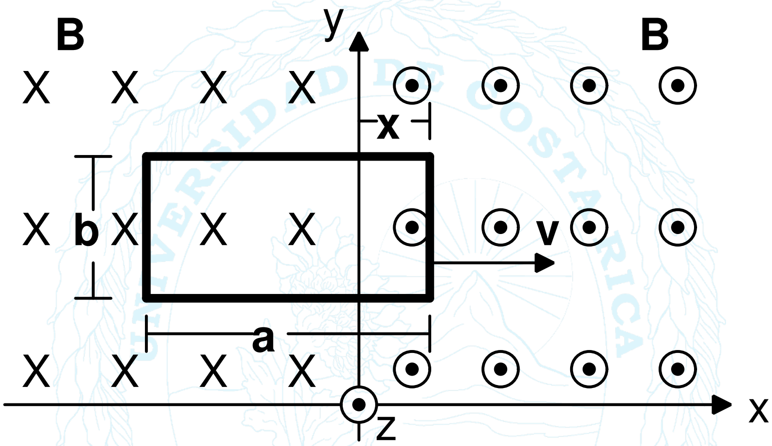
Inducción Eléctrica.

(**25 pts**) **1.** En la figura adjunta el plano x = 0 delimita dos regiones en las que existen dos campos magnéticos uniformes con el mismo módulo y dirección en sentidos contrarios. Una espira conductora rectangular de lados a y b que tiene una resistencia eléctrica R atraviesa perpendicularmente la frontera de separación entre esas dos regiones con una velocidad constante v.

(5 pts) a) Enuncie la Ley de Lenz e indique, sin hacer ningún cálculo, qué sentido ha de tener la corriente inducida en la espira.

(12.5 pts) b) Halle una expresión para el flujo magnético que atraviesa la espira en el instante que se representa en la figura.

(7.5 pts) c) A partir del resultado anterior calcule la corriente inducida en la espira.



Inducción Magnética.

(**25 pts**) **2.** Un capacitor cuyas placas se hallan en vacío y tienen un área de $5cm^2$ con una separación de 2mm, se carga con una corriente que tiene un valor constante de 1.8 mA. En el instante $t = 0$ la carga en las placas es igual a cero. Calcular:

(15 pts) a) La carga en las placas, el campo eléctrico y la diferencia de potencial entre las mismas, cuando $t = 0{,}5\mu s$.

(5 pts) b) La razón de cambio respecto al tiempo del campo eléctrico entre las placas (¿varía $\frac{dE}{dt}$?).

(5 pts) c) La densidad de corriente de desplazamiento (¿cómo son entre sí i_c e i_d?).

Magnetización.

(**25 pts**) **3.** Un campo magnético de 2.512mT se aplica a un material con una permeabilidad magnética de 5000. Calcular:

(12.5 pts) a) La magnetización.

(12.5 pts) b) El campo magnético neto del sistema.

Inductancia.

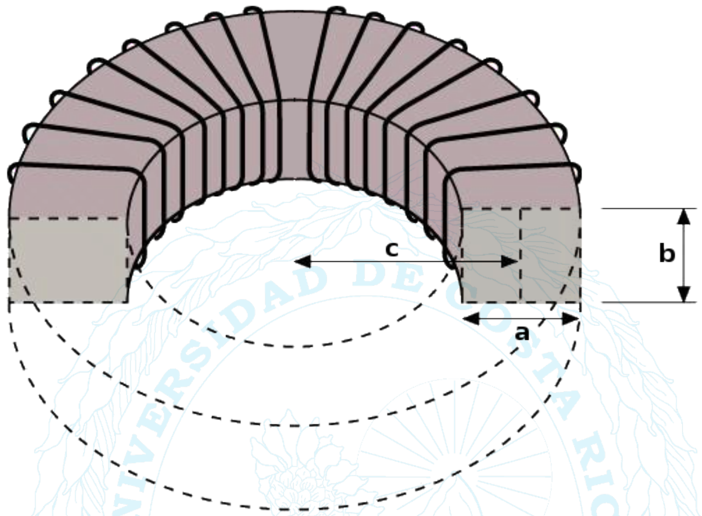
(**25 pts**) **4.** Un toroide con área transversal rectangular, de altura b y ancho a, tiene un radio c medido hasta su centro geométrico, y un devanado compacto con N espiras de alambre con corriente i. Calcular:

(12.5 pts) a) La autoinductancia del toroide.

(7.5 pts) b) La autoinductancia cuando $c >> a$. Puede utilizar la siguiente expansión de ser necesario:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n, \qquad |x| < 1$$

(5 pts) c) Evaluar la autoinductancia del toroide, para los valores $N = 300$, $a = 2{,}0$cm, $b = 4{,}0$cm y $c = 10$cm.



— Solución III Examen Parcial —

Inducción Eléctrica.

a.) A medida que la espira se desplaza hacia la derecha aumenta el flujo magnético hacia fuera del papel. Según la Ley de Lenz, el sentido de la corriente inducida ha de ser tal que el campo magnético que ésta crea se oponga a este aumento de flujo. Aplicando la regla de la mano derecha se deduce que el sentido de la corriente inducida debe ser **horario** (5 pts).

b.) El flujo magnético se calcula de la siguiente forma (12.5 pts)

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

El vector $d\vec{A}$ tiene la dirección del eje z. Si arbitrariamente, escogemos su sentido hacia fuera del papel y tenemos en cuenta que el campo magnético es uniforme en cada región, el cálculo del flujo es trivial:

$$\Phi_B = -Bb(a-x) + Bbx \tag{1}$$

c.) Según la Ley de Faraday la fem inducida en la espira es proporcional al ritmo de cambio del flujo magnético (7.5 pts):

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Como la espira se mueve hacia la derecha con una velocidad $v = \frac{dx}{dt}$ podemos calcular la derivada del flujo a partir de la expresión (1):

$$\varepsilon = Bb\frac{d(a-x)}{dt} - Bb\frac{dx}{dt} = -2Bbv$$

Como la espira tiene una resistencia R se cumplirá la Ley de Ohm dada por:

$$\varepsilon = iR$$

donde i es la corriente inducida:

$$i = -\frac{2Bbv}{R}$$

El signo negativo indica el sentido de la corriente inducida y se interpreta de la siguiente forma: a la hora de calcular el flujo hemos tomado el vector $d\vec{A}$ hacia fuera del papel. Aplicando la regla de la mano derecha vemos que este vector define como positivo el sentido antihorario de giro. El hecho de que la intensidad de la corriente inducida sea negativa indica que su sentido es contrario al señalado por $d\vec{A}$, es decir, que la intensidad tiene sentido horario. Esto está de acuerdo con lo predicho por la Ley de Lenz en el primer apartado del problema.

Inducción Magnética.

a.) Los cálculos serían los siguientes (15 pts):

$$q = i_c \cdot t = \left(1{,}8 \times 10^{-3} A\right)\left(0{,}5 \times 10^{-6} s\right) = 0{,}9 \times 10^{-9} C$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{q}{A\epsilon_0} = \frac{0{,}9\times10^{-9}C}{(5\times10^{-4}m^2)\epsilon_0} = 2{,}03 \times 10^5 \frac{V}{m}$$

$$V = E \cdot d = \left(2{,}03 \times 10^5 \frac{V}{m}\right)\left(2 \times 10^{-3} m\right) = 406V$$

b.) La tasa de cambio estaría dada por (5 pts):

$$\frac{dE}{dt} = \frac{i_c}{A\epsilon_0} = \frac{(1{,}8\times10^{-3}A)}{(5\times10^{-4}m^2)\epsilon_0} = 4{,}07 \times 10^{11} \frac{V}{m\cdot s}$$

$$\Rightarrow \frac{dE}{dt} = constante$$

c.) El valor de la densidad estaría dado por (5 pts):

$$J_d = \epsilon_0 \frac{dE}{dt} = \epsilon_0 \left(4{,}07 \times 10^{11} \frac{V}{m\cdot s}\right) = 3{,}6 \frac{A}{m^2}$$

$$i_d = J_d \cdot A = \left(3{,}6 \frac{A}{m^2}\right)\left(5 \times 10^{-4} m^2\right) = 1{,}8 \times 10^{-3} A$$

$$\Rightarrow i_c = i_d$$

Magnetización.

a.) Usando la siguiente ecuación podemos despejar para la magnetización (12.5 pts)

$$\mu_0 \vec{M} = (k_m - 1)\vec{B}_0$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \frac{(k_m-1)\vec{B}_0}{\mu_0} = \frac{(5000-1)(2{,}512\times10^{-3}T)}{4\pi\times10^{-7}\frac{T\cdot m}{A}} = 9992931{,}4 \frac{A\cdot vuelta}{m}$$

b.) El campo magnético neto del sistema estaría dado por (12.5 pts):

$$\vec{B} = k_m \vec{B}_0 = 5000 \cdot 2{,}512 \times 10^{-3} T = 12{,}6T$$

Inductancia.

a.) La autoinductancia estaría dada por (12.5 pts):

$$L = N\frac{\Phi_B}{i} = N\frac{\int \vec{B}\cdot d\vec{A}}{i}$$

$$L = N\int_{c-\frac{a}{2}}^{c+\frac{a}{2}} \frac{\mu_0 N}{2\pi r} b dr = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \ln\left(\frac{c+\frac{a}{2}}{c-\frac{a}{2}}\right) = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi} \ln\left(\frac{1+\frac{a}{2c}}{1-\frac{a}{2c}}\right) = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi}\left[\ln\left(1+\frac{a}{2c}\right) - \ln\left(1-\frac{a}{2c}\right)\right]$$

b.) Sabiendo que $\ln(1+x) = x$ para $-1 < x < 1$, osea cuando $c \gg a$, tenemos (7.5 pts):

$$L = \frac{\mu_0 N^2 b}{2\pi}\left(\frac{a}{2c} + \frac{a}{2c}\right) = \frac{\mu_0 N^2 ab}{2\pi c}$$

c.) Sustituyendo los valores obtenemos (5 pts)

$$L = \frac{4\pi\times10^{-7}(300)^2 2\times10^{-2}\cdot4\times10^{-2}}{2\pi\cdot10\times10^{-2}} = 144\mu H$$

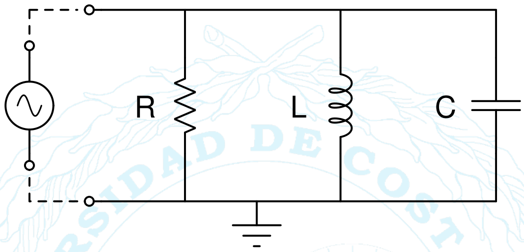
Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— IV Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Resonancia Electromagnética.
(**25 pts**) **1.** Una fuente electromagnética entra en resonancia con un circuito RLC cuando esta percibe el cicuito como si este fuera solamente resistivo. Esto sucede cuando la frecuencia de oscilación de la fuente electromagnética es igual a la frecuencia natural de oscilación del circuito RLC. Bajo esta premisa demuestre que la frecuencia natural de oscilación del circuito RLC que se muestra acontinuación está dada por:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$



Circuito RLC en Estado Forzado.
(**25 pts**) **2.** Un circuito RLC en serie toma en promedio 220 W de una línea de corriente alterna de 120 V_{rms} y 60 Hz. El factor de potencia es de 0,56 y el voltaje de la fuente se adelanta a la corriente. Bajo este escenario calcule:
(10 pts) a) ¿cuál es la resistencia del circuito?
(7.5 pts) b) ¿cuál es la reactancia del circuito?
(7.5 pts) c) ¿qué potencia promedio se tomaría de la línea de suministro si el circuito estuviese en resonancia?

Ondas Electromagnéticas Planas.
(**25 pts**) **3.** El campo eléctrico de una onda electromagnética que viaja en el vacío está descrito por:

$$\vec{E} = \left(5 \times 10^{-6} \tfrac{V}{m}\right) \sin\left(\left(14 \times 10^{6} \tfrac{rad}{m}\right) x - \left(4{,}197 \times 10^{15} \tfrac{rad}{s}\right) t\right) \hat{\mathbf{j}}$$

Determine:
(6 pts) a) La longitud de onda. ¿Es esta radiación perceptible por el ojo humano?
(5 pts) b) La frecuencia de la onda.
(7 pts) c) La expresión del campo magnético correspondiente.
(7 pts) d) La expresión del vector de Poynting de la onda.

Transmisión Electromagnética.

(**25 pts**) **4.** Una nave espacial a distancias lunares transmite a la Tierra ondas en 2GHz. Sí una potencia de 10W es radiada isotrópicamente, encuentre:

(6 pts) a) El vector de Poynting promedio en la Tierra

(6 pts) b) El valor del campo magnético B_{rms} en la Tierra

(6 pts) c) El tiempo que toma para las ondas de radio viajar desde el espacio a la Tierra

(7 pts) d) ¿Cuántos fotones por unidad de área por segundo caen sobre la Tierra, provenientes del transmisor de la nave espacial?

(**Nota**: Tome la distancia Tierra-Luna en 380 Mm y la energía de un fotón a 2GHz es $1{,}3 \times 10^{-24}$J)

— Solución IV Examen Parcial —

Resonancia Electromagnética.

La impedancia que se observa desde la fuente es la siguiente (12.5 pts):

$$Z_T = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} - \frac{1}{\frac{j}{\omega C}}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L} + j\omega C\right)^{-1}$$

$$Z_T = \left(\frac{1}{R} + j\left[\omega C - \frac{1}{\omega L}\right]\right)^{-1}$$

Tomando la premisa que la fuente entra en resonancia con el circuito RLC cuando esta percibe el circuito como si fuera resistivo tenemos (12.5 pts):

$$\Rightarrow \omega C - \frac{1}{\omega L} = 0$$

$$\omega C = \frac{1}{\omega L}$$

$$\omega^2 = \frac{1}{LC}$$

$$2\pi f_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\therefore f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Circuito RLC en Estado Forzado.

a) Para encontrar la resistencia ocupamos encontrar primero I_{rms} del circuito (10 pts)

$$\langle P \rangle = \frac{I_m V_m}{2}\cos\phi = I_{rms}V_{rms}\cos\phi$$

$$\Rightarrow I_{rms} = \frac{\langle P \rangle}{V_{rms}\cos\phi} = \frac{220W}{120V \cdot 0{,}56} = 3{,}27A$$

$$|Z| = \frac{V_{rms}}{I_{rms}} = \frac{120V}{3{,}27A} = 36{,}69\Omega$$

$$\Rightarrow R = Z\cos\phi = 36{,}69\Omega \cdot 0{,}56 = 20{,}55\Omega$$

b) La reactancia estaría dada por (7.5 pts):

$$X_L - X_C = R\tan\phi = 20{,}55\Omega\tan(55{,}94) = 30{,}40\Omega$$

También se podría calcular así:

$$|X_L - X_C| = \sqrt{Z^2 - R^2} = \sqrt{(36{,}69\Omega)^2 - (20{,}55)^2} = 30{,}40\Omega$$

c) Si el circuito estuviera en resonancia $\Rightarrow Z = R$ (7.5 pts)

$$\langle P \rangle_{max} = I_{rms,max} V_{rms} = \frac{V_{rms}^2}{R} = \frac{(120V)^2}{20{,}55\Omega} = 700{,}73W$$

Ondas Electromagnéticas Planas.

a) La longitud de onda está dada por (6 pts):

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{14\times10^6} = 448{,}8nm$$

Esta radiación si es perceptible por el ojo humano, dado que está en el espectro electromagnético visible.

b) La frecuencia de la onda es (5 pts):

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3\times10^8}{4{,}488\times10^{-7}} = 6{,}680 \times 10^{14} Hz$$

c) La onda se propaga en $+x$ y el campo eléctrico está en y, por lo que el campo magnético está en z y vale (7 pts):

$$\vec{B} = \left(1{,}7 \times 10^{-14} T\right) \sin\left(\left(14 \times 10^6 \frac{rad}{m}\right) x - \left(4{,}197 \times 10^{15} \frac{rad}{s}\right) t\right) \hat{\mathbf{k}}$$

d) El vector de Poynting estaría dado por (7 pts):

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \left(6{,}76 \times 10^{-14} \frac{W}{m^2}\right) \sin^2\left(\left(14 \times 10^6 \frac{rad}{m}\right) x - \left(4{,}197 \times 10^{15} \frac{rad}{s}\right) t\right) \hat{\mathbf{i}}$$

Transmisión Electromagnética.

a) El vector de Poynting promedio estaría dado por (6 pts):

$$\langle S \rangle = I = \frac{P}{A} = \frac{10}{4\pi\left(380\times10^6\right)^2} = 5{,}5 \times 10^{-18} \frac{W}{m^2}$$

b) El valor del campo magnético en la Tierra es (6 pts):

$$\langle S \rangle = \frac{c}{2\mu_0} B_m^2$$

$$\Rightarrow B_m = \sqrt{\frac{2\mu_0 \langle S \rangle}{c}} = 2{,}14 \times 10^{-16} T$$

$$B_{rms} = \frac{B_m}{\sqrt{2}} = 1{,}52 \times 10^{-16} T$$

c) El tiempo que le toma a las ondas de radio viajar desde el espacio a la Tierra es (6 pts):

$$t = \frac{r}{c} = \frac{380\times10^6}{3\times10^8} = 1{,}27s$$

d) Con $E = 1{,}3 \times 10^{-24} J$ y $\langle S \rangle = 5{,}5 \times 10^{-18} \frac{J}{m^2 \cdot s}$, el número de fotones por unidad de área y de segundo estaría dado por (7 pts):

$$\frac{\langle S \rangle}{E} = \frac{5{,}5\times10^{-18}}{1{,}3\times10^{-24}} = 4{,}2 \times 10^6 m^{-2} \cdot s^{-1}$$

4. Exámenes Resueltos

IC-2019

“Ser racional es mirar al Universo a la cara y no acobardarse”
- James Clerk Maxwell -

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— I Examen Parcial —

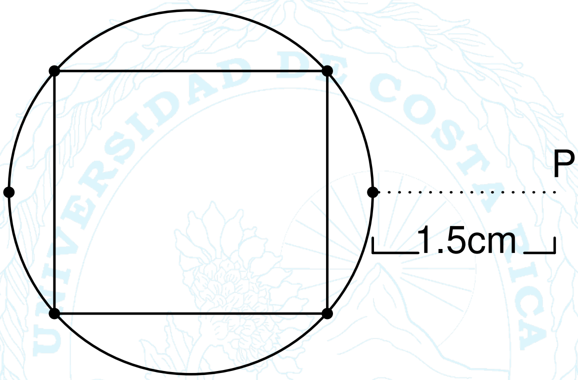
Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Oscilador Armónico Simple.

(**25 pts**) **1.** Una partícula de carga $-q$ y masa m se coloca en medio de dos cargas $+Q$ separadas una distancia L fija. Si la carga negativa se desplaza ligeramente en la dirección perpendicular a la línea que une las cargas positivas, demuestre que el movimiento consiguiente es armónico simple con periodo $\sqrt{\frac{\epsilon_0 m \pi^3 L^3}{qQ}}$.

Fuerza Electrostática.

(**25 pts**) **2.** Seis cargas puntuales Q están dispuestas sobre una circunferencia de radio R. Un cuadrado de lado L está circunscrito en el círculo como se muestra en la figura (el círculo y el cuadrado tienen un mismo centro). Calcule la fuerza electrostática que sentiría una carga de prueba q_0 en el punto P. Considere que $Q = 1\mu C$ y $R = 1cm$.



Campo Eléctrico.

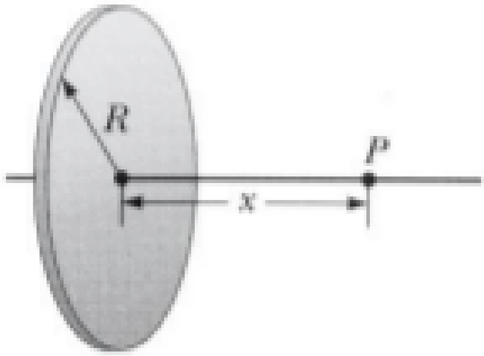
(**25 pts**) **3.** Una distribución de carga esférica ρ se extiende desde $r = 0$ a $r = R$, con

$$\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

Calcular:
(7.5 pts) a) La carga total Q
(10 pts) b) El campo eléctrico en $r < R$
(7.5 pts) c) El campo eléctrico en $r > R$

Potencial Eléctrico.

(**25 pts**) **4.** Un disco de radio R tiene una densidad de carga superficial no uniforme $\sigma = Cr$, donde C es una constante y r se mide a partir del centro del disco a un punto en la superficie del mismo. Determine el potencial en el punto P.



— Solución I Examen Parcial —

Oscilador Armónico Simple.

Al plantear el problema se puede notar que las componentes horizontales de la fuerza se cancelan y la fuerza total sobre la partícula negativa es la suma de las componentes verticales de la fuerza de atracción eléctrica por parte de cada una de las partículas positivas (10 pts)

$$F_T = 2F_y = -2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq\sin\theta}{r^2} = -2\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{y}{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2+y^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Para pequeñas oscilaciones tenemos $y \ll L$ (5 pts)

$$F_T \approx -\left(4\frac{Qq}{\pi\epsilon_0 L^3}\right) y$$

Notar que esta expresión no es más que la ecuación del oscilador armónico simple (5 pts)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

En nuestro caso

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left(4\frac{Qq}{m\pi\epsilon_0 L^3}\right) y = 0$$

Por lo tanto

$$\omega^2 = 4\frac{Qq}{m\pi\epsilon_0 L^3}$$

Sabiendo que (5 pts)

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 m\pi^3 L^3}{qQ}}$$

Fuerza Electrostática.

Por simetría la componente a lo largo del eje y se cancela (5 pts)
Para las cargas en el eje x (5 pts)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq_0}{(2R+d)^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{d^2} = 9\times 10^3\left(\frac{1}{0{,}035^2} + \frac{1}{0{,}015^2}\right) = 4{,}73\times 10^7 q_0$$

Para las cargas de la derecha (5 pts)
La diagonal del cuadrado nos aporta la siguiente información

$$2R = L\sqrt{2} \Rightarrow L = \frac{2R}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 1{,}414$$

Para encontrar el ángulo que me da las componentes, procedemos de la siguiente forma

$$\tan\theta = \frac{\frac{L}{2}}{\frac{2R-L}{2}+d} = \frac{\frac{1{,}414}{2}}{\frac{2-1{,}414}{2}+1{,}5} = \frac{0{,}707}{1{,}793} = 0{,}394$$

$$\Rightarrow \theta = \tan^{-1}(0{,}394) = 21{,}524°$$

$$F = 2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq_0}{\left(\frac{L}{2}\right)^2+\left(\frac{2R-L}{2}+d\right)^2}\cos(21{,}524°) = 4{,}50\times 10^7 q_0$$

Para las cargas de la izquierda (5 pts)

$$\tan\theta = \frac{\frac{L}{2}}{L+\frac{2R-L}{2}+d} = 0{,}22$$

$$\Rightarrow \theta = 12{,}434°$$

$$F = 2\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Qq_0}{\left(\frac{L}{2}\right)^2+\left(\frac{2R-L}{2}+d+L\right)^2}\cos(12{,}434°) = 1{,}63\times 10^7 q_0$$

Por el principio de superposición (5 pts)

$$\vec{F}_T = (4{,}73+4{,}50+1{,}63)\times 10^7 q_0 = \left(1{,}09\times 10^8 q_0\frac{N}{C}\right)\hat{\mathbf{i}}$$

Campo Eléctrico.

(7.5 pts) **a)** La carga total estaría dada por

$$Q = \int \rho(r)\,dV$$

$$Q = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$Q = 4\pi\rho_0\int_0^R\left(r^2-\frac{r^4}{R^2}\right)dr$$

$$Q = 4\pi\rho_0\left(\frac{R^3}{3}-\frac{R^3}{5}\right) = \frac{8\pi}{15}\rho_0 R^3$$

(10 pts) **b)** En este caso se toma la superficie Gaussiana, la cual representa un casquete esférico de radio $r < R$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r}\rho_0\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)r^2\sin\theta\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{r^3}{3}-\frac{r^5}{5R^2}\right)$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0}\left(\frac{r}{3}-\frac{r^3}{5R^2}\right)\hat{\mathbf{r}}$$

(7.5 pts) **c)** En este caso se toma la superficie Gaussiana, la cual representa un casquete esférico de radio $r > R$

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{8\pi\rho_0 R^3}{15\epsilon_0}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{2\rho_0 R^3}{15\epsilon_0 r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

Potencial Eléctrico.

El potencial eléctrico debido a la distribución de carga está dado por (5 pts):

$$dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

El diferencial de carga se expresaría de la siguiente manera (5 pts):

$$dq = \sigma dA = Cr\,(2\pi r dr)$$

Sustituyendo (5 pts)

$$\Rightarrow dV = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\pi C r^2 dr}{\sqrt{r^2+x^2}}$$

La integral a resolver es (5 pts)

$$V = \frac{C}{2\epsilon_0}\int_0^R \frac{r^2 dr}{\sqrt{r^2+x^2}} = \frac{C}{2\epsilon_0}\left[\frac{r}{2}\sqrt{r^2+x^2} - \frac{x^2}{2}\ln\left(r+\sqrt{r^2+x^2}\right)\right]_0^R$$

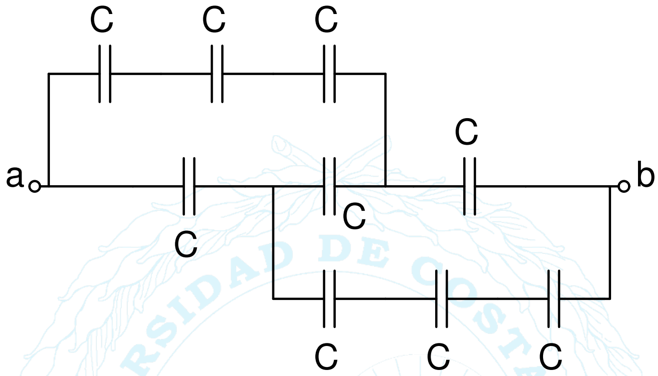
Finalmente (5 pts)

$$V = \frac{C}{4\epsilon_0}\left(R\sqrt{R^2+x^2} + x^2\ln\left(\frac{x}{R+\sqrt{R^2+x^2}}\right)\right)$$

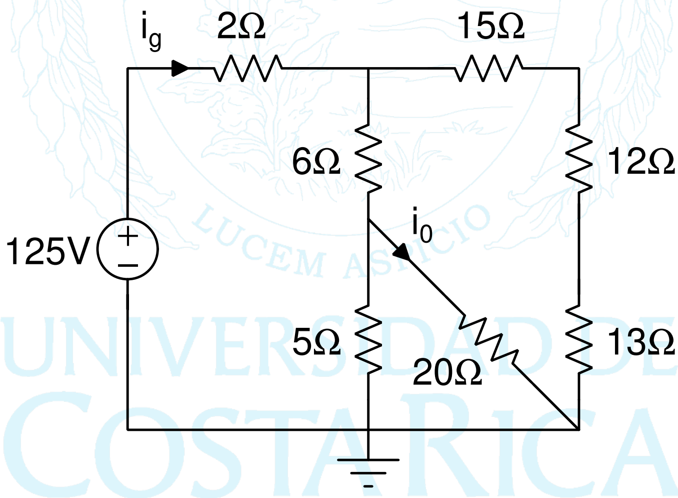
— II Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Circuito Capacitivo.
(**25 pts**) **1.** Dada la siguiente red capacitiva, calcule:
(15 pts) a) la capacitancia equivalente vista desde los puntos a y b.
(5 pts) b) si se conecta una fuente de 5V en las terminales a y b, ¿cuánta carga demanda la red, tomando $C = 2\mu F$?.
(5 pts) c) bajo estas condiciones, ¿cuánta energía almacena la red capacitiva?.



Circuito Resistivo.
(**25 pts**) **2.** Para el siguiente circuito calcule:
(10 pts) a) la corriente i_g que pasa por la resistencia de 2Ω.
(15 pts) b) la corriente i_0 que pasa por la resistencia de 20Ω.



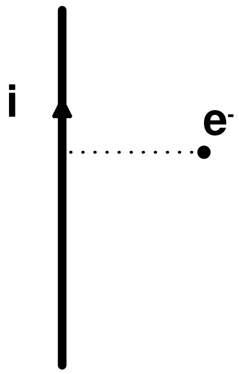
Fuerza Magnética.

(**25 pts**) **3.** Por un conductor rectilíneo muy largo circula una corriente de 20A. Un electrón está situado en el exterior del conductor, a 1 cm de distancia del eje del mismo y se mueve con una velocidad de $5 \times 10^6 \frac{m}{s}$. Hallar la fuerza sobre el electrón cuando se mueve:

(8.5 pts) a) alejándose perpendicularmente al conductor.

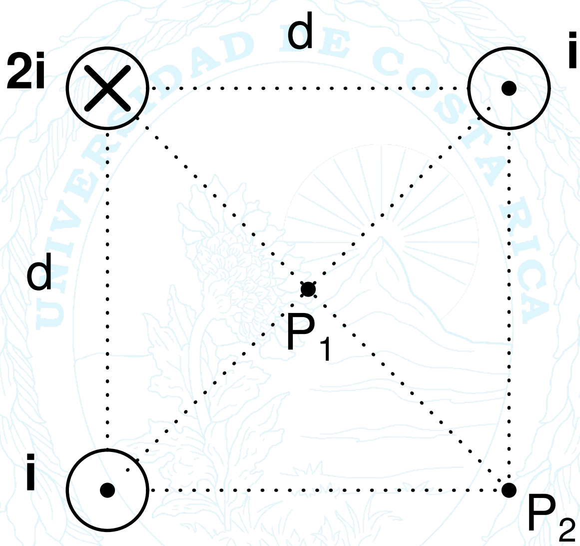
(8.5 pts) b) paralelo al conductor y en sentido de la corriente.

(8 pts) c) perpendicular al conductor y tangente a una circunferencia concéntrica con el conductor.



Campo Magnético.

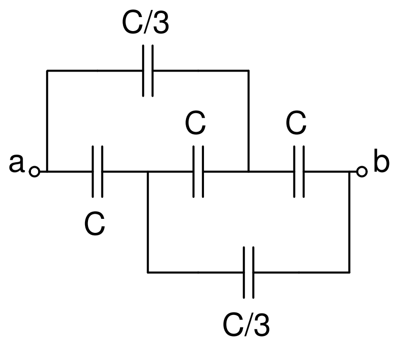
(**25 pts**) **4.** Tres alambres paralelos infinitos están orientados perpendicularmente al plano de la hoja y ubicados en los vértices de un cuadrado de lado d. Uno de ellos lleva corriente $2i$ que entra al plano, mientras que los otros llevan corriente i que emerge del plano de la hoja. Calcule el vector campo magnético en los puntos P_1 y P_2.



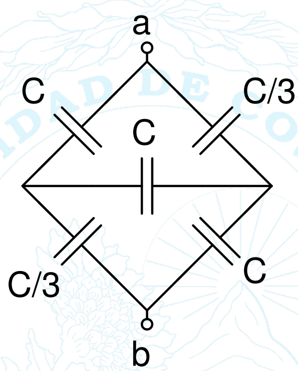
— Solución II Examen Parcial —

Circuito Capacitivo.

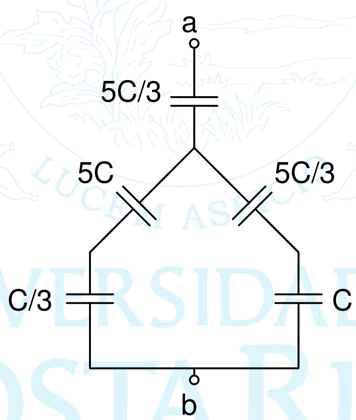
a.) Como primer paso se reducen los capacitores que estan en serie, obteniendo un circuito de esta forma (2.5pts):



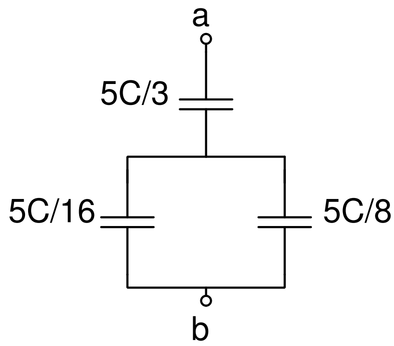
El circuito obtenido no es más que la configuración conocida como Puente de Wheatstone.



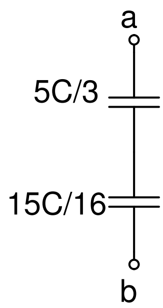
Para reducir este circuito se debe realizar una transformación delta a estrella de la siguiente forma (5pts):



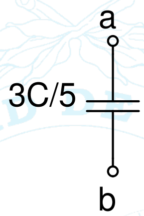
Seguidamente se reducen los capacitores en serie de cada rama en paralelo (2.5pts).



Ahora se reduce el paralelo (2.5pts).



Obteniendo la siguiente capacitancia equivalente (2.5pts).



b.) Tomando $C = 2\mu F$, la capacitancia equivalente es (2.5pts):

$$C_{eq} = 1{,}2\mu F$$

Y la carga que demanda la red estaría dada por (2.5pts):

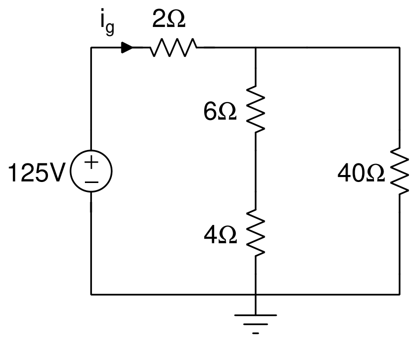
$$q_T = C_{eq}\triangle V = 1{,}2 \times 10^{-6} \cdot 5 = 6 \times 10^{-6} C$$

c.) La energía almacenada por la red es (5pts):

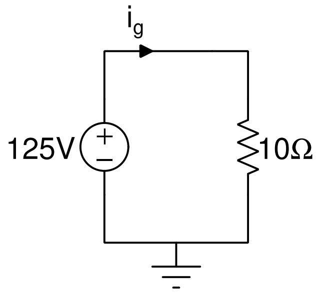
$$U = \frac{1}{2} C_{eq} \left(\triangle V\right)^2 = \frac{1{,}2{\times}10^{-6} \cdot 5^2}{2} = 1{,}5 \times 10^{-5} J$$

Circuito Resistivo.

a.) La corriente i_g es la demandada por la red resistiva, por lo tanto tenemos que encontrar la resistencia equivalente. Calculamos el paralelo y la serie en las dos ramas respectivamente (2.5pts).



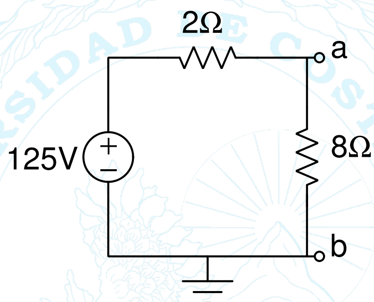
Ahora reducimos las series y el paralelo para obtener el siguiente circuito (5pts).



Finalmente utilizando la ley de Ohm tenemos (2.5pts):

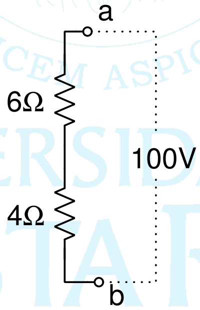
$$i_g = \frac{V}{R} = \frac{125}{10} = 12{,}5A$$

b.) Reducimos el circuito para encontrar el voltaje por la rama que une los punto a y b utilizando un divisor de voltaje (5 pts):



$$V_x = V_s \frac{R_x}{R_{eq}} = 125 \cdot \frac{8}{10} = 100V$$

Ahora utilizando otro divisor de voltaje podemos encontrar la tensión que le cae al paralelo que está representado por la resistencia de 4Ω (5 pts).



$$V_x = V_s \frac{R_x}{R_{eq}} = 100 \cdot \frac{4}{10} = 40V$$

Como en paralelo el voltaje es el mismo, podemos calcular la corriente i_0 (5 pts).

$$i_0 = \frac{V}{R} = \frac{40}{20} = 2A$$

Fuerza Magnética.

La única fuerza que se ejerce sobre el electrón es la correspondiente al campo magnético creado por la corriente eléctrica que circula por el conductor. Para calcular dicha fuerza es necesario conocer la expresión del campo magnético creado por la corriente.
El módulo de dicho campo magnético a una distancia r del conductor se obtiene de forma sencilla por la ley de Ampère, mientras que el sentido es el indicado por la regla de la mano derecha.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\mathbf{i}} = B\hat{\mathbf{i}}$$

Como la expresión de la fuerza de Lorenz es

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

bastará con expresar vectorialmente la velocidad del electrón en cada uno de los casos que nos piden para obtener la respuesta.
a.) (8.5 pts) En es caso $\vec{v} = v_0\hat{\mathbf{k}}$, con lo que

$$\vec{F} = -ev_0B\hat{\mathbf{j}} = -3{,}2 \times 10^{-16}\mathrm{N}\,\hat{\mathbf{j}}$$

por lo que la fuerza va en sentido contrario al de circulación de la corriente.
b.) (8.5 pts) En es caso $\vec{v} = v_0\hat{\mathbf{j}}$, con lo que

$$\vec{F} = ev_0B\hat{\mathbf{k}} = 3{,}2 \times 10^{-16}\mathrm{N}\,\hat{\mathbf{k}}$$

y la fuerza va en el sentido de alejar al electrón del conductor.
c.) (8 pts) En este caso $\vec{v}$ es paralelo o antiparalelo a $\vec{B}$ con lo que su producto vectorial será nulo y, por tanto

$$\vec{F} = 0$$

Campo Magnético.

Para calcular el campo en los lugares pedidos, primero se debe conocer el resultado genérico para el campo magnético producido por un alambre infinito con corriente i circulando en el sentido positivo de $\hat{\mathbf{k}}$. Usando la Ley de Ampère en una superficie de radio r en el plano xy, y asumiendo por simetría $\vec{B} = B(r)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$, entonces:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{r} = \mu_0 i = 2\pi r B \Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

a) (12.5 pts) Ahora volviendo al problema original, primero se calcula el campo en el punto P_1, colocando al origen de los ejes cartesianos sobre P_1, con $\hat{\mathbf{i}}$ horizontal hacia la derecha y $\hat{\mathbf{j}}$ vertical hacia arriba:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi \frac{d}{\sqrt{2}}}\left(\frac{-\hat{\mathbf{i}}+\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\mu_0 i}{2\pi \frac{d}{\sqrt{2}}}\left(\frac{\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{2}}\right) + \frac{\mu_0 (2i)}{2\pi \frac{d}{\sqrt{2}}}\left(\frac{-\hat{\mathbf{i}}-\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{2}}\right)$$

Por lo tanto:

$$\vec{B}\,(P_1) = -\frac{\mu_0 i}{\pi d}\,(\hat{\mathbf{\imath}} + \hat{\mathbf{\jmath}})$$

b) (12.5 pts) Para el cálculo en el punto P_2, se reubica el origen de los ejes en él, nuevamente con $\hat{\mathbf{\imath}}$ horizontal hacia la derecha y $\hat{\mathbf{\jmath}}$ vertical hacia arriba:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\hat{\mathbf{\imath}} + \frac{\mu_0 i}{2\pi d}\hat{\mathbf{\jmath}} + \frac{\mu_0 (2i)}{2\pi d\sqrt{2}}\left(\frac{-\hat{\mathbf{\imath}}-\hat{\mathbf{\jmath}}}{\sqrt{2}}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}\,(P_2) = 0$$

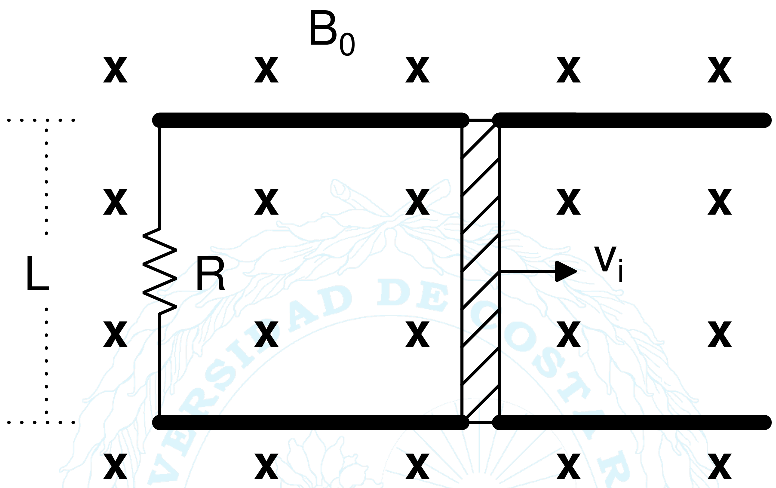
EFis Escuela de Física

— III Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Inducción Eléctrica.

(**25 pts**) **1.** La barra conductora ilustrada en la figura, tiene una masa m y una longitud L, esta puede moverse sobre 2 rieles paralelos sin fricción en presencia de un campo magnético uniforme dirigido hacia adentro de la página. A la barra se le da una velocidad inicial v_i hacia la derecha y se suelta en $t = 0$. Encuentre la velocidad de la barra como una función del tiempo.



Corriente de desplazamiento.

(**25 pts**) **2.** Un dieléctrico de permitividad $3{,}5\times10^{-11}\frac{F}{m}$ llena por completo el volumen entre las placas de un capacitor. Para $t > 0$ el flujo eléctrico a través del dieléctrico es $\left(8{,}0 \times 10^{3}\frac{V\cdot m}{s^3}\right)t^3$. El dieléctrico es ideal y no magnético; la corriente de conducción en el dieléctrico es igual a cero. ¿En qué momento la corriente de desplazamiento en el dieléctrico es igual a $21\mu A$?

Solenoide Toroidal.

(**25 pts**) **3.** Un solenoide toroidal lleno de aire tiene 300 espiras de alambre, $12cm$ de radio medio y $4cm^2$ de área de sección transversal. Si la corriente es de $5A$, calcule:

(5 pts) a) El campo magnético en el solenoide.

(5 pts) b) La inductancia del solenoide.

(5 pts) c) La energía almacenada en el campo magnético.

(5 pts) d) La densidad de energía en el campo magnético.

(5 pts) e) Compruebe la respuesta para el inciso d) dividiendo la respuesta del inciso c) entre el volumen del solenoide.

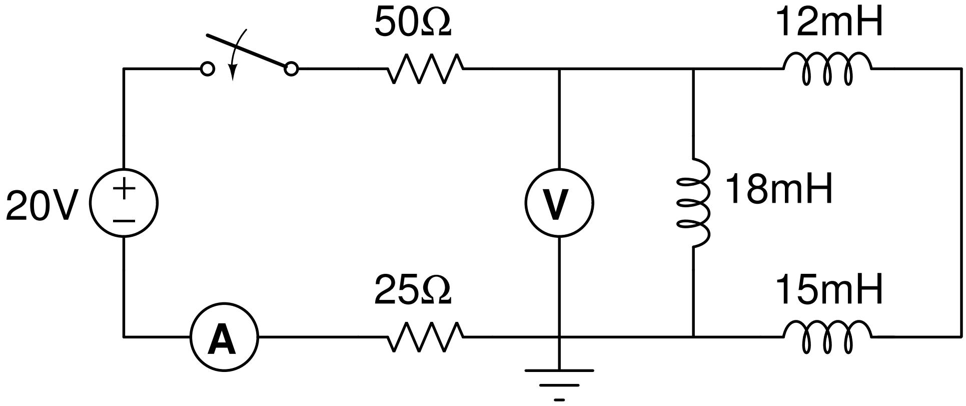
Circuito RL.

(**25 pts**) **4.** En el circuito que se ilustra en la figura, el interruptor ha estado abierto durante un largo tiempo y se cierra de repente.

(5 pts) a) ¿Qué leen el amperímetro y el voltímetro justo después de que se ha cerrado el interruptor?.

(7.5 pts) b) ¿Qué leen el amperímetro y el voltímetro después de que se ha cerrado el interruptor y ha transcurrido mucho tiempo?.

(12.5 pts) c) ¿Qué leen el amperímetro y el voltímetro después de $0{,}115ms$ de haberse cerrado el interruptor?.



— Solución III Examen Parcial —

Inducción Eléctrica.

La corriente inducida está en la dirección contraria a la de las manecillas del reloj y la fuerza magnética es (2.5pts):

$$F_B = -iLB$$

donde el signo negativo significa que la fuerza es hacia la izquierda y retarda el movimiento. Esta es la única fuerza horizontal que actúa sobre la barra y consecuentemente la segunda ley de Newton aplicada al movimiento en la dirección horizontal produce (5pts):

$$F_x = m \cdot a = m \cdot \frac{dv}{dt} = -iLB$$

La fem de movimiento de una espira conductora cerrada cuando la longitud y velocidad son perpendiculares a un campo magnético uniforme, está dada por (5pts):

$$\varepsilon = BvL$$

Por ley de Ohm sabemos (2.5pts):

$$i = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BvL}{R}$$

Sustituyendo i en la ecuación de fuerza tenemos (7.5pts):

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -\left(\frac{BvL}{R}\right) LB$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{B^2L^2}{mR} v$$

$$\frac{dv}{v} = -\frac{B^2L^2}{mR} dt$$

$$\int_{v_i}^{v} \frac{dv}{v} = -\frac{B^2L^2}{mR} \int_0^t dt$$

$$\ln\left(\frac{v}{v_i}\right) = -\left(\frac{B^2L^2}{mR}\right) t$$

A partir de este resultado se ve que la velocidad puede expresarse en la forma exponencial (2.5pts)

$$v(t) = v_i e^{\frac{-t}{\tau}}$$

donde $\tau = \frac{mR}{B^2L^2}$.

Esta expresión indica que la velocidad de la barra disminuye exponencialmente con el tiempo bajo la acción de una fuerza magnética retardadadora.

Corriente de desplazamiento.

Sabiendo que la corriente de desplazamiento para un dieléctrico distinto del vacío está dada por (5pts):

$$i_d = \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt}$$

Sustituyendo el valor de la permitividad eléctrica y derivando el flujo, tenemos (12.5pts):

$$i_d = \left(3{,}5 \times 10^{-11} \frac{F}{m}\right) \left(24{,}0 \times 10^{3} \frac{V \cdot m}{s^3}\right) t^2$$

Despejando t para un valor de $i_d = 21 \times 10^{-6} A$, obtenemos (7.5pts):

$$t = 5{,}0s$$

Solenoide Toroidal.

a.) El campo magnético dentro de un solenoide toroidal está dado por (5 pts):

$$B = \frac{\mu_0 N i}{2\pi r} = \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\frac{T\cdot m}{A}\right)(300)(5A)}{2\pi(0,120m)} = 2{,}5 \times 10^{-3} T$$

b.) La inductancia de un solenoide toroidal está dada por (5 pts):

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{2\pi r} = \frac{\left(4\pi\times10^{-7}\frac{T\cdot m}{A}\right)(300)^2\left(4\times10^{-4}m^2\right)}{2\pi(0,120m)} = 6 \times 10^{-5} H$$

c.) La energía almacenada en el inductor es (5 pts):

$$U_L = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}\left(6 \times 10^{-5} H\right)(5A)^2 = 7{,}50 \times 10^{-4} J$$

d.) La densidad de energía del campo magnético es (5 pts):

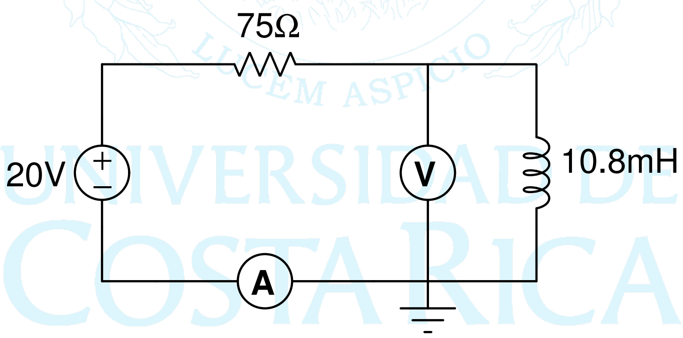
$$u = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\left(2{,}5\times10^{-3}T\right)^2}{2\left(4\pi\times10^{-7}\frac{T\cdot m}{A}\right)} = 2{,}49 \frac{J}{m^3}$$

e.) Dividiendo la respuesta del inciso c) entre el volumen del solenoide obtenemos (5 pts):

$$u = \frac{energía}{volumen} = \frac{7{,}50\times10^{-4}J}{2\pi r A} = \frac{7{,}50\times10^{-4}J}{2\pi(0,120m)\left(4\times10^{-4}m^2\right)} = 2{,}49 \frac{J}{m^3}$$

Circuito RL.

El circuito se puede reducir de la siguiente forma:



Se sabe que el inductor se opone a cambios bruscos de corriente. Por lo tanto inmediatamente que el interruptor se cierra el inductor es un abierto que no permite el flujo de corriente eléctrica ($i_L(0) = 0$, $v_L(0) = v_{max}$).

Mientras que cuando pasa mucho tiempo las condiciones en el inductor cambian, dado que ya no hay cambios de corriente y este se comporta como un corto circuito ($i_L(\infty) = i_{max}$, $v_L(\infty) = 0$).

a.) Al hacer el inductor un abierto, la lectura del amperímetro es $0A$ y la del voltímetro es $20V$.

b.) Al hacer el inductor un corto circuito, la lectura del amperímetro es $i = \frac{20V}{75\Omega} = 0{,}267A$ y la del voltímetro es $0V$.

c.) Usando la ecuación de carga del inductor:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

con $\tau = \frac{L}{R} = \frac{10{,}8mH}{75\Omega} = 0{,}144ms$, $\varepsilon = 20V$, $R = 75\Omega$ y $t = 0{,}115ms$ tenemos:

$$i = \frac{20V}{75\Omega}\left(1 - e^{-\frac{0{,}115ms}{0{,}144ms}}\right) = 0{,}147A$$

Sabemos que esta corriente está atravesando la malla en ese instante, por lo tanto

$$V_R = iR = (0{,}147A)(75\Omega) = 11{,}0V$$

Haciendo una LVK en la malla tenemos:

$$20{,}0V - V_R - V_L = 0$$

$$\Rightarrow V_L = 20{,}0V - V_R = 9{,}0V$$

Por lo que la lectura del amperímetro es $0{,}147A$ y la del voltímetro es $9{,}0V$.

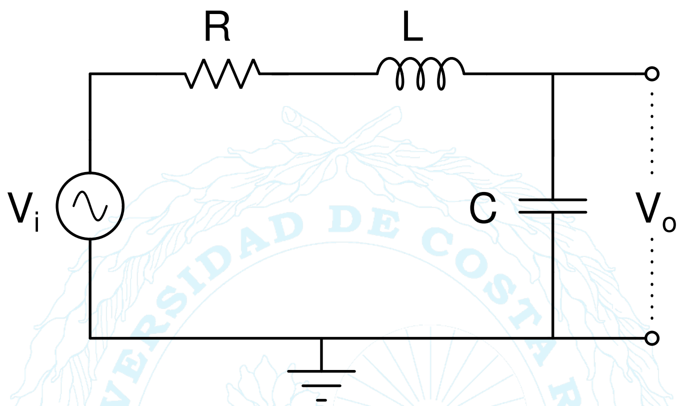
Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— IV Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

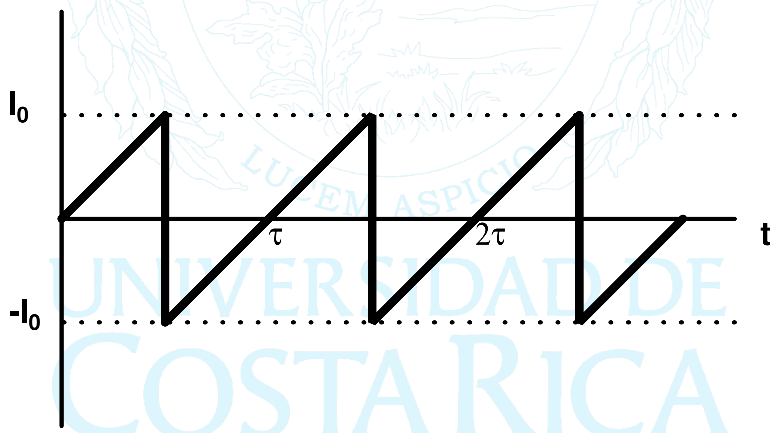
Filtro Paso Bajo.

(**25 pts**) **1.** En la figura se muestra un filtro paso bajo; el voltaje de salida se toma a través del capacitor en el circuito RLC en serie. Obtenga una expresión para $\frac{V_o}{V_i}$, la razón entre las amplitudes del voltaje de salida y de la fuente, como función de la frecuencia angular ω de la fuente. Demuestre que cuando ω es grande, esta razón es proporcional a ω^{-2} y, por lo tanto, es muy pequeña; asimismo, demuestre que la razón se aproxima a la unidad en el límite de las frecuencias pequeñas.



Señal Variable en el Tiempo.

(**25 pts**) **2.** En cierto circuito la corriente varía con el tiempo, como se ilustra en la figura. Determine la corriente media y la corriente rms en términos de I_0.



Resonancia Electromagnética.
(**25 pts**) **3.** Su invento más reciente es una alarma para automóvil que emite un sonido de una frecuencia particularmente molesta de 3500 Hz. Para lograrlo, los circuitos de la alarma deben producir una corriente eléctrica alterna de la misma frecuencia. Por eso, su diseño incluye un inductor y un capacitor en serie. El voltaje máximo entre los extremos del capacitor va a ser 12,0 V (el mismo que la bateria del vehículo). Para producir un sonido suficientemente fuerte, el capacitor debe almacenar 0,0160 J de energía. ¿Qué valores de capacitancia e inductancia se deben elegir para el circuito de la alarma?

Transmisión Electromagnética.
(**25 pts**) **4.** En el siglo XIX el inventor Nikola Tesla propuso transmitir energía eléctrica por medio de ondas electromagnéticas sinusoidales. Suponga que se pretende transmitir energía eléctrica en un haz con área de sección transversal de 100 m^2. ¿Qué amplitudes de campo eléctrico y magnético se requieren para transmitir una cantidad de potencia equivalente a la que transportan las líneas de transmisión modernas (que conducen voltajes y corrientes del orden de 500 kV y 1000 A)?

— Solución IV Examen Parcial —

Filtro Paso Bajo.

Como el problema nos pide una razón de amplitudes de voltaje, tenemos que considerar sólo la magnitud de cada fasor. Para el caso del voltaje de la fuenteV_i, este estaría dado en términos de la corriente y la impedancia del circuito de la siguiente manera (2.5 pts):

$$V_i = i\,|Z_T| = i\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Para el voltaje V_0, medido en las terminales del capacitor, este estaría dado por (2.5 pts):

$$V_0 = i\,|Z_C| = \frac{i}{\omega C}$$

Calculando la razón de amplitudes tenemos (5 pts):

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{\frac{i}{\omega C}}{i\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{1}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Cuando ω es grande (7.5 pts)

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{1}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \approx \frac{1}{\omega C\sqrt{(\omega L)^2}} = \frac{1}{(LC)\omega^2}$$

Cuando ω es pequeño (7.5 pts)

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{1}{\omega C\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \approx \frac{1}{\omega C\sqrt{\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{\omega C}{\omega C} = 1$$

Señal Variable en el Tiempo.

La corriente media está dada por (2.5 pts):

$$I_{prom} = \langle i\,(t)\rangle = \frac{\int i(t)dt}{\int dt}$$

Por lo tanto habría que encontrar la ecuación de la recta, para ello tomamos los siguientes pares ordenados de la gráfica $\left(\frac{\tau}{2}, -I_0\right)$ y $\left(\frac{3\tau}{2}, I_0\right)$. Obteniendo la siguiente ecuación (5 pts):

$$i\,(t) = \frac{2I_0}{\tau}t - 2I_0 = \frac{2I_0}{\tau}\,(t-\tau)$$

Ahora nos disponemos hacer el computo de la corriente media (7.5 pts)

$$\langle i\,(t)\rangle = \frac{\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}} \frac{2I_0}{\tau}(t-\tau)dt}{\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}} dt} = \frac{1}{\tau}\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}} \frac{2I_0}{\tau}\,(t-\tau)\,dt = \frac{2I_0}{\tau^2}\left[\frac{1}{2}t^2 - \tau t\right]_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}}$$

$$\langle i(t)\rangle = \left(\frac{2I_0}{\tau^2}\right)\left(\frac{9\tau^2}{8} - \frac{3\tau^2}{2} - \frac{\tau^2}{8} + \frac{\tau^2}{2}\right) = (2I_0)\,\frac{1}{8}\,(9 - 12 - 1 + 4) = \frac{I_0}{4}\,(13 - 13) = 0$$

La corriente rms está dada por (2.5 pts):

$$I_{rms} = \sqrt{\langle [i(t)]^2\rangle} = \sqrt{\frac{\int [i(t)]^2 dt}{\int dt}}$$

Utilizando la misma función para la corriente tenemos (7.5 pts):

$$\sqrt{\langle [i(t)]^2\rangle} = \sqrt{\frac{\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}} \left[\frac{2I_0}{\tau}(t-\tau)\right]^2 dt}{\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}} dt}} = \sqrt{\frac{1}{\tau}\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}} \frac{4I_0^2}{\tau^2}\,(t-\tau)^2\,dt} = \sqrt{\frac{4I_0^2}{\tau^3}\int_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}} (t-\tau)^2\,dt}$$

$$\sqrt{\langle [i(t)]^2\rangle} = \sqrt{\frac{4I_0^2}{\tau^3}\left[\frac{1}{3}(t-\tau)^3\right]_{\frac{\tau}{2}}^{\frac{3\tau}{2}}} = \sqrt{\frac{4I_0^2}{3\tau^3}\left[\left(\frac{\tau}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\tau}{2}\right)^3\right]} = \sqrt{\frac{I_0^2}{6}\,[1+1]} = \frac{I_0}{\sqrt{3}}$$

Resonancia Electromagnética.

Sabiendo que la energía que almacena el capacitor está dada por (5 pts):

$$U = \frac{1}{2}CV^2$$

Podemos despejar para C de la siguiente manera (10 pts):

$$C = 2\frac{U}{V^2} = 2\frac{(0{,}0160J)}{(12V)^2} = 222\mu F$$

Sabiendo que para que el circuito emita un sonido en la frecuencia dada, debe de estar en resonancia, por lo tanto (10 pts):

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{(2\pi f)^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 3500)^2 222\mu F} = 9{,}31\mu H$$

Transmisión Electromagnética.

Para las ondas electromagnéticas conocemos

$$I = \frac{P}{A}$$

Además,

$$I = \langle S\rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_m^2$$

Por lo tanto (5 pts)

$$E_m = \sqrt{\frac{2P}{A\epsilon_0 c}}$$

Sabiendo que la potencia de transmisión eléctrica está dada por $P = V \cdot i$ obtenemos (10 pts)

$$\Rightarrow E_m = \sqrt{\frac{2P}{A\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2V\cdot i}{A\epsilon_0 c}} = \sqrt{\frac{2\left(5\times10^5 V\right)(1000A)}{\left(100m^2\right)\left(8{,}85\times10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2}\right)\left(3\times10^8\frac{m}{s}\right)}} = 6{,}14\times10^4\frac{V}{m}$$

Sabiendo que $E_m = cB_m$, tenemos (10 pts)

$$\Rightarrow B_m = \frac{E_m}{c} = \frac{6{,}14\times10^4\frac{V}{m}}{3\times10^8\frac{m}{s}} = 2{,}05\times10^{-4}T$$

5. Exámenes Resueltos

IIC-2019

“La vida es y siempre seguirá siendo una ecuación incapaz de resolver, pero tiene ciertos factores que conocemos”

- Nikola Tesla -

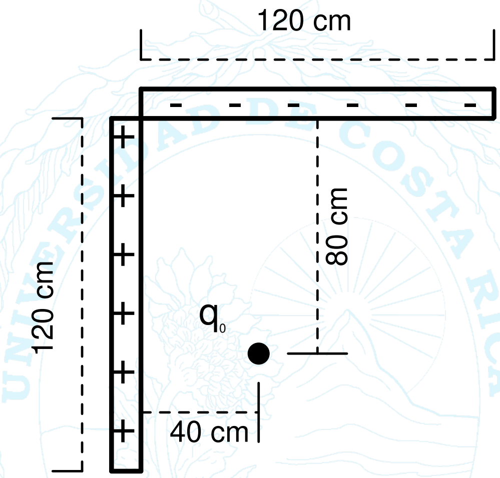
Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— I Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Modelo Atómico.
(**20 pts**) **1.** Considere el modelo de un atómo de hidrógeno en el cual un electrón se encuentra en órbita circular de radio $5{,}29 \times 10^{-11} m$ alrededor de un protón estacionario. ¿Cuál es la rapidez del electrón en esta órbita?.

Fuerza Electrostática.
(**25 pts**) **2.** Dos alambres no conductores de $120 cm$ forman un ángulo recto. Los segmentos tienen $+2{,}50 \mu C$ y $-2{,}50 \mu C$ de carga respectivamente, distribuida de modo uniforme por toda su longiud, como se ilustra en la figura. Encuentre la magnitud y dirección de la fuerza electrostática que ejercen estos alambres sobre la carga q_0.



Campo Eléctrico.
(**30 pts**) **3.** Una región en el espacio contiene una carga total positiva Q que está distribuida en forma esférica de manera que la densidad de carga volumétrica $\rho(r)$ está dada por:

$$\begin{cases} \rho(r) = \frac{3\alpha r}{2R} & r \leq \frac{R}{2} \\ \rho(r) = \alpha \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] & \frac{R}{2} \leq r \leq R \\ \rho(r) = 0 & r \geq R \end{cases}$$

donde α es una constante positiva que tiene unidades de $\frac{C}{m^3}$.
(8 pts) a) Determine α en términos de Q y R.

(15 pts) b) Con base en la ley de Gauss, obtenga una expresión para la magnitud del campo eléctrico como función de r. Realice esto por separado para las tres regiones. Exprese sus respuestas en terminos de la carga total Q.
(3.5 pts) c) ¿Qué fracción de la carga total está contenida dentro de la región $\frac{R}{2} \leq r \leq R$?
(3.5 pts) d) ¿Cuál es la magnitud de $\vec{E}$ en $r = \frac{R}{2}$?

Potencial Eléctrico.
(**25 pts**) **4.** Un diodo de bulbo de vacío consiste en electrodos cilíndricos concéntricos, el cátodo negativo y el ánodo positivo. A causa de la acumulación de carga cerca del cátodo, el potencial eléctrico entre los electrodos no es una función lineal de la posición, tampoco de una geometría plana, sino que está dado por

$$V(x) = Cx^{\frac{4}{3}}$$

donde x es la distancia desde el cátodo, y C es una constante característica de un diodo en particular y de las condiciones de operación. Suponga que la distancia entre el cátodo y el ánodo es de $13{,}0mm$ y que la diferencia de potencial entre los electrodos es de $240V$.
(7 pts) a) Determine el valor de C.
(9 pts) b) Obtenga una fórmula para el campo eléctrico entre los electrodos como función de x.
(9 pts) c) Determine la fuerza sobre un electrón cuando este se encuentra en el punto medio entre los electrodos.

— Solución I Examen Parcial —

Modelo Atómico.

En este problema sólo dos fuerzas actúan en el sistema. La fuerza centrípeta que está dada por (5 pts):

$$F_c = m\frac{v^2}{r}$$

Y la fuerza electrostática, que está dada por (5 pts):

$$F_e = k\frac{e^2}{r^2}$$

Para que el electrón se mantega en una órbita de radio constante se debe cumplir que (5 pts):

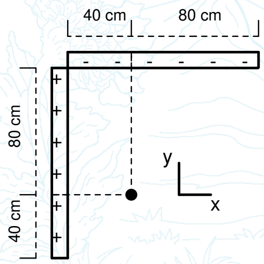
$$F_c = F_e$$

Por lo tanto, despejando para la velocidad tenemos (5 pts):

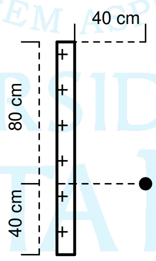
$$m\frac{v^2}{r} = k\frac{e^2}{r^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{ke^2}{mr}} = \sqrt{\frac{\left(8{,}99\times10^9\,\frac{N\cdot m^2}{C^2}\right)\left(1{,}60\times10^{-19}C\right)^2}{\left(9{,}10\times10^{-31}kg\right)\left(5{,}29\times10^{-11}m\right)}} = 2{,}19\times10^6\,\frac{m}{s}$$

Fuerza Electrostática.

Para resolver este problema es necesario dividirlo en dos (barra positiva y barra negativa), tomando en cuenta que cada una de las barras tiene la misma solución analítica, lo que cambia es la distancia entre la carga y cada una de las barras como se muestra en el siguiente diagrama (2.5 pts).



La fuerza que ejerce la barra positiva sobre la carga q_0, se representa en el siguiente diagrama:



Este es el caso de un alambre de longitud L con una carga de prueba a una distancia x que no coincide con su eje de simetría. Por lo tanto tendríamos que resolver las dos componentes de la fuerza (10 pts).

$$\vec{F} = \int d\vec{F}$$

$$d\vec{F} = k\frac{q_0 dq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

$$\begin{cases} F_{1x} = \int k\frac{q_0 dq}{r^2}\cos\theta \\ F_{1y} = \int k\frac{q_0 dq}{r^2}\sin\theta \end{cases}$$

$$dq = \lambda dy$$

$$\begin{cases} F_{1x} = k\lambda x q_0 \int_{-0,4}^{0,8} \frac{dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ F_{1y} = -k\lambda q_0 \int_{-0,4}^{0,8} \frac{y dy}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Utilizando las siguientes identidades

$$\begin{cases} \int \frac{dx}{\left(x^2 \pm a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} \\ \int \frac{x dx}{\left(x^2 \pm a^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \end{cases}$$

Componente x

$$F_{1x} = k\lambda x q_0 \left[\frac{y}{x^2\sqrt{y^2+x^2}}\right]_{-0,4}^{0,8}$$

$$F_{1x} = \left(8{,}99\times10^9\right)\left(2{,}08\times10^{-6}\right)(0{,}4)\,q_0\left[\frac{0{,}8}{0{,}4^2\sqrt{(0{,}8)^2+0{,}4^2}} + \frac{0{,}4}{0{,}4^2\sqrt{(-0{,}4)^2+0{,}4^2}}\right]$$

$$F_{1x} = 7{,}49\times10^4 q_0 \frac{N}{C}$$

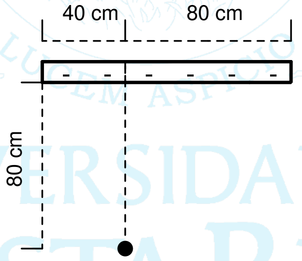
Componente y

$$F_{1y} = -k\lambda q_0 \left[\frac{-1}{\sqrt{y^2+x^2}}\right]_{-0,4}^{0,8}$$

$$F_{1y} = -\left(8{,}99\times10^9\right)\left(2{,}08\times10^{-6}\right)q_0\left[\frac{-1}{\sqrt{(0{,}8)^2+0{,}4^2}} + \frac{1}{\sqrt{(-0{,}4)^2+0{,}4^2}}\right]$$

$$F_{1y} = -1{,}21\times10^4 q_0 \frac{N}{C}$$

Seguidamente procedemos a calcular las componentes de la fuerza debida a la barra negativa (10 pts).



Estas componentes se calculan de la misma forma que se hizo para la barra positiva, tomando en cuenta la inversión de los ejes.

$$\begin{cases} F_{2x} = k\lambda q_0 \int_{-0,4}^{0,8} \frac{x dx}{\left(y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \\ F_{2y} = k\lambda y q_0 \int_{-0,4}^{0,8} \frac{dx}{\left(y^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \end{cases}$$

Componente x

$$F_{2x} = k\lambda q_0 \left[\frac{-1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-0,4}^{0,8}$$

$$F_{2x} = \left(8{,}99 \times 10^9\right)\left(2{,}08 \times 10^{-6}\right) q_0 \left[\frac{-1}{\sqrt{(0{,}8)^2+0{,}8^2}} + \frac{1}{\sqrt{(-0{,}4)^2+0{,}8^2}}\right]$$

$$F_{2x} = 4{,}38 \times 10^3 q_0 \frac{N}{C}$$

Componente y

$$F_{2y} = k\lambda x q_0 \left[\frac{x}{y^2\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-0,4}^{0,8}$$

$$F_{2y} = \left(8{,}99 \times 10^9\right)\left(2{,}08 \times 10^{-6}\right)(0{,}8)\, q_0 \left[\frac{0{,}8}{0{,}8^2\sqrt{(0{,}8)^2+0{,}8^2}} + \frac{0{,}4}{0{,}8^2\sqrt{(-0{,}4)^2+0{,}8^2}}\right]$$

$$F_{2y} = 2{,}70 \times 10^4 q_0 \frac{N}{C}$$

Finalmente para encontrar la fuerza total se suman todos los aportes, de la siguiente forma (2.5 pts):

$$\vec{F_T} = F_{1x} + F_{1y} + F_{2x} + F_{1y}$$

$$\vec{F_T} = \left(7{,}49 \times 10^4 + 4{,}38 \times 10^3\right) q_0 \frac{N}{C}\hat{\mathbf{i}} + \left(-1{,}21 \times 10^4 + 2{,}70 \times 10^4\right) q_0 \frac{N}{C}\hat{\mathbf{j}}$$

$$\vec{F_T} = \left(7{,}93 \times 10^4 q_0 \hat{\mathbf{i}} + 1{,}49 \times 10^4 q_0 \hat{\mathbf{j}}\right)\frac{N}{C}$$

Campo Eléctrico.

(8 pts) a) Para determinar α primero necesitamos conocer cuanto vale Q, la cual se calcula integrando la densidad volumétrica de carga, de la siguiente manera:

$$dQ = \rho(r)\, dV$$

Dada la simetría esférica tenemos

$$dQ = \rho(r)\, dA dr = \rho(r)\, 4\pi r^2 dr$$

Dado que la densidad volumétrica de carga varía con respecto al radio, tenemos que integrar para las repectivas regiones, por lo tanto tenemos

$$dQ = dQ_i + dQ_0$$

Donde

$$\begin{cases} Q_i & r \leq \frac{R}{2} \\ Q_0 & \frac{R}{2} \leq r \leq R \end{cases}$$

Haciendo el cálculo para la primer región tenemos (2.5 pts)

$$Q_i = \int_0^{\frac{R}{2}} \left(\frac{3\alpha r}{2R}\right) 4\pi r^2 dr = \int_0^{\frac{R}{2}} \frac{6\pi\alpha r^3}{R} dr = \frac{6\pi\alpha}{R} \int_0^{\frac{R}{2}} r^3 dr$$

$$Q_i = \left[\frac{6\pi\alpha}{R}\frac{r^4}{4}\right]_0^{\frac{R}{2}} = \frac{3\pi\alpha}{2R}\frac{R^4}{16} = \frac{3}{32}\pi\alpha R^3$$

Procediendo igual para la segunda región (3 pts)

$$Q_0 = \int_{\frac{R}{2}}^{R} \alpha\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] 4\pi r^2 dr = 4\pi\alpha \int_{\frac{R}{2}}^{R} \left[r^2 - \frac{r^4}{R^2}\right] dr = 4\pi\alpha \left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2}\right]_{\frac{R}{2}}^{R}$$

$$Q_0 = 4\pi\alpha\left[\frac{R^3}{3} - \frac{R^5}{5R^2} - \frac{R^3}{24} + \frac{R^5}{160R^2}\right] = 4\pi\alpha R^3\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{24} + \frac{1}{160}\right] = \frac{47}{120}\pi\alpha R^3$$

Sumando la carga en ambas regiones podemos encontrar la carga total, la cual estaría dada por (2.5 pts):

$$Q = \left(\frac{3}{32} + \frac{47}{120}\right)\pi\alpha R^3 = \frac{233}{480}\pi\alpha R^3$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{480Q}{233\pi R^3}$$

(15 pts) b) Para $r \leq \frac{R}{2}$ la ley de Gauss estaría dada por (5.5 pts):

$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{4\pi}{\epsilon_0}\int_0^r \left(\frac{3\alpha r'}{2R}\right) r'^2 dr' = \frac{6\pi\alpha}{\epsilon_0 R}\int_0^r r'^3 dr'$$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \left[\frac{6\pi\alpha}{\epsilon_0 R}\frac{r'^4}{4}\right]_0^r = \frac{3\pi\alpha r^4}{2\epsilon_0 R}$$

$$\Rightarrow E = \frac{3\alpha r^2}{8\epsilon_0 R}$$

Sustituyendo el valor de α, obtenemos:

$$E = \frac{180Qr^2}{233\pi\epsilon_0 R^4}$$

Para $\frac{R}{2} \leq r \leq R$ la ley de Gauss estaría dada por (7 pts):

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q_i}{\epsilon_0} + \frac{4\pi\alpha}{\epsilon_0}\int_{\frac{R}{2}}^{r}\left[1 - \left(\frac{r'}{R}\right)^2\right] r'^2 dr' = \frac{Q_i}{\epsilon_0} + \frac{4\pi\alpha}{\epsilon_0}\int_{\frac{R}{2}}^{r}\left[r'^2 - \frac{r'^4}{R^2}\right] dr'$$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q_i}{\epsilon_0} + \frac{4\pi\alpha}{\epsilon_0}\left[\frac{r'^3}{3} - \frac{r'^5}{5R^2}\right]_{\frac{R}{2}}^{r} = \frac{Q_i}{\epsilon_0} + \frac{4\pi\alpha}{\epsilon_0}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^5}{5R^2} - \frac{R^3}{24} + \frac{R^5}{160R^2}\right]$$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{3}{128}\frac{4\pi\alpha R^3}{\epsilon_0} + \frac{4\pi\alpha R^3}{\epsilon_0}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{r}{R}\right)^5 - \frac{17}{480}\right] = \frac{4\pi\alpha R^3}{\epsilon_0}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{r}{R}\right)^5 - \frac{23}{1920}\right]$$

$$\Rightarrow E = \frac{\alpha R^3}{\epsilon_0 r^2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{r}{R}\right)^5 - \frac{23}{1920}\right]$$

Sustituyendo el valor de α, obtenemos:

$$E = \frac{480Q}{233\pi\epsilon_0 r^2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{r}{R}\right)^3 - \frac{1}{5}\left(\frac{r}{R}\right)^5 - \frac{23}{1920}\right]$$

Para $r \geq R$ estaríamos encerrando toda la carga, por lo tanto (2.5 pts)

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$E\left(4\pi r^2\right) = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

(3.5 pts) c) La fracción contenida dentro de la región $\frac{R}{2} \leq r \leq R$, está dada por:

$$\frac{Q_0}{Q} = \frac{\frac{47\pi\alpha R^3}{120}}{\frac{233\pi\alpha R^3}{480}} = \frac{188}{233} = 0{,}807$$

(3.5 pts) d) En $r = \frac{R}{2}$, la magnitud de $\vec{E}$, sería

$$E = \frac{45Q}{233\pi\epsilon_0 R^2}$$

Potencial Eléctrico.

(7 pts) a) Para determinar el valor de C basta con evaluar los datos suministrados por el problema y despejar.

$$C = \frac{V}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{(240V)}{\left(13{,}0\times10^{-3}m\right)^{\frac{4}{3}}} = 7{,}85\times10^4\frac{V}{m^{\frac{4}{3}}}$$

(9 pts) b) Sabiendo que $\vec{E} = -\nabla V$, tenemos:

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{4}{3}Cx^{\frac{1}{3}} = -\left(1{,}05\times10^5\frac{V}{m^{\frac{4}{3}}}\right)x^{\frac{1}{3}}$$

(9 pts) c) Sabiendo que:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

$$\Rightarrow F_x = -eE_x = e\frac{4}{3}Cx^{\frac{1}{3}}$$

El punto medio entre los electrodos está dado por $x = 6{,}50\times10^{-3}m$, por lo tanto la fuerza sería:

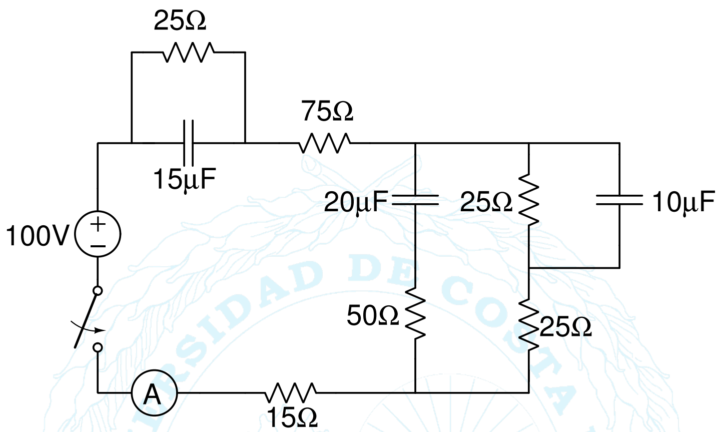
$$F_x = \frac{4}{3}\left(1{,}602\times10^{-19}C\right)\left(7{,}85\times10^4\frac{V}{m^{\frac{4}{3}}}\right)\left(6{,}50\times10^{-3}m\right)^{\frac{1}{3}} = 3{,}13\times10^{-15}N$$

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

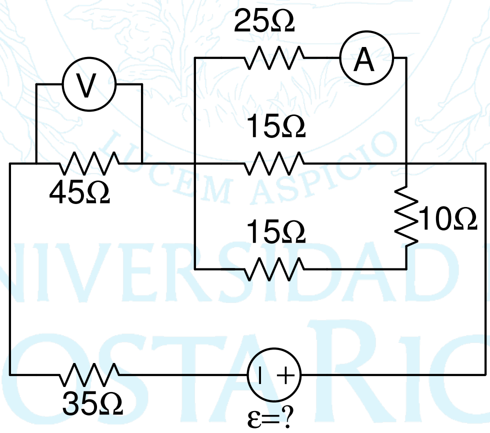
— II Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Circuito RC.
(**25 pts**) **1.** En el circuito de la figura, todos los capacitores están descargados al principio, la fuente de voltaje no tiene resistencia interna, y el amperímetro es ideal. Calcule la lectura del amperímetro
(12.5 pts) a) inmediatamente después de haber cerrado el interruptor.
(12.5 pts) b) mucho tiempo después de que se cerró el interruptor.

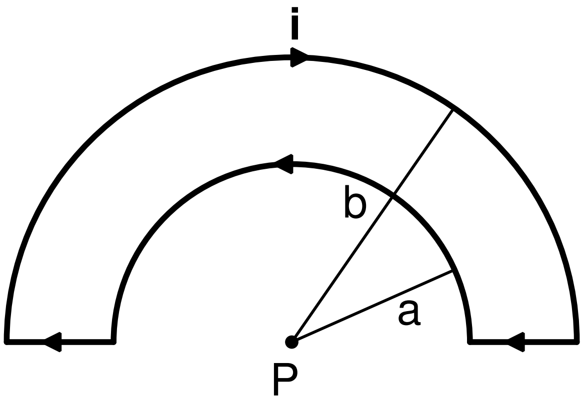


Circuito Resistivo.
(**25 pts**) **2.** Para el circuito que se presenta en la figura, los medidores son ideales, la fuente de voltaje no tiene resistencia apreciable y el amperímetro da una lectura 1.25 A.
(15 pts) a) ¿Cuál es la lectura del voltímetro?
(10 pts) b) ¿Cuál es la fem ε de la fuente de voltaje?



Campo Magnético.

(**25 pts**) **3.** Los semicírculos de alambre que se muestran en la figura tienen radios a y b. Calcule el campo magnético neto (magnitud y dirección) que produce la corriente de los alambres en el punto P.



Ley de Ampère.

(**25 pts**) **4.** Un cilindro sólido, largo, recto y orientado con su eje en la dirección z conduce una corriente cuya densidad es $\vec{J}$. La densidad de corriente, aunque simétrica con respecto al eje del cilindro, no es constante y varía de acuerdo con la relación

$$\begin{cases} \vec{J} = \left(\frac{b}{r}\right) e^{\frac{r-a}{\delta}} \hat{\mathbf{k}} & r \leq a \\ \vec{J} = 0 & r > a \end{cases}$$

donde el radio del cilindro es $a = 5{,}00\ cm$, r es la distancia radial desde el eje del cilindro, b es una constante igual a $600\ \frac{A}{m}$ y δ es una constante igual a $2{,}50\ cm$.

(9 pts) a) Sea I_0 la corriente total que pasa a través de toda la sección transversal del alambre. Obtenga una expresión para I_0 en términos de b, δ y a y evalúela para obtener un valor númerico de I_0.

(4.5 pts) b) Con base en la ley de Ampère, obtenga una expresión para el campo magnético $\vec{B}$ en la región $r > a$. Exprese su respuesta en términos de I_0 en lugar de b.

(7 pts) c) Obtenga una expresión para la corriente I contenida en una sección transversal circular de radio $r \leq a$ y con centro en el eje del cilindro. Exprese su respuesta en términos de I_0 en lugar de b.

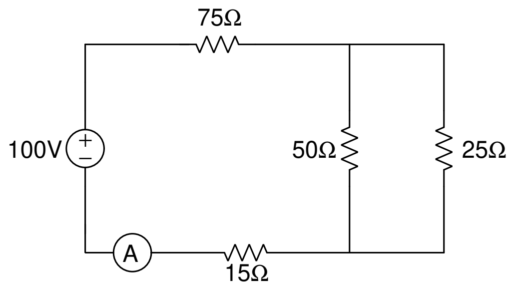
(4.5 pts) d) Con base en la ley de Ampère, obtenga una expresión para el campo magnético $\vec{B}$ en la región $r \leq a$.

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— Solución II Examen Parcial —

Circuito RC.

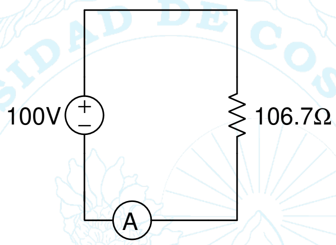
(12.5 pts) a.) Inmediatamente después de haber cerrado el interruptor, los capacitores se comportan como corto circuitos. Por lo tanto el diagrama resultante se ve la siguiente forma (5pts):



La resistencia del circuito equivalente estaría dada por (5pts):

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{50\Omega}\right)^{-1} + 75\Omega + 15\Omega = 106{,}7\Omega$$

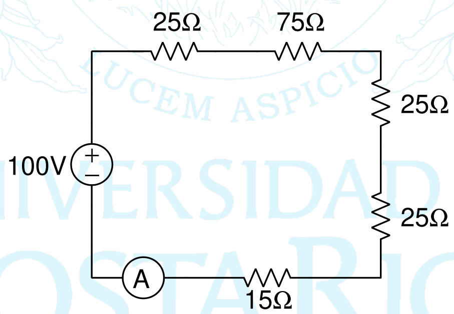
El cual se representaría de la siguiente manera:



Finalmente, para encontrar la lectura del amperímetro aplicamos ley de Ohm (2.5pts)

$$i = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{100V}{106{,}7\Omega} = 0{,}937A$$

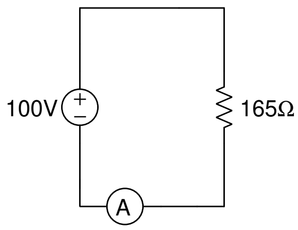
(12.5 pts) b.) Mucho tiempo después de que se cerró el interruptor, los capacitores se comportan como circuitos abiertos. Por lo tanto el diagrama resultante se ve la siguiente forma (5pts):



La resistencia del circuito equivalente estaría dada por (5pts):

$$R_{eq} = 25\Omega + 75\Omega + 25\Omega + 25\Omega + 15\Omega = 165\Omega$$

El cual se representaría de la siguiente manera:



Finalmente, para encontrar la lectura del amperímetro aplicamos ley de Ohm (2.5pts)

$$i = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{100V}{165\Omega} = 0{,}606A$$

Circuito Resistivo.

(15 pts) a.) Si la corriente por la rama del paralelo es de 1.25 A, utilizando la ley de Ohm podríamos conocer el voltaje que cae sobre esa rama (3pts)

$$V = iR = (1{,}25A)(25\Omega) = 31{,}25V$$

Como en paralelo el voltaje es el mismo, se pueden calcular las otras dos corrientes de las ramas restantes (6pts)

$$i_{15\Omega} = \frac{(31{,}25V)}{(15\Omega)} = 2{,}083A$$

$$i_{15\Omega+10\Omega} = \frac{(31{,}25V)}{(15\Omega+10\Omega)} = 1{,}25A$$

Por lo tanto la corriente total que saldría del nodo del paralelo estaría dada por (3pts):

$$i_{total} = i_{25\Omega} + i_{15\Omega} + i_{15\Omega+10\Omega} = 1{,}25A + 2{,}083A + 1{,}25A = 4{,}58A$$

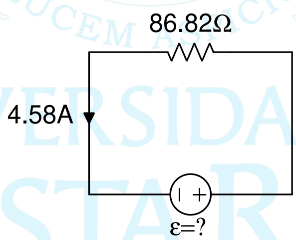
Sabiendo que esta corriente es la que atraviesa la resistencia de 45Ω, por ley de Ohm podemos encontrar la lectura del voltímetro (3pts)

$$V = iR = (4{,}58A)(45\Omega) = 206{,}1V$$

(10 pts) b.) Para encontrar el valor de la fem, tenemos que encontrar la resistencia equivalente, la cual está dada por (6 pts):

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{15\Omega} + \frac{1}{15\Omega+10\Omega}\right)^{-1} + 45\Omega + 35\Omega = 86{,}82\Omega$$

El circuito equivalente se ve de la siguiente forma



Finalmente por ley de Ohm podemos calcular el valor de la fem (4 pts)

$$V = iR = (4{,}58A)(86{,}82\Omega) = 397{,}63V$$

Campo Magnético.

Se puede notar que las dos secciones de alambre recto no producen ningún aporte al campo magnético sobre el punto P. Por lo tanto sólo los dos semicírculos estarían contribuyendo al campo magnético en el punto P (4 pts).

Sabemos que la magnitud del campo magnético en el centro de un anillo circular de radio R está dada por (5 pts):

$$B = \frac{\mu_0 i}{2R}$$

Para el caso de un semicírculo este estaría dado por (2 pts):

$$B = \frac{\mu_0 i}{4R}$$

El anillo semicircular de radio a produce un campo magnético dirigiéndose fuera de la página. Mientras que el anillo semicircular de radio b produce un campo magnético dirigiéndose hacia dentro de la página (4 pts).

Por lo tanto el campo magnético resultante en el punto P, estaría dado por (7.5 pts):

$$B = B_a - B_b = \frac{\mu_0 i}{4}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Y su dirección sería saliendo de la página (2.5 pts).

Ley de Ampère.

(9 pts) a) La corriente total I_0 que pasa a través de toda la sección transversal del alambre estaría dada por (7 pts):

$$I_0 = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$I_0 = \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(\frac{b}{r} e^{\frac{r-a}{\delta}}\right) r dr d\theta = 2\pi b \int_0^a e^{\frac{r-a}{\delta}} dr$$

$$I_0 = 2\pi b\delta \left[e^{\frac{r-a}{\delta}}\right]_0^a = 2\pi b\delta \left(1 - e^{-\frac{a}{\delta}}\right)$$

Evaluando para los valores dados, tenemos (2 pts)

$$I_0 = 2\pi \left(600\frac{A}{m}\right)(0{,}025m)\left(1 - e^{-\frac{0{,}050}{0{,}025}}\right) = 81{,}5A$$

(4.5 pts) b) Para $r > a$ utilizando la ley de Ampère, podemos encontrar la expresión para el campo magnético de la siguiente manera:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_0$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

(7 pts) c) Para $r \leq a$ la corriente contenida en una sección circular transversal, se calcula de la siguiente forma:

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \int_0^r \left(\frac{b}{r'} e^{\frac{r'-a}{\delta}} \right) r' dr' d\theta = 2\pi b \int_0^r e^{\frac{r'-a}{\delta}} dr'$$

$$I(r) = 2\pi b \delta \left[e^{\frac{r'-a}{\delta}} \right]_0^r = 2\pi b \delta \left(e^{\frac{r-a}{\delta}} - e^{-\frac{a}{\delta}} \right) = 2\pi b \delta e^{-\frac{a}{\delta}} \left(e^{\frac{r}{\delta}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow I(r) = I_0 \frac{\left(e^{\frac{r}{\delta}} - 1 \right)}{\left(e^{\frac{a}{\delta}} - 1 \right)}$$

(4.5 pts) d) Para $r \leq a$ utilizando la ley de Ampère, podemos encontrar la expresión para el campo magnético de la siguiente manera:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$B(2\pi r) = \mu_0 I_0 \frac{\left(e^{\frac{r}{\delta}} - 1 \right)}{\left(e^{\frac{a}{\delta}} - 1 \right)}$$

$$\Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_0 \left(e^{\frac{r}{\delta}} - 1 \right)}{2\pi r \left(e^{\frac{a}{\delta}} - 1 \right)}$$

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

— III Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Inducción Eléctrica.

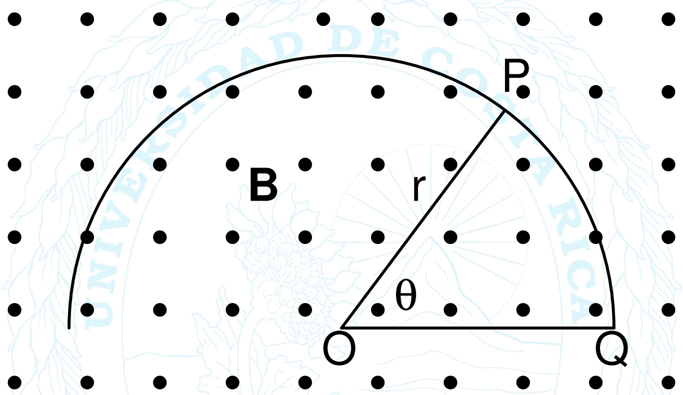
(**30 pts**) **1.** Un alambre, cuya superficie transversal mide 1.2 mm^2 y cuya resistividad es de $1{,}7 \times 10^{-8}\ \Omega \cdot m$ se dobla para formar un arco circular de 24 cm de radio según se indica en la figura. Una longitud adicional de este alambre, OP, puede girar libremente alrededor de O y establecer un contacto deslizante con el arco en P. Finalmente, otra longitud recta de este alambre OQ completa el circuito. El arreglo está íntegramente situado en un campo magnético $B = 0{,}15\ T$ que se dirige hacia afuera del plano de la figura. El alambre recto OP parte del reposo con $\theta = 0$ y tiene una aceleración angular constante de 12 $\frac{rad}{s^2}$.

(5 pts) a) Calcule la resistencia de la espira OPQO en función de θ.

(5 pts) b) Encuentre el flujo magnético a través de la espira en función de θ.

(15 pts) c) ¿Con qué valor de θ se alcanza el valor máximo de la corriente inducida en la espira?.

(5 pts) d) ¿Cuál es el máximo valor de la corriente inducida en la espira?.



Momento Dipolar Magnético.

(**25 pts**) **2.** Un electrón con energía cinética K_e describe una trayectoria circular que es perpendicular a un campo magnético uniforme, sometido sólo a la fuerza de este último. Demuestre que el momento dipolar magnético a causa de su movimiento orbital tiene una magnitud $\mu = \frac{K_e}{B}$ y que sigue una dirección contraria a $\vec{B}$.

Inductancia.

(**20 pts**) **3.** La inductancia de una bobina de N vueltas enrollada compactamente es tal que una fuerza electromotriz de $3{,}0mV$ se induce cuando la corriente cambia con una rapidez de $5{,}0\frac{A}{s}$. Una corriente estacionaria de $8{,}0A$ produce un flujo magnético de $40\mu Wb$.

(10 pts) a) Calcule la inductancia de la bobina.

(10 pts) b) ¿Cuántas vueltas tiene?.

Circuito RL.

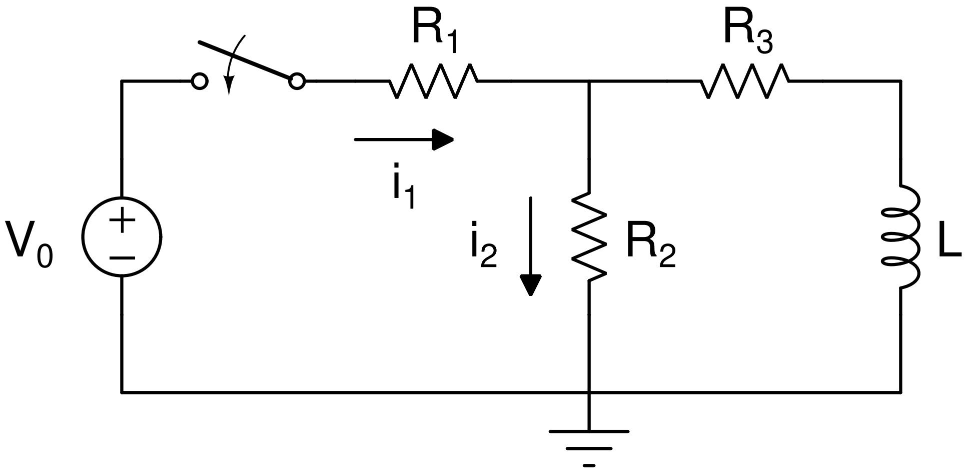
(**25 pts**) **4.** En la figura, $V_0 = 100V$, $R_1 = 10\Omega$, $R_2 = 20\Omega$, $R_3 = 30\Omega$ y $L = 2{,}0H$. Determine los valores de i_1 e i_2

(6 pts) a) Inmediatamente después de cerrar el interruptor.

(10 pts) b) Mucho tiempo después de haberlo cerrado.

(6 pts) c) Inmediatamente después de volverlo abrir, luego de pasar mucho tiempo cerrado.

(3 pts) d) Mucho tiempo después de esta apertura.



— Solución III Examen Parcial —

Inducción Eléctrica.

(5 pts) a) Sabemos que la resistencia de un alambre está dada por:

$$R = \rho \frac{L}{A} = \rho \frac{(2r + r\theta)}{A}$$

Sustituyendo los valores tenemos:

$$R = \rho \frac{r(2+\theta)}{A} = \left(1{,}7 \times 10^{-8}\Omega \cdot m\right) \frac{\left(24 \times 10^{-2} m\right)(2+\theta)}{\left(1{,}2 \times 10^{-6} m^2\right)} = \left(3{,}4 \times 10^{-3}\Omega\right)(2+\theta)$$

(5 pts) b) El flujo magnético está dado por:

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \int_0^{\theta} \int_0^{r} r' dr' d\theta$$

$$\Phi_B = \frac{B\theta r^2}{2}$$

Sustituyendo los valores tenemos:

$$\Phi_B = \frac{(0{,}15T)\left(24 \times 10^{-2} m\right)^2}{2} \theta = \left(4{,}32 \times 10^{-3} Wb\right)\theta$$

(15 pts) c) La corriente eléctrica por ley de Ohm está dada por:

$$i = \frac{\varepsilon}{R}$$

La magnitud de la fem estaría dada por:

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{B \frac{d\theta}{dt} r^2}{2} = \frac{B\omega r^2}{2}$$

Del inciso a) conocemos la expresión para la resistencia

$$R = \rho \frac{r(2+\theta)}{A}$$

Sustituyendo estas dos expresiones en la ley de Ohm, obtenemos (4 pts):

$$i = \frac{BA\omega r}{2\rho(2+\theta)}$$

Del movimiento circular conocemos (2 pts)

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t$$

Utilizando las condiciones iniciales que nos brinda el problema ($\theta_0 = 0$ y $\omega_0 = 0$), tenemos:

$$\theta(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\omega\left(t\right) = \alpha t$$

Por lo tanto la corriente quedaría expresada en función del tiempo de la siguiente manera (2 pts):

$$i = \frac{BA\alpha tr}{\rho\left(\alpha t^2+4\right)}$$

Para encontrar el valor máximo de corriente tenemos que derivar e igualar a cero la función.

$$\frac{di}{dt} = 0$$

Derivando (4 pts)

$$\frac{di}{dt} = \frac{BA\alpha r\left(\alpha t^2+4\right)-BA\alpha tr(2\alpha t)}{\rho^2\left(\alpha t^2+4\right)^2}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{BA\alpha^2 rt^2+4BA\alpha r-2BA\alpha^2 rt^2}{\rho^2\left(\alpha t^2+4\right)^2}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{4BA\alpha r-BA\alpha^2 rt^2}{\rho^2\left(\alpha t^2+4\right)^2}$$

$$\frac{di}{dt} = \frac{BA\alpha r\left(4-\alpha t^2\right)}{\rho^2\left(\alpha t^2+4\right)^2}$$

Igualando a cero (2 pts)

$$\frac{BA\alpha r\left(4-\alpha t^2\right)}{\rho^2\left(\alpha t^2+4\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4-\alpha t^2 = 0$$

$$\alpha t^2 = 4$$

Sutituyendo este resultado en la ecuación para la posición del alambre, obtenemos el valor máximo (1 pto).

$$\theta\left(t\right)_{max} = \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = \tfrac{1}{2}\left(4\right) = 2rad$$

(5 pts) d) Como sólo conocemos la acelaración angular y la posición máxima, tenemos que usar la siguiente ecuación del movimiento circular (2 pts):

$$\omega^2\left(t\right) = \omega_0^2 + 2\alpha\theta\left(t\right)$$

Utilizando las condiciones iniciales que nos brinda el problema ($\theta_0 = 0$ y $\omega_0 = 0$), tenemos:

$$\omega\left(t\right) = \sqrt{2\alpha\theta\left(t\right)}$$

Por lo que el máximo valor de la corriente inducida estaría dado por (3 pts):

$$i = \frac{BA\omega r}{2\rho(2+\theta)} = \frac{BA\sqrt{2\alpha\theta(t)_{max}}r}{2\rho(2+\theta(t)_{max})} = \frac{(0{,}15T)\left(1{,}2\times10^{-6}m^2\right)\sqrt{2\left(12\frac{rad}{s^2}\right)(2rad)}\left(24\times10^{-2}m\right)}{2\left(1{,}7\times10^{-8}\Omega\cdot m\right)(2+2rad)} = 2{,}2A$$

Momento Dipolar Magnético.

La energía cinética del electrón estaría dada por (3 pts):

$$K_e = \frac{1}{2}mv^2$$

Si describe una trayectoria circular, es porque se encuentra inmerso bajo la influencia de una aceleración centrípeta, por lo tanto (3 pts):

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

Al verse sometido a un campo magnético uniforme perpedicular a su trayectoria, experimentaría una fuerza debido a este último, dada por (3 pts):

$$F_B = qvB$$

Para conservar su trayectoria circular y no salir de su órbita, las fuerzas tienen que compensarse, por lo tanto el radio de la trayectoria de su circunferencia estaría dado por (4 pts):

$$F_c = F_B$$

$$\frac{mv^2}{r} = qvB$$

$$\Rightarrow r = \frac{mv}{qB}$$

Sabemos que la velocidad está dada por (3 pts):

$$v = \frac{d}{t}$$

En un periodo tenemos

$$v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v}$$

La corriente efectiva estaría dada por (3 pts):

$$i = \frac{q}{T}$$

Sustituyendo para T, obtenemos:

$$i = \frac{qv}{2\pi r}$$

Finalmente el momento dipolar magnético está dado por (3 pts):

$$\mu = iA = \frac{qv}{2\pi r}\left(\pi r^2\right) = \frac{qvr}{2}$$

Multiplicando esta última expresión por $\frac{mv}{mv}$, obtenemos (3 pts):

$$\mu = \frac{qmv^2 r}{2mv} = \left(\frac{1}{2}mv^2\right)\left(\frac{qr}{mv}\right) = \frac{K_e}{B}$$

Y su dirección tiene que ser opuesta a la del campo magnético para mantenerse en una trayectoria circular de radio constante.

Inductancia.

(10 pts) a.) Sabiendo que la fuerza electromotriz sobre una bobina está dada por $\varepsilon_L = L\frac{di}{dt}$, podemos despejar para la inductancia

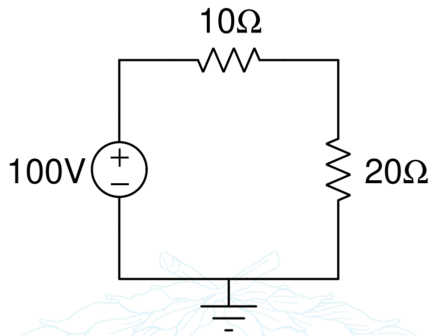
$$L = \frac{\varepsilon_L}{di/dt} = \frac{(3{,}0mV)}{5{,}0\frac{A}{s}} = 6{,}0 \times 10^{-4}H$$

(10 pts) b.) De la ecuación para el cálculo de la inductancia podemos despejar el valor del número de vueltas de la siguiente forma:

$$N = \frac{iL}{\Phi_B} = \frac{(8{,}0A)\left(6{,}0\times10^{-4}H\right)}{40\times10^{-6}W} = 120$$

Circuito RL.

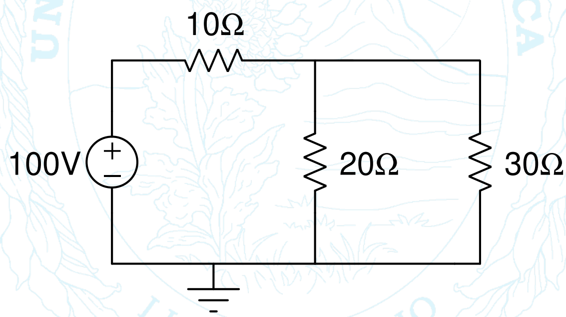
(6 pts) a) Inmediatamente después de cerrar el interruptor, el inductor es un abierto por lo tanto el circuito se ve de la siguiente forma (2 pts):



Lo que hace que $i_1 = i_2$ y esté dado por (4 pts):

$$i_1 = \frac{V_0}{R_1+R_2} = \frac{(100V)}{(10\Omega)+(20\Omega)} = 3{,}33A$$

(10 pts) b) Mucho tiempo después de haberlo cerrado, el inductor es un corto por lo tanto el circuito se ve de la siguiente manera (2 pts):



Por lo que la resistencia equivalente estaría dada por (2 pts):

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{30\Omega}\right)^{-1} + 10\Omega = 22\Omega$$

Finalmente por ley de Ohm (2 pts)

$$i_1 = \frac{V_0}{R_{eq}} = \frac{(100V)}{(22\Omega)} = 4{,}55A$$

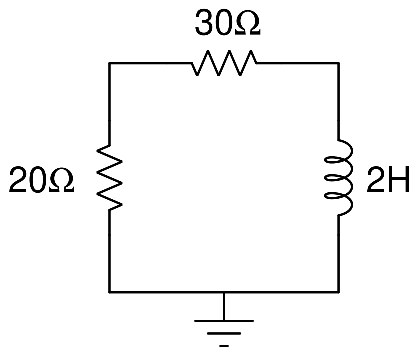
Luego se hace una malla, de la siguiente manera (2 pts)

$$\Delta V_2 = (100V) - (4{,}55A)(10\Omega) = 54{,}5V$$

De la misma forma por ley de Ohm podemos sacar el valor de i_2 (2 pts)

$$i_2 = \frac{(54{,}5V)}{(20\Omega)} = 2{,}73A$$

(6 pts) c) Inmediatamente después de volverlo abrir, luego de pasar mucho tiempo cerrado, el circuito toma la forma (2 pts)



Por lo tanto habría que calcular la corriente que pasaba por el inductor exactamente antes de abrir el interruptor, la cual está dada por (2 pts):

$$i_3 = (4{,}55A) - (2{,}73A) = 1{,}82A$$

Por lo tanto (2 pts)

$$\begin{cases} i_1 = 0A \\ i_2 = 1{,}82A \end{cases}$$

(3 pts) d) Mucho tiempo después de esta apertura, el inductor se descarga en las resistencias, por lo tanto no habría corriente en el circuito ($i_1 = i_2 = 0$).

Universidad de Costa Rica
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
FS0427 Física General para Físicos III
Instructor: Rodrigo Castillo R.

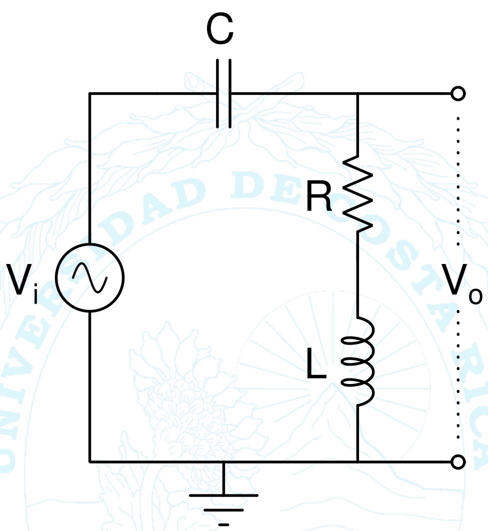
EFis Escuela de Física

— IV Examen Parcial —

Instrucciones: El examen tiene una duración de 2 horas. Resuélvalo con lapicero de tinta azul o negra exclusivamente, si lo hiciese con lápiz, tenga en consideración que queda excento a posteriores reclamos.

Filtro Paso Alto.

(**25 pts**) **1.** En la figura se presenta un filtro paso alto, donde el voltaje de salida se toma entre los extremos de la combinación RL (representando una bobina no ideal que tiene una resistencia debida a la gran longitud del alambre de su bobinado). Obtenga una expresión para $\frac{V_o}{V_i}$, la razón entre las amplitudes del voltaje de salida y de la fuente, en función de la frecuencia angular ω de la fuente. Demuestre que cuando ω es pequeña, esta razón es proporcional a ω y, por lo tanto, es pequeña; asimismo, demuestre que la razón tiende a la unidad en el límite de las frecuencias grandes.



Corriente Alterna.

(**25 pts**) **2.** La salida de un generador de corriente alterna está dada por $V\left(t\right) = V_m \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right)$, donde $V_m = 31{,}4\ V$ y $\omega = 350\ \frac{rad}{s}$. La corriente está dado por $i\left(t\right) = i_m \sin\left(\omega t - \frac{3\pi}{4}\right)$, donde $i_m = 622\ mA$.

(6.5 pts) a) ¿En cuánto tiempo, después que $t = 0$, alcanza el generador un valor máximo por primera vez?.

(6 pts) b) ¿En cuánto tiempo, después que $t = 0$, hace lo mismo la corriente?.

(6 pts) c) El circuito contiene un solo elemento aparte del generador. ¿Es un capacitor, un inductor o un resistor?. Fundamente su respuesta.

(6.5 pts) d) ¿Cuál es el valor de la capacitancia, de la inductancia o de la resistencia, según el caso?.

Principio de Superposición e Interferencia de Ondas Electromagnéticas.

(**25 pts**) **3.** ¿Cuál es la fase de la onda electromagnética resultante que se origina de la combinación de dos ondas electromagnéticas idénticas en las demás dimensiones que siguen la misma dirección de propagación, cuya amplitud es 1.65 veces la de la amplitud común de las dos ondas combinadas? Puede expresar su respuesta en grados o en radianes.

Transmisión Electromagnética.

(**25 pts**) **4.** Se emplea un condensador variable para sintonizar un receptor en la banda de radiotransmisión. Se conecta en serie con una bobina de $2{,}5 \times 10^{-4}$ H y resistencia despreciable. La frecuencia más baja que se desea sintonizar es de $5{,}5 \times 10^{5}$ Hz y debe ser la frecuencia más baja del circuito LC.

(12.5 pts) a) ¿Cuál debe ser la capacidad máxima del condensador variable?

(12.5 pts) b) Si se desea sintonizar una banda de frecuencias entre este valor mínimo y un máximo de $1{,}8 \times 10^{6}$ Hz, ¿entre qué valores ha de variar la capacidad del condensador?

— Solución IV Examen Parcial —

Filtro Paso Alto.

Como el problema nos pide una razón de amplitudes de voltaje, tenemos que considerar sólo la magnitud de cada fasor. Para el caso del voltaje de la fuenteV_i, este estaría dado en términos de la corriente y la impedancia del circuito de la siguiente manera (2.5 pts):

$$V_i = i\,|Z_T| = i\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Para el voltaje V_0, medido en las terminales del capacitor, este estaría dado por (2.5 pts):

$$V_0 = i\,|R + Z_L| = i\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

Calculando la razón de amplitudes tenemos (5 pts):

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{i\sqrt{R^2+(\omega L)^2}}{i\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \sqrt{\frac{R^2+(\omega L)^2}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

Cuando ω es pequeño (7.5 pts)

$$\frac{V_0}{V_i} = \sqrt{\frac{R^2+(\omega L)^2}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \approx \sqrt{\frac{R^2}{\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \omega RC$$

Cuando ω es grande (7.5 pts)

$$\frac{V_0}{V_i} = \sqrt{\frac{R^2+(\omega L)^2}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}} \approx \sqrt{\frac{R^2+(\omega L)^2}{R^2+(\omega L)^2}} = 1$$

Corriente Alterna.

(6.5 pts) a) Como es una señal senosoidal, sabemos que el primer máximo ocurre en $\frac{\pi}{2}$. Por lo tanto

$$\omega t - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{3\pi}{4\omega} = \frac{3\pi}{4(350\frac{rad}{s})} = 6{,}73 \times 10^{-3} s$$

(6 pts) b) Procediendo de la misma forma para la corriente, tenemos:

$$\omega t - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow t = \frac{5\pi}{4\omega} = \frac{5\pi}{4(350\frac{rad}{s})} = 1{,}12 \times 10^{-2} s$$

(6 pts) c) Dado que el voltaje adelanta la corriente, sabemos que el circuito contiene un inductor.

(6.5 pts) d) Sabemos que $X_L = \omega L$ y $X_L = \frac{V_m}{i_m}$, por lo tanto

$$\Rightarrow L = \frac{V_m}{i_m \omega} = \frac{(31{,}4V)}{(0{,}622A)\left(350\frac{rad}{s}\right)} = 0{,}144H$$

Principio de Superposición e Interferencia de Ondas Electromagnéticas.

Para dos ondas electromagnéticas que viajan en la misma dirección y tienen la misma frecuencia, pero de distinta amplitud y fase que se superponen tenemos:

$$\begin{cases} E_1 = E_1 \sin(kx - \omega t - \phi_1) \\ E_2 = E_2 \sin(kx - \omega t - \phi_2) \end{cases} \Rightarrow E_R = E \sin(kx - \omega t - \phi)$$

Donde la amplitud resultante está dada por (2.5 pts):

$$E^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2E_1E_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Y su fase por (2.5 pts):

$$\tan(\phi) = \frac{E_1 \sin(\phi_1) + E_2 \sin(\phi_2)}{E_1 \cos(\phi_1) + E_2 \cos(\phi_2)}$$

Condición del problema (2.5 pts)

$$E = 1{,}65E_1 = 1{,}65E_2 \Rightarrow E_1 = E_2$$

Tomando una de las dos ondas con fase cero ($\phi_1 = 0$), para poder medir el desfase, tenemos (2.5 pts):

$$\begin{cases} E_1 = E_1 \sin(kx - \omega t) \\ E_2 = E_2 \sin(kx - \omega t - \phi_2) \end{cases} \Rightarrow E_R = E \sin(kx - \omega t - \phi)$$

Evaluando en su magnitud tenemos (7.5 pts):

$$E^2 = \left(\frac{E}{1{,}65}\right)^2 + \left(\frac{E}{1{,}65}\right)^2 + 2\left(\frac{E}{1{,}65}\right)^2 \cos(-\phi_2)$$

$$E^2 = 2\left(\frac{E}{1{,}65}\right)^2 + 2\left(\frac{E}{1{,}65}\right)^2 \cos(-\phi_2)$$

$$E^2 = 2\left(\frac{E}{1{,}65}\right)^2 (1 + \cos(-\phi_2))$$

$$\frac{(1{,}65)^2}{2} - 1 = \cos(-\phi_2)$$

Coseno al ser una función par podemos escribirla como

$$\frac{(1{,}65)^2}{2} - 1 = \cos(\phi_2)$$

$$\Rightarrow \phi_2 = \cos^{-1}\left(\frac{(1{,}65)^2}{2} - 1\right) = 1{,}2012rad = 68{,}8230°$$

Evaluando en su fase tenemos (7.5 pts):

$$\tan(\phi) = \frac{\frac{E}{1{,}65}\sin(\phi_2)}{\frac{E}{1{,}65} + \frac{E}{1{,}65}\cos(\phi_2)}$$

$$\tan(\phi) = \frac{\sin(\phi_2)}{1 + \cos(\phi_2)}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\sin(\phi_2)}{1 + \cos(\phi_2)}\right) = 0{,}6006rad = 34{,}4115°$$

Solución alternativa

Al superponer las dos ondas electromagnéticas, la onda electromagnética resultante estaría dada por (2.5 pts):

$$E_R = E_1 + E_2$$

$$E_R = E_1 \sin(kx - \omega t - \phi_1) + E_2 \sin(kx - \omega t - \phi_2)$$

Evaluando las condiciones del problema ($E_1 = E_2$) y tomando una de las dos ondas con fase cero ($\phi_1 = 0$), para poder medir el desfase, tenemos (2.5 pts):

$$E_R = E_1 \sin(kx - \omega t) + E_1 \sin(kx - \omega t - \phi_2)$$

Utilizando la identidad trigonométrica (10 pts)

$$\sin(a) + \sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Obtenemos

$$E_R = 2E_1 \cos\left(\frac{\phi_2}{2}\right)\sin\left(kx - \omega t - \frac{\phi_2}{2}\right)$$

Tomamos la amplitud de esta onda y le aplicamos la condición del problema para despejar su nueva fase (10 pts)

$$1{,}65E_1 = 2E_1 \cos\left(\frac{\phi_2}{2}\right)$$

$$\frac{1{,}65}{2} = \cos\left(\frac{\phi_2}{2}\right)$$

$$\frac{\phi_2}{2} = \cos^{-1}\left(\frac{1{,}65}{2}\right) = 0{,}6006rad = 34{,}4115°$$

Transmisión Electromagnética.

(12.5 pts) a) Para lograr sintonizar el receptor en una determinada frecuencia, este ha de captar la máxima potencia de la emisora, lo que se logra cuando entra en resonancia con ella. Es decir, la señal que pasa a través del receptor debe de tener la frecuencia de la emisora que a su vez debe corresponder a la de resonancia del sistema. En esta situación la reactancia total del circuito es nula, por lo que:

$$X_L = X_C$$

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}$$

y la capacidad del condensador en la resonancia es:

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$$

Para una frecuencia de $5{,}5 \times 10^5 Hz$

$$\Rightarrow C = 334{,}95pF$$

(12.5 pts) b) Si se desea sintonizar la siguiente banda de frecuencia:

$$5{,}5 \times 10^5 Hz \leq f \leq 1{,}8 \times 10^6 Hz$$

Para la frecuencia límite superior, el condensador ha de tener una capacidad comprendida entre el valor anteriormente calculado y el que se obtiene volviendo a evaluar para la frecuencia superior y que resulta ser de $31{,}27pF$. Así pues, el rango de valores en el que puede variar la capacidad del condensador es:

$$31{,}27pF \leq C \leq 334{,}95pF$$

6. Anexos

Formularios

"Fuerzas eléctricas y magnéticas.
Que vivan para siempre, y que nunca se olviden"
- Oliver Heaviside -

FS0427 Física General para Físicos III

Formulario I Parcial

- Fórmulas

$$\vec{F} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r}$$

$$\vec{E}(r) = \frac{\vec{F}(r)}{q_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r}$$

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{dq}{r^2}$$

$$\Phi_E = \oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$dq = \lambda dl = \sigma dA = \rho dV$$

$$U(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}$$

$$U = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{r_i}$$

$$W_{i\to f} = -\Delta U = -\int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

$$\Delta V = -\frac{W_e}{q_0} = \int_i^f \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$V(r) = \int_\infty^r \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

$$\vec{E} = -\nabla V$$

$$E_T = K + U$$

- Constantes

$|e| = 1.602\times 10^{-19}\text{C}$

$\epsilon_0 = 8.85418881762\times 10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2}$

$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.99\times 10^9\frac{N\cdot m^2}{C^2}$

$m_e = 9.1\times 10^{-31}\text{kg}$

- Integrales

$$\int \frac{dx}{(x^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm x}{a^2\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2\pm a^2}}{2} \mp \frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)$$

$$\int \cos^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

$$\int \sin^2\theta d\theta = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta$$

FS0427 Física General para Físicos III

Formulario II Parcial

- Fórmulas

$$\rho = \frac{E}{J}$$

$$R = \rho \frac{L}{A}$$

$$C = \left| \frac{q}{\Delta V} \right|$$

$$U = \frac{1}{2} q \Delta V$$

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$$

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i$$

$$C_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} \right)^{-1}$$

$$\vec{J} = -(ne)\,\vec{v}_d$$

$$i = \int \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\Delta V = iR$$

$$P = i\Delta V$$

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

$$R_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = 0$$

$$q(t) = q_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$q(t) = q_0 \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \right)$$

$$V(t) = V_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$V(t) = V_0 \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \right)$$

$$\tau = RC$$

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$d\vec{F} = i d\vec{l} \times \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$\mu = NiA$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{i d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$$B = \mu_0 n i$$

- Constantes

$$|e| = 1.602 \times 10^{-19}\text{C}$$

$$m_e = 9.1 \times 10^{-31}\text{kg}$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

$$\epsilon_0 = 8.85418881762 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

- Integrales

$$\int \frac{dx}{(x^2 \pm a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\pm x}{a^2 \sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$\int \frac{x dx}{x^2 \pm a^2} = \frac{1}{2} \ln\left(x^2 \pm a^2\right)$$

FS0427 Física General para Físicos III

Formulario III Parcial

- Fórmulas

$$\Phi_B = \int \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i_{enc}$$

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

$$B = \mu_0 n i$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

$$\mu = NiA$$

$$U(\theta) = -\mu \cdot \vec{B}$$

$$\mu_0 \vec{M} = (k_m - 1)\vec{B}_0$$

$$\Delta V = iR$$

$$P = i\Delta V$$

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

$$R_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i} \right)^{-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} V_k = 0$$

$$L = \frac{N\Phi_B}{i}$$

$$U = \frac{1}{2} L i^2$$

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2$$

$$L_{eq} = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

$$L_{eq} = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i} \right)^{-1}$$

$$i(t) = i_0 e^{\frac{-t}{\tau}}$$

$$i(t) = i_0 \left(1 - e^{\frac{-t}{\tau}} \right)$$

$$\tau = \frac{L}{R}$$

- Constantes

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$$

$$\epsilon_0 = 8.85418881762 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

FS0427 Física General para Físicos III

Formulario IV Parcial

- Fórmulas

$$q\left(t\right) = q_m e^{-(R/2L)t}\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t+\phi\right)$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\Delta V = iZ$$

$$X_L = \omega L$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$Z = \sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{X_L-X_C}{R}\right)$$

$$P = i\Delta V$$

$$\langle P\rangle = \frac{I_m V_m}{2}\cos(\phi)$$

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}$$

$$\frac{E}{B} = \frac{1}{\mu_0\epsilon_0 c} = c$$

$$\langle S\rangle = \frac{1}{2\mu_0 c}{E_m}^2$$

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$$

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$I = \frac{P}{A}$$

- Constantes

$\mu_0 = 4\pi\times 10^{-7}\frac{T\cdot m}{A}$

$\epsilon_0 = 8.85418881762\times 10^{-12}\frac{C^2}{N\cdot m^2}$

$c = 2.99792458\times 10^8\frac{m}{s}$

- Identidades

$\sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

$\cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2}$

$\sin\left(a+b\right) = \sin a\cdot\cos b + \sin b\cdot\cos a$

$\sin\left(a-b\right) = \sin a\cdot\cos b - \cos a\cdot\sin b$

$\sin(a)+\sin(b) = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\cos(a)+\cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

7. Bibliografía

[1] Resnick, R., Halliday, D., Krane, K. (2001). Physics Volume Two. Fifth Edition. John Wiley & Sons, Inc. ISBN-13: 978-0471401940

[2] Sears, F., Zemansky, M., Young, H. (2011). University Physics Volume Two. 13th Edition. Addison Wesley. ISBN-13: 978-0321751218

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

LUCEM ASPICIO

UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA