

# Un modelo de ecuaciones estructurales para el estudio de factores que afectan la competencia lectora y la alfabetización matemática: una aproximación bayesiana con datos de PISA 2009

**Alejandro A. Salas Vargas**

Estudiante de la Maestría Académica en Estadística, Universidad de Costa Rica

**Richard Navarro Camacho**

Estudiante de la Maestría Académica en Estadística, Universidad de Costa Rica

**Eiliana Montero Rojas**

Profesora Catedrática de la Escuela de Estadística e investigadora del Instituto de Investigaciones Psicológicas, Universidad de Costa Rica

## Resumen

---

El objetivo de este trabajo es evaluar el efecto de algunas variables latentes influyentes sobre la competencia lectora y la alfabetización matemática en una muestra de estudiantes costarricenses participantes en la prueba PISA 2009. Se estable un modelo de medida para los constructos latentes y un modelo estructural que establece la relación entre constructos, basado en la teoría y en la opinión de expertos en la temática. Se estima un modelo de ecuaciones estructurales, tanto desde un enfoque clásico o frecuentista como desde una perspectiva Bayesiana. En ambos enfoques las estimaciones resultan muy similares en el modelo de medida y en el modelo estructural, resultados que dan evidencia empírica a favor de las hipótesis planteadas.

*Palabras clave:* Modelos de Ecuaciones Estructurales Bayesianos, Cadenas MCMC, Alfabetización Matemática, PISA.

*Clasificación AMS:* 62-00

## Structural equation models for the study of factors affecting reading competence and mathematical literacy: bayesian approximation with PISA data 2009

### Abstract

The aim of this paper is to evaluate the effect of some influential latent variables on reading competence and mathematical literacy in a sample of Costa Rican students participating in the PISA 2009 test. A measurement model is established for the latent variables, and a structural model that establishes the relationship between latent variables, based on the theory and the opinion of experts in the subject. A structural equations model is estimated, both from a classical or frequentist approach and from a Bayesian perspective. In both approaches, the estimates are very similar in the measurement model and in the structural model, results that give empirical evidence in favor of the hypotheses proposed.

*Keywords:* Bayesian structural equation modeling, MCMC chains, Mathematics literacy, PISA.

*AMS Classification:* 62-00

### 1. Introducción

Los modelos de ecuaciones estructurales o bien los SEM (Structural Equations Models) surgen de la necesidad de explorar posibles planteamientos teóricos causales a partir de datos empíricos. Estos modelos son producto de la integración de tres tipos de análisis cuantitativos: el análisis de trayectoria o de senderos, estos aportes se dieron a conocer por los autores Sewall Green Wright (1984), el análisis de factores, cuyo autor es Spearman (1904) y los modelos de ecuaciones simultáneas desarrollados por John Maynard Keynes (1936). En los años 70, Karl Gustav Jöreskog junto a Arthur Goldberger unen las nociones de estas corrientes, y junto con Dag Sörbom (especialista en programación), crean el paquete LISREL, el cual es el primer paquete estadístico para la modelización de sistemas de ecuaciones estructurales (Mulaik, 2009, p.379).

Los SEM en la actualidad son conocidos en la comunidad científica por diferentes, entre ellos el análisis de la estructura de covarianza, análisis factorial confirmatorio, análisis de la variable latente, y también el análisis LISREL. Estos modelos SEM crean modelos de error de medida, dicho de otro modo, el grado de medición de las variables incluidas en el modelo. Además, incorpora constructos inobservables o variables latentes y modela las relaciones entre múltiples variables predictores, independientes o exógenas y variables dependientes o endógenas (Escobedo et al, 2016).

La fundamentación teórica es de suma importancia dentro de los modelos de ecuaciones estructurales, ya que éstos requieren de una fuerte justificación teórica para lograr la especificación de las relaciones de dependencia, también para la modificación de algunas relaciones propuestas y primordialmente en la estimación del modelo propuesto. La teoría a la cual nos referimos es un conjunto sistemático de relaciones que ofrecen una explicación exhaustiva y consistente de un fenómeno estudiado (Hair et al, 1999, Mulaik 2009).

Los SEM contribuyen a la evaluación de modelos teóricos, convirtiéndose en una de las herramientas más poderosa para el estudio de relaciones causales en datos empíricos (Kerlinger & Lee, 2002), no obstante, estos modelos nunca prueban la causalidad. Realmente sólo ayudan a seleccionar hipótesis causales relevantes y a la eliminación de aquellas no sustentadas por la evidencia empírica. De esta manera, los modelos causales son susceptibles de ser estadísticamente rechazados si se contradicen con los datos. Por lo tanto, nunca se debe olvidar que el verdadero valor de esta técnica es especificar las relaciones existentes entre variables y además evaluar cuántas de esas relaciones se representan en los datos recolectados (Mulaik, 2009).

Aunado a lo anterior, cabe señalar que el análisis SEM es una técnica principalmente confirmatoria e idónea para el análisis de una teoría estructural relativa a un fenómeno en particular. Sin embargo, en ocasiones los resultados sugieren la modificación de un modelo establecido a priori, para este caso se considera que el análisis toma un carácter exploratorio, pero que de igual forma, requiere un andamiaje empírico o conceptual que permita realizar un ajuste al modelo inicial. (Vargas, Mora & Montero 2016).

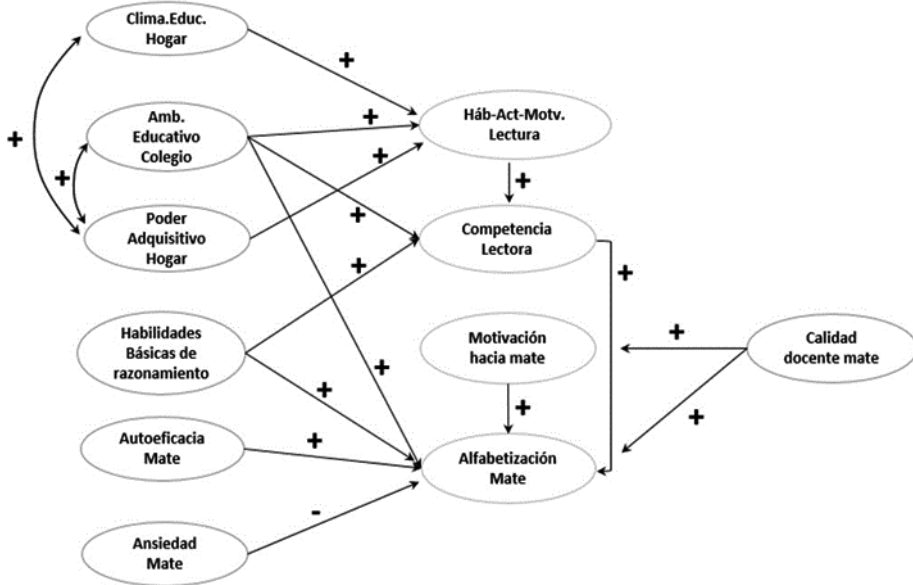
Es el interés de este trabajo presentar la técnica de ecuaciones estructurales para explorar posibles relaciones causales en la investigación educativa, esto por medio de un modelo de medida que ayude a estimar las relaciones estructurales existentes entre los constructos competencia lectora y la alfabetización matemática, en una muestra de estudiantes de centros educativos de Costa Rica que participaron en prueba PISA para el año 2009.

## **2 Marco general de referencia: algunos determinantes de la competencia lectora y la alfabetización matemática**

Se realizó la consulta bibliográfica sobre las variables latentes influyentes sobre la competencia lectora y la alfabetización matemática, además se contó con la opinión de dos expertos en la temática, la Dra. Ana María Rodino especialista en educación preescolar y desarrollo de lectoescritura, miembro del Consejo Consultivo e investigadora del Proyecto Estado de la Educación de CONARE, el Dr. Ángel Ruiz Zúñiga, profesor catedrático e investigador del Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas de la Universidad de Costa Rica, quien ha sido pionero en la reforma matemática del sistema educativo costarricense. Así mismo, se recibió apoyo de la Dra. Eiliana Montero Rojas, profesora catedrática e investigadora del Instituto de Investigaciones Psicológicas de la Universidad de Costa Rica, con un amplio y valioso conocimiento en Estadística e investigación educativa. A partir de la teoría y la retroalimentación con los expertos se llegó a la construcción de un modelo causal, el cual se puede apreciar en la figura 1, en esta los signos “+” y “-” significan una relación causal (flechas rectas) o correlación (flechas curvas) esperada positiva y negativa, respectivamente.

Figura 1

### Modelo causal teórico: variables latentes influentes sobre la competencia lectora y la alfabetización matemática



**Fuente:** Elaboración propia a partir de revisión bibliográfica y opinión experta.

La evaluación PISA 2009 no suministran indicadores para la medición de las variables latentes: eficiencia en matemática, ansiedad hacia las matemáticas, motivación hacia la matemática y la calidad del docente de matemática, de manera que dichos constructos no se consideraron en la estimación del modelo final, por lo que se estimó el modelo con los constructos que se contemplan en esta evaluación.

#### 2.1 Los constructos en el modelo

La competencia lectora es la capacidad individual para comprender, utilizar textos escritos, reflexionar sobre ellos, e implicarse con ellos para alcanzar los propios objetivos, desarrollar el propio conocimiento y potencial, y participar en la sociedad. (OCDE Santillana, 2011, p.37). Según señala Rodino (2012, p.10), esta definición de competencia lectora hace referencia a las destrezas cognitivas que involucran la decodificación de signos gráficos y las habilidades más complejas como la extracción de las discursivas de los textos, así como la identificación de estructuras lingüísticas.

Dicha competencia se evalúa tomando en cuenta el formato textual, es decir en textos continuos y discontinuos, Los procesos de lectura en el que se forma una idea general del texto, así como la reflexión de su contenido, formas y rasgos. También toma en cuenta las situaciones, el uso para el que se ha elaborado el texto.

La competencia matemática se define según el marco de evaluación de las pruebas PISA de la siguiente forma:

*La capacidad que tienen los alumnos para analizar, razonar y comunicar ideas de manera eficaz al plantear, formular, resolver e interpretar las soluciones a un problema matemático en una variedad de situaciones de la vida cotidiana. OCDE (2006, p.14)*

Y estas competencias, según lo indica el mismo documento de OCDE (2006, p.14), se evalúan según las siguientes áreas:

- **Contenido matemático:** El contenido matemático está fundamentado en cuatro ideas básicas a saber: cantidad, espacio y forma, cambio y relaciones, e incertidumbre y además se relaciona de forma secundaria en relación con las «ramas curriculares» (números, el álgebra y la geometría).
- **Procesos matemáticos:** Son aquellos que se determinan o definen por medio de las competencias generales matemáticas propiamente dichas y que abarcan el lenguaje matemático, la habilidad de crear modelos y la habilidad de la resolución de problemas.
- **Las situaciones:** Las situaciones hace referencia a los campos en los que se utiliza la matemática y se instituye según su grado de proximidad según el estudiante. En las evaluaciones PISA se identifica cinco situaciones: personales, educativas, profesionales, públicas y científicas.

Según el trabajo de Montero et. al (2012, p.44), existe una relación con una magnitud importante y significativa entre la percepción de la eficacia de estrategias para comprender texto y escala de percepción de la eficacia de estrategias para resumir un texto con las notas obtenidas en las pruebas matemáticas. Lo anterior es muy relevante e indica que el grado de comprensión y síntesis de textos que posea un estudiante, influye de modo significativo y relevante en la alfabetización matemática, es decir, quienes se desempeñan bien en una de las dos áreas tiene una alta probabilidad de desempeñarse bien en la otra.

Según Simmons & Singleton (2008), se han encontrado varias habilidades lingüísticas asociadas con el desarrollo de la aritmética en los niños, el procesamiento fonológico, la capacidad de diferenciar y manipular segmentos significativos de un lenguaje hablado, estos se han relacionado con la competencia en aritmética. Por otro lado, se ha descubierto que muchos aspectos de las habilidades verbales, incluida la comprensión auditiva, el razonamiento verbal y el vocabulario, predicen la competencia aritmética y por ende la alfabetización matemática (Zhang et al., 2014).

En el estudio realizado por Vilenius et. al (2008, p. 421-423) concluyeron que las habilidades de comprensión de texto y el rendimiento matemático de la resolución de problemas estaban interrelacionados, en un sentido pedagógico, los resultados indican la importancia de priorizar la fluidez en las habilidades de lectura antes de cambiar el enfoque principal de la enseñanza a estrategias de lectura más relevantes, tanto para la comprensión de lectura como para los problemas matemáticos.

Estos constructos denominados alfabetización matemática y competencia lectora están asociados con otras variables latentes, tales como el contexto del hogar (Clima educativo del hogar), el poder adquisitivo de los padres, el ambiente educativo del colegio, las habilidades básicas de razonamiento y la motivación hacia la lectura, así como lo menciona Montero (2012, p.22-38).

Diversos estudios muestran un efecto entre el nivel socio económico y el rendimiento, donde los estudiantes de familias que experimentan mayor nivel de pobreza, aquellos (as) cuyos padres tiene niveles académicos bajos y estudiantes sin apoyo de parte de núcleo familiar suelen presentar un efecto negativo sobre su desempeño académico. (Rivero, 2000; Bandura, 1982 y González-Pineda et al., 2003). En ésta misma línea, Montero (2012, p.22) indica que “padres con un nivel socio económico alto, al momento de elegir a cuál centro enviar a sus hijos, tienden a considerar más el rendimiento académico de los centros educativos que los padres de un nivel socioeconómico bajo.”

El ambiente educativo del colegio es otra de las variables que tiene relevancia en este estudio, debido a que ésta influye sobre el rendimiento del estudiante. Ésta la compone varios elementos, incluyendo los valores, las culturas, las prácticas de seguridad y la parte de la organización educativa que hace que la institución marche de la forma más adecuada y plasme las políticas educativas en cada uno de sus centros escolares. Asimismo, es importante la relación existente entre estudiantes y docentes, un ambiente seguro y ordenado, así como la relación entre los administradores de la institución, docentes, padres y estudiantes, esto contribuye a la existencia de un clima escolar positivo y por ende generar un en los alumnos un rendimiento más alto.

Otro detalle muy importante que Montero (2012) y Mullis et al (2012) mencionan sobre el rendimiento académico de los alumnos es el impacto que tiene el ausentismo docente sobre dicho rendimiento, ya que esto influye negativamente en las oportunidades de los alumnos para aprender. El ambiente escolar también mejora cuando los docentes del centro educativo tienen una actitud positiva hacia los estudiantes y cuando colaboran en las actividades curriculares y extracurriculares de la institución e incentivan su auto desarrollo profesional.

Es importante considerar las habilidades cognitivas y no cognitivas del alumno, éstas se concentran en las habilidades, destrezas y conocimientos que el estudiante utiliza para enfrentarse a la vida cotidiana real, es decir, se centra en determinar lo que el estudiante sabe y lo puede lograr con lo que aprendió en el sistema educativo, y no depende de cuánto dominio tenga de los contenidos curriculares específicos (OCDE-Santillana, 2011, p. 18-19). En el Centro de Investigación Económica y el Instituto Central de Salud Mental en Alemania se desarrolló un estudio que apoya la evidencia de que tanto las habilidades cognitivas y no cognitivas juzgan un papel importante en la contribución del éxito económico futuro de los estudiantes (Borghans et al. 2008, Heckman 2008, citado por Montero (2012); Coneus et. al (2010)), Además los resultados arrojaron que las habilidades cognitivas y mentales son predictores muy importantes del buen desempeño de los estudiantes en la escuela, y que esta predicción aumenta al incluir la edad del alumno.

Se debe tener claro que la motivación hacia la lectura es importante para desarrollar habilidades y destrezas en lectura, ésta surge tanto de un impulso interno, así como de un estímulo externo que está también asociado con la característica de resiliencia para los alumnos, aunque esta relación es más débil (OECD, 2011).

Dentro de la literatura se puede encontrar algunos factores que influyen de modo relevante en el rendimiento de los estudiantes en la evaluación PISA, como se puede apreciar estos son de diversa índole: obedecen a factores personales (auto-eficacia, ansiedad, la confianza, motivación y disfrute de la lectura y la matemática), así como factores socioeconómicos (condición socioeconómica del hogar y clima educativo del hogar) y la condiciones propias de la enseñanza (métodos de enseñanza utilizados y condiciones del centro educativo), estos factores constituyen constructos latentes que deben estimarse y que a su vez se relacionan de modos complejos, estableciendo relaciones causales directas e indirectas sobre el rendimiento de los estudiantes en la alfabetización matemática y la competencia lectora, la estimación de estas relaciones podría ser compleja, es por esta razón que en este estudio se emplea los modelos de ecuaciones estructurales.

### **3 Materiales y métodos**

#### **3.1 Datos**

El objetivo de este estudio es elaborar un modelo de ecuaciones estructurales que permita evaluar el efecto de variables latentes influyentes sobre la competencia lectora y la alfabetización matemática en una muestra de estudiantes costarricenses participantes en la prueba PISA 2009.

El Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA- Programme for International Student Assessment) es un programa liderado por la OCDE y es de carácter internacional y su objetivo es la medición del rendimiento académico de los estudiantes en las áreas de matemática, ciencia y lectura de los países miembros. Dicha medición se realiza cada tres años mediante cuestionarios que evalúan a los estudiantes y directores de los centros educativos, con el objetivo de contar con información relevante para a toma de decisiones.

La muestra utilizada para la aplicación de las pruebas PISA es tomada de una población de estudiantes de edades entre los 15 años y tres meses y 16 años y dos meses, que asisten las instituciones educativas oficiales y que cursan un grado equivalente al sétimo o superior para todos los países miembros. (Arauz, 2017). En nuestro caso se cuenta con una muestra de 3.744 estudiantes de secundaria.

Para la medición de cada constructo involucrado en el modelo causal propuesto se definieron indicadores a partir de los datos de las evaluaciones PISA 2009. Cada constructo con sus indicadores se muestra en el siguiente cuadro y la explicación de la construcción de cada uno de estos indicadores se puede consultar en el anexo 2.

Cuadro 1

**Descripción de los constructos y sus respectivos indicadores**

<i>Constructo</i>	<i>Abreviación</i>	<i>Tipo de variable</i>	<i>Variables observadas (Indicadores)</i>
Clima educativo del hogar	CLIM_EH	Exógena	Índices: -Tenencia de bienes asociados al capital cultural -Cantidad de libros en la casa -Frecuencia de lectura en línea
Habilidades básicas de razonamiento	HABIL	Exógena	Índices: -Grado que cursa -Promoción
Ambiente educativo del colegio	AMB_EDUC	Exógena	Índices: -Facilidad para desarrollar enseñanza -Escala de gestión del director -Clima escolar
Hábitos, actitudes y motivación hacia la lectura	MOT_LECT	Endógena	Índice: -Escala de actitud hacia la lectura -Frecuencia de lectura de textos educativos -Frecuencia de lectura por iniciativa propia -Tiempo de lectura por placer
Competencia lectora	COMP_LEC	Endógena	-Cinco valores plausibles en competencia lectora
Alfabetización matemática	ALF_MATE	Endógena	-Cinco valores plausibles en alfabetización matemática.

**Fuente:** Datos de la muestra costarricense de PISA 2009

**3.2 Modelos de ecuaciones estructurales**

Los modelos de ecuaciones estructurales, o conocidos como SEM, son modelos estadísticos multivariantes que estiman los efectos y las relaciones existentes entre variables (Ruiz et al. 2010, Mulaik 2009, Montero 2012). Estos modelos nacen para flexibilizar los modelos de regresión, en ellos hay menos restricciones que los modelos de regresión comunes, esto gracias a que admiten la inclusión de errores de medida tanto en las variables independientes (predictores) como en la variable repuesta o variable de criterio. Se les considera, en ocasiones, como varios modelos de análisis factorial que permiten efectos directos e indirectos entre los factores.

Una de las ventajas de estos modelos es que indican el tipo, la dirección y la magnitud de la relación entre las variables que conforman dicho modelo (Ruiz et al. 2010), es por esta razón que también son llamados modelos confirmatorios, ya que permite “confirmar” mediante el análisis de la muestra (evidencia empírica) las relaciones propuestas sustentadas en la teoría que se han consultado y que ha sido referencia para la construcción de dichos modelos.

En el modelado de ecuaciones estructurales, se involucran tres tipos de variables, las cuales es importante identificar (Ruiz et al. 2010, Mulaik 2009, Montero 2012):



**Variabes exógenas:** Se conciben como aquellas variables que “causan” los fenómenos de interés, (esta variable no recibe efecto de ninguna otra variable, pero sí afecta a otras).



**Variable latente:** Es una variable exógena que se caracteriza por ser aquello que se desea medir, pero que no es observable y que no contiene error de medición.

**Variabes endógenas:** Son las variables que se ven afectadas por otra u otras variables, estas dependen causalmente de otras en el modelo definido, a estas variables se le asocia un error de medición.

**Variabes residuales:** Determinan el porcentaje de variabilidad que no explican las variables observadas. Existen variables residuales exógenas observadas.

Cuadro 2

### Principales variables e indicadores en un Modelo de Ecuaciones Estructurales

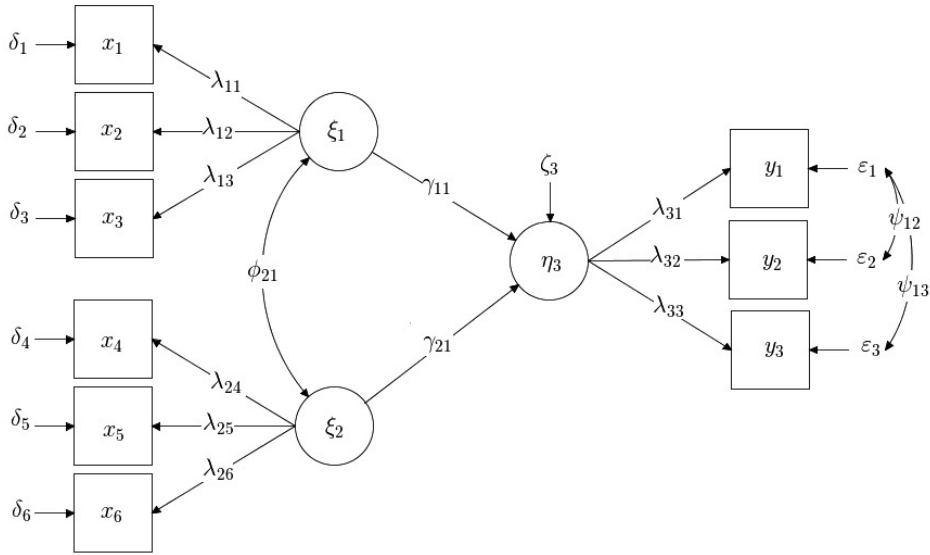
Tipo de variable		Simbología	Forma gráfica
Latente	Exógena	$\xi$ : Ksi	Círculos/Elipses
	Endógena	$\eta$ : Eta	
Observadas	Para las Exógenas	$X$	Rectángulos
	Para las endógenas	$Y$	
Errores de medición	Para la endógena	$\zeta$ : Zeta	Depende de los softwares, algunos no dibujan nada otros utilizan círculos o elipses
	Para la observada X	$\delta$ : Delta	
	Para la observada Y	$\epsilon$ : Epsilon	
Relación causal directa e indirecta	Entre dos variables endógenas	$\beta$ : Beta	Flecha en una dirección 
	Entre una variable endógena y otra exógena	$\gamma$ : Gamma	
	Entre el constructo y el o los indicadores que la componen	$\lambda$ : Lambda	
Relación de covariación	Entre dos variables exógenas	$\Phi$ : Phi	Fecha curva en dos direcciones 
	Entre los errores de medición	$\Psi$ : Psi	

**Fuente:** Cuaderno Metodológico 2, Gutiérrez (2008, p.14)

Se utiliza diagramas de trayectorias para representar de forma gráfica el modelo estructural, así como se aprecia en el gráfico 1, también de esta misma forma se representa el modelo de medición de las variables endógenas y exógenas.

Figura 2

**Ilustración de un modelo de ecuaciones estructurales**



**Fuente:** Elaboración propia a partir de Cuaderno Metodológico 2, Gutiérrez (2008, p.14)

En todo modelo SEM sobresale dos componentes primordiales: el primero es el modelo estructural, el cual contiene las relaciones causales entre los constructos, y segundo el modelo de medición, en el cual se presenta los indicadores con los cuales son medidos los constructos (Bollen 1989, Montero 2009).

**3.2.1 Modelo estructural y modelo de medición**

La relación estructural de las variables latentes, en los modelos SEM, se centran en los resultados estimados por el modelo de medida del análisis factorial confirmatoria, razón por la cual, en un modelo SEM se puede identificar dos componentes principales:

**Modelo de medición:** Éste representa las relaciones entre las variables latentes con sus respectivos indicadores, según como se puede observar en el gráfico 1, en él los vectores  $\xi$  ( $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ ) y  $\eta$  ( $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_p$ ) son vectores no observables o latentes, y los vectores  $y' = (y_1, y_2, \dots, y_p)$  y  $x' = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  son vectores observados. Por lo que, se tienen dos expresiones que representan a los modelos analíticos de medición o factoriales LISREL):

$$Y = \Lambda y \cdot \eta + \varepsilon$$

$$X = \Lambda x \cdot \xi + \delta$$

**Modelo estructural:** establece las relaciones entre factores latentes y el resto de las relaciones que no forman parte del modelo de medida.

$$\eta = \gamma \cdot \xi + \zeta$$

En la literatura se encuentra que hay varias fases en la construcción de modelo de ecuaciones estructurales, a saber:

**La especificación:** En esta fase el investigador establece las relaciones hipotéticas entre las variables latentes y las observadas (según la teoría consultada), para la estimación de las relaciones correctas.

**Fase de identificación:** Se verifica si un modelo está identificado, esto se hace mediante una expresión algebraica que lo demuestre, en función de la matriz de varianzas y covarianzas muestrales.

**Estimación de parámetros:** Mediante métodos numéricos se determina los valores de los parámetros desconocidos a estimar, así como su respectivo error de medición. Se hace necesario el empleo de paquetes computacionales tales como LISREL, *Mplus*, R (librería *sem*, *lavaan*) entre otros programas. Esta fase es muy importante en un modelo de ecuaciones estructurales ya que por medio de optimización numérica se obtiene una solución única aproximada de cada parámetro libre. En un modelo de ecuaciones estructurales se prueba que la matriz de varianzas y covarianzas poblacional es igual a la matriz de varianzas y covarianzas asociada al modelo teórico, es decir  $\Sigma = \Sigma(\theta)$ , donde  $\Sigma$  es la matriz poblacional y  $\Sigma(\theta)$  es la matriz asociada al modelo propuesto (Mulaik, 2009).

**La bondad de ajuste:** hace referencia a la exactitud en los datos del modelo para determinar si es correcto y sirve para los propósitos del investigador. La calidad del ajuste puede verse por: (1) medidas absolutas del ajuste que evalúan el ajuste global del modelo, (2) medidas del ajuste incremental que comparan el modelo propuesto con otros modelos que el investigador ha especificado previamente, o (3) medidas del ajuste de parsimonia, éstas comparan los modelos con diferentes números de coeficientes estimados, siendo su propósito determinar la cantidad del ajuste conseguido por cada coeficiente estimado. En el cuadro 2 se muestra algunas medidas de bondad de ajuste que se debe tener presente a la hora de evaluar el ajuste del modelo que se ha identificado (Escobedo et al. 2016, p.14).

Cuadro 3

### **Algunas medias de bondad de ajuste**

<i>Medida de bondad de ajuste</i>	<i>Nivel de ajuste aceptable</i>
1. Chi-cuadrado $\chi^2$ .	$p > 0,05$
2. Índice de bondad de ajuste comparativo: CFI.	$\geq 0,95$
3. Índice de ajuste no normalizado: NNFI.	$\geq 0,95$
4. Índice de ajuste normalizado: NFI.	$\geq 0,90$
5. Índice de bondad de ajuste global: GFI.	$\geq 0,90$
6. Índice de bondad de ajuste global corregido: AGFI.	$\geq 0,90$
7. Raíz del residuo cuadrático medio estandarizado: SRMR.	$\leq 0,08$
8. Raíz del error cuadrático medio de aproximación: RMSEA.	$< 0,06$

**Fuente:** Modelos de Ecuaciones Estructurales, Escobedo et al. (2016, p.14)

**La reespecificación del modelo:** Ayuda al investigador a saber si el primer modelo obtenido es el mejor, para lo que es necesario buscar métodos para mejorar el ajuste de este, añadiendo o eliminando los parámetros estimados del modelo original, con sus

justificaciones correspondientes. Para tal caso, el valor del índice de modificación corresponde a la reducción del valor de chi-cuadrado, el cual se sugiere en un mínimo de 3,84 para ser significativa.

**La interpretación de los datos:** Ayuda al investigador a establecer el modelo correcto y la aceptación o rechazo de las hipótesis, concluyendo las asociaciones y relaciones de causalidad presentes entre las variables latentes o constructos.

### 4 Resultados

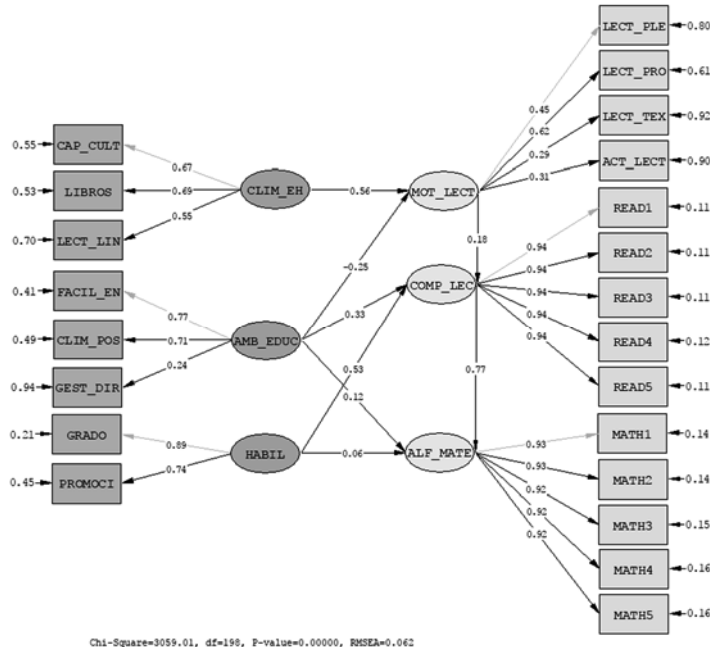
En esta sección se presentan los resultados tanto de la estimación vía máxima verosimilitud mediante el uso del software LISREL (LInear Structural RELations) versión 8.8, como para la estimación bayesiana realizada mediante el paquete estadístico *Mplus* versión 7.

#### 4.1 Enfoque frecuentista

La Figura 2 muestra los resultados obtenidos mediante un enfoque frecuentista vía máxima verosimilitud del modelo descrito con anterioridad. (El anexo 1 muestra la solución no estandarizada)

Figura 3

**Estimación de los parámetros por máxima verosimilitud, solución completamente estandarizada**



Fuente: Datos de la muestra costarricense de PISA 2009

Analizando el modelo de medición (relación entre constructos con sus respectivos indicadores) se observa que en la mayoría de los casos los indicadores presentan cargas factoriales apropiadas (cargas mayores a 0,3 en valor absoluto se consideran óptimas) y cuya dirección es acorde con lo esperado. Únicamente en el caso del indicador Gestión del Director (GEST\_DIR) como indicador de Ambiente Educativo del Hogar presenta la relación más baja (0,24).

En lo que respecta al modelo estructural (trayectorias causales que conectan variables latentes exógenas y endógenas), se observa que mayoritariamente todos los coeficientes tienen sentido teórico y sus estimaciones resultaron estadísticamente significativos y de importancia práctica (coeficiente estructural estandarizado mayor a 0,1 en valor absoluto). Cabe resaltar que el signo negativo que conecta causalmente a Ambiente Educativo del Colegio (AMB\_EDUC) con Motivación hacia la lectura (MOT\_LEC) parece ser contra intuitivo y no esperado, sin embargo, puede haber ocurrido dos situaciones, por un lado, los indicadores utilizados para representar el constructo de Ambiente Educativo del Colegio son medidos a un nivel más alto de agregación (nivel de centro educativo) que los demás indicadores que son medidos a nivel de estudiante, lo cual provoca una variabilidad menor entre los valores de estos indicadores entre estudiantes del mismo centro educativo. Por otro lado, cada índice en cuestión corresponde a una agregación de ítem de una escala, donde es el director del colegio quien responde las preguntas sobre la gestión del centro educativo, de esta manera puede existir un problema de subjetividad que a vez es posible que se refleje en una medición sesgada de estos indicadores.

Se evidencia una importante relación (0,77) entre la Competencia Lectora (COMP\_LEC) sobre la Alfabetización Matemática (ALF\_MATE), resultado que permite dar una recomendación al sistema educativo costarricense, sobre el reforzamiento del desarrollo lector del estudiante en el currículo de todas las asignaturas impartidas, con el fin de fortalecer de forma directa la alfabetización matemática de los estudiantes del sistema educativo costarricense. Se puede pensar en generar espacios para la lectura de textos académicos como recreativos para reforzar las habilidades en esta área.

La relación directa entre las habilidades básicas de razonamiento del estudiante hacia el puntaje de alfabetización matemática en PISA no es relevante (0,06), sino más bien se presenta mediante la competencia lectora, de forma indirecta, esto evidencia aún más la estrecha relación entre estos últimos constructos, el efecto indirecto entre la habilidad del estudiante y los resultados en alfabetización matemática es de  $0,56 * 0,78 = 0,44$ .

Por otra parte, se observa que el ambiente educativo del colegio se relaciona directamente (0,12) e indirectamente ( $0,33 * 0,77 = 0,25$ ) con la alfabetización matemática, lo cual muestra una relación importante entre ambos constructos ( $0,12 + 0,25 = 0,37$ ). Este resultado muestra el desempeño de los estudiantes en el área lectora y la alfabetización matemática, requiere de una buena gestión administrativa que permita reducir los problemas de enseñanza y propiciar un clima positivo en la institución; y de las facilidades educativas que brinda del centro de estudios.

Otro efecto de importancia es la relación entre el clima educativo del hogar y la competencia lectora, mediado por la motivación hacia la lectura ( $0,56 \cdot 0,18 = 0,10$ ), relación que fue establecida como recomendación de la experta en lenguaje a Dra. Ana María Rodino, ya que gracias a su trayectoria en el estudio de esta temática indica que la relación directa entre el clima educativo del hogar la competencia lectora no está bien fundamentada desde la teoría.

En cuanto a la bondad del ajuste del modelo causal estimado, la raíz del error cuadrático medio de aproximación (RMSEA, por sus siglas en inglés) es igual a 0,06, valor que no se desvía del valor óptimo (en la práctica, el valor ideal para la medida RMSEA es 0,05 o menos (Kaplan, 2009; Mulaik, 2009). Además, otros indicadores comúnmente utilizados presentan valores que igualan o sobrepasan el umbral, de manera que se puede decir que el modelo un ajuste aceptable a los datos. (Véase Cuadro 4)

Cuadro 3

### **Indicadores de ajuste del modelo estimado vía máxima verosimilitud**

<i>Medida de bondad de ajuste</i>	<i>Ajuste aceptable</i>	<i>Valor</i>
Chi-cuadrado $\chi^2$	$p > 0,05$	3192,09 ( $p = 0$ )
Índice de bondad de ajuste comparativo: CFI	$\geq 0,95$	0,98
Índice de ajuste no normalizado: NNFI	$\geq 0,95$	0,98
Índice de ajuste normalizado: NFI	$\geq 0,90$	0,98
Índice de bondad de ajuste global: GFI	$\geq 0,90$	0,93
Índice de bondad de ajuste global corregido: AGFI	$\geq 0,90$	0,91
Raíz del residuo cuadrático medio estandarizado: SRMR	$\leq 0,08$	0,05
Raíz del error cuadrático medio de aproximación: RMSEA	$< 0,05$	0,06

**Fuente:** Elaboración propia con los datos de PISA 2009

## **4.2 Enfoque bayesiano**

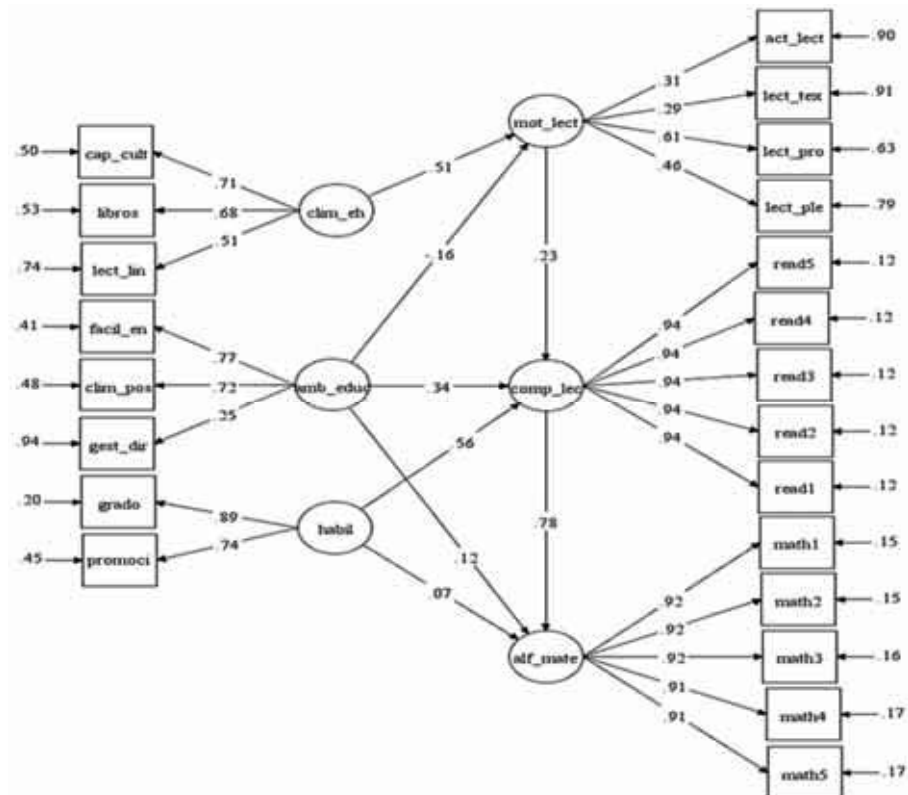
Para la estimación del modelo SEM Bayesiano, no se fijaron valores iniciales para las cadenas, sino que se permitió que el algoritmo utilizado por *Mplus* los seleccionara. Para la estimación de cada parámetro se generaron tres cadenas, cada una de 10.000 iteraciones. En cada cadena fueran descartadas las primeras 5.000 iteraciones, por lo que al final se cuenta con 15.000 datos para la estimación de cada parámetro y su respectivo intervalo de credibilidad.

Dado que no se tiene información a priori sobre el rango de variación de los parámetros a estimar, se fijan distribuciones a priori no informativas y para cada parámetro del modelo de medición se asume que se sigue una distribución normal centrada en cero y con una varianza infinita ( $\lambda_i \sim N(\mathbf{0}, \infty)$  (Muthén 2010). De igual forma los parámetros del modelo estructural, se asumen normales con media cero y con un rango de variación muy grande ( $\beta \sim N(\mathbf{0}, \infty)$ ,  $\gamma \sim N(\mathbf{0}, \infty)$ ). Por otro lado, para las varianzas de las variables observables o indicadores y de las variables no observables o constructos se asume que siguen una distribución gamma inversa de la forma  $\Phi \sim IG(-1, \mathbf{0})$ ,  $\Psi \sim IG(-1, \mathbf{0})$  (Muthén 2010, Muthén & Muthén 2012).

En la Figura 3 se muestran los resultados obtenidos mediante un enfoque bayesiano, en el anexo 1 muestra la tabla con los valores de la solución no estandarizada). Dado la similitud de los resultados con respecto al enfoque frecuentista (misma dirección de los coeficientes y magnitud de estos muy similar en la mayoría de los casos), la interpretación sustantiva coincide con la estimación vía máximo verosimilitud.

Figura 3

### Diagrama de trayectorias con la estimación bayesiana de los coeficientes estructurales



Fuente: Elaboración propia con los datos de PISA 2009

### 4.3 Comparación entre ambos enfoques

El Cuadro 7 muestra la solución estandarizada mediante la estimación Bayesiana y lo compara con la estimación vía máxima verosimilitud. En general la estimación con ambos enfoques es muy similar, tanto así que en la mayoría de los casos los parámetros estimados vía máxima verosimilitud están contenidos en el intervalo de credibilidad

producto de la estimación Bayesiana. El anexo 1 muestra la misma comparación utilizando la solución no estandarizada.

Cuadro 3

**Parámetros estimados del modelo SEM por máxima verosimilitud y enfoque bayesiano. Solución estandarizada**

Relación		Máxima Verosimilitud	Estimación Bayesiana		
			Estimación	Media	Int. de credibilidad
				2,50%	97,50%
AMB_EDUC	FACIL_EN	0,77	0,77	0,735	0,805
	CLIM_POS	0,71	0,72	0,685	0,753
	GEST_DIR	0,24	0,25	0,214	0,289
HABIL	GRADO	0,89	0,89	0,869	0,913
	PROMOCION	0,74	0,74	0,718	0,764
CLIM_EH	CAP_CULT	0,67	0,71	0,678	0,737
	LIBROS	0,69	0,68	0,653	0,712
	LECT_LIN	0,55	0,51	0,478	0,543
MOT_LECT	LECT_PLE	0,45	0,46	0,415	0,496
	LECT_PRO	0,62	0,61	0,563	0,651
	LECT_TEX	0,29	0,29	0,252	0,337
	ACT_LECT	0,31	0,31	0,268	0,351
COMP_LEC	READ1	0,94	0,94	0,933	0,941
	READ2	0,94	0,94	0,932	0,941
	READ3	0,94	0,94	0,933	0,941
	READ4	0,94	0,94	0,932	0,941
	READ5	0,94	0,94	0,934	0,943
ALF_MATE	MATH1	0,93	0,92	0,915	0,926
	MATH2	0,93	0,92	0,917	0,928
	MATH3	0,92	0,92	0,913	0,924
	MATH4	0,92	0,91	0,907	0,919
	MATH5	0,92	0,91	0,908	0,92
MOT_LECT	CLIM_EH	0,56	0,51	0,462	0,568
	AMB_EDUC	-0,25	-0,16	-0,208	-0,104
COMP_LEC	MOT_LECT	0,18	0,23	0,19	0,269
	AMB_EDUC	0,33	0,34	0,304	0,369
	HABIL	0,53	0,56	0,535	0,587
ALF_MATE	COMP_LEC	0,77	0,78	0,759	0,802
	HABIL	0,06	0,07	0,039	0,091
	AMB_EDUC	0,12	0,12	0,096	0,144

**Fuente:** Datos de la muestra costarricense de PISA.

Se observa que la relación los constructos motivación hacia la lectura y ambiente educativo del colegio, en ambos enfoques, se ha estimado con una dirección opuesta no esperada, pero como ya se ha comentado podría estar pasando de que la variable ambiente del colegio tiene sus indicadores medidos a nivel de institución y no a nivel individual y por otro lado podría estar influenciada por la subjetividad por parte del director.



La similitud en ambos enfoques se debe a que en este caso se cuenta con un tamaño de muestra grande y con distribuciones a priori no informativas, de modo que cuanto más grande es el tamaño de muestra, las distribuciones a priori influyen en menor medida en la estimación de los parámetros (la información suministrada por la muestra tiene mayor importancia o peso en la estimación que la suministrada por las distribuciones a priori), por lo que la estimación Bayesiana se va a acercar más a la estimación frecuentista.

#### 4 Conclusiones

En ambos enfoques las cargas factoriales del modelo de medición muestran valores aceptables, además la mayoría de las relaciones estructurales entre variables latentes son similares y dan evidencia empírica a favor de las relaciones causales planteadas desde la teoría. Así mismo, la similitud en la magnitud y dirección de los coeficientes de la estimación frecuentista y Bayesiana, se debe principalmente a que se utiliza para el análisis una muestra grande y se definen distribuciones a priori desinformativas para el caso Bayesiano

La relación causal entre ambiente educativo del colegio y motivación hacia la lectura no fue la esperada, esto podría ser producto de que los indicadores que representan al constructo ambiente educativo están medidos a nivel institucional y no a nivel del estudiante. Se podría pensar en un modelo con estructura multinivel que permita incorporar variables a nivel de estudiante, así como del contexto del centro educativo, de manera que se tendría una representación más adecuada de la relación entre variables latentes.

Los datos de la evaluación PISA 2009 no tienen a disposición datos para construir indicadores que permitan la medición de los constructos auto eficacia en matemática, ansiedad hacia la matemática, motivación hacia la matemática y calidad del docente en matemática, se podría entonces, evaluar el modelo teórico planteado con datos de otras evaluaciones PISA más actuales para aproximar estas variables latentes y poder estudiar el ajuste del modelo inicial planteado a los datos, pese a esto se ha encontrado evidencia empírica, en estos datos de PISA 2009, de que la competencia lectora tiene un efecto importante sobre la alfabetización matemática.

A partir de los resultados obtenidos, es posible identificar la importante relación causal entre la competencia lectora y la alfabetización matemática, de forma empírica, se encontró evidencia de que a mayor competencia lectora se tendrá un aumento considerable en la alfabetización de los estudiantes. De esta manera se recomienda al Ministerio de Educación Pública (MEP), centrar sus esfuerzos en incluir en el currículo de todas las asignaturas el desarrollo de la competencia lectora, generar espacios para la lectura de textos académicos como recreativos, así como velar por que en cada institución cuente con un buen clima educativo en lo que respecta a las gestiones administrativas del mismo, cambios que presentan un reto a largo plazo para el sistema educativo costarricense.

La relación directa entre las habilidades básicas de razonamiento del estudiante hacia el puntaje de alfabetización matemática en PISA no es relevante (0,06), sino más bien se presenta mediante la competencia lectora, lo cual evidencia aún más la estrecha relación entre estos últimos constructos, el efecto indirecto entre la habilidad del estudiante y los

resultados en alfabetización matemática fue de 0,44, evidenciado que estas habilidades son también importantes para el desarrollo de la alfabetización matemática.

## 6 Anexos

### Anexo 1

#### Parámetros estimados del modelo SEM por máxima verosimilitud y enfoque bayesiano. Solución no estandarizada

Relación	Máxima Verosimilitud		Estimación Bayesiana				
	Estimación	Error Estándar	Media	Posterior Std	Intervalo de credibilidad		
					2,5% 97,5%		
AMB_EDUC	CLIM_POS	0,81	0,01	0,81	0,04	0,74	0,88
	GEST_DIR	0,16	0,01	0,17	0,02	0,14	0,20
HABIL	PROMOCION	0,49	0,01	0,49	0,01	0,47	0,52
CLIM_EH	LIBROS	4,22	0,02	4,01	0,15	3,70	4,31
	LECT_LIN	2,35	0,01	2,08	0,10	1,90	2,28
MOT_LECT	LECT_PRO	1,10	0,08	1,06	0,07	0,92	1,20
	LECT_TEX	0,36	0,03	0,36	0,03	0,29	0,43
	ACT_LECT	0,21	0,02	0,21	0,02	0,18	0,25
COMP_LEC	READ2	1,00	0,01	1,01	0,01	0,99	1,02
	READ3	1,01	0,01	1,01	0,01	0,99	1,03
	READ4	1,01	0,01	1,01	0,01	0,99	1,03
	READ5	1,00	0,01	1,00	0,01	0,99	1,02
ALF_MATE	MATH2	1,01	0,01	1,01	0,01	0,99	1,02
	MATH3	1,00	0,01	1,00	0,01	0,98	1,02
	MATH4	1,00	0,01	1,00	0,01	0,98	1,02
	MATH5	1,00	0,01	1,00	0,01	0,98	1,02
MOT_LECT	CLIM_EH	1,44	0,02	1,29	0,10	1,11	1,49
	AMB_EDUC	-0,24	0,02	-0,15	0,03	-0,20	-0,10
COMP_LEC	MOT_LECT	26,06	2,88	32,03	3,21	25,76	38,29
	AMB_EDUC	45,35	1,14	45,04	2,45	40,20	49,76
	HABIL	45,92	1,14	47,12	1,57	44,09	50,25
ALF_MATE	COMP_LEC	0,70	0,01	0,70	0,01	0,68	0,73
	HABIL	4,68	0,83	4,92	1,02	2,98	6,94
	AMB_EDUC	15,24	0,77	14,49	1,53	11,47	17,43

**Fuente:** Datos de la muestra costarricense de PISA

## Anexo 2

**Descripción de los indicadores o variables observables para la medición de cada constructo o variable latente incluida en el modelo****1. Ambiente Educativo del Hogar**

- Tenencia de bienes asociados al capital cultural: Puntaje del (la) estudiante en una escala de tenencia de bienes, su rango va de 0 a 1, y se compone de 5 ítems. Los bienes que conforman la escala son:

- Libros de literatura clásica
- Libros de poesía
- Obras de arte
- Enciclopedia

Cantidad de libros en la casa: Cantidad de libros en la casa, los valores de la variable son:

- 1= 0 a 10 libros
- 2= 11 a 25 libros
- 3= 26 a 100 libros
- 4= 101 a 200 libros
- 5= 201 a 500 libros
- 6= Más de 500 libros

- Frecuencia de lectura en línea: Índice de frecuencia de lectura en línea, su rango va de 0 a 4. El índice se obtuvo a partir del promedio de los siguientes ítems:

- Leer el correo electrónico
- Chatear en línea
- Leer noticias en línea
- Utilizar un diccionario o una enciclopedia en línea
- Buscar información en línea sobre un tema en particular
- Participar en debates y foros en línea
- Buscar información práctica en línea

El rango va de 1 a 5 porque los ítems pueden tomar los valores:

- 0=No sé de qué se trata
- 1=Nunca o casi nunca
- 2=Varias veces por mes
- 3=Varias veces por semana
- 4=Varias veces por día

**2. Habilidades básicas de razonamiento**

- Grado que cursa: Grado que cursa el (la) estudiante, su rango va de 7 a 12.
- Promoción: Índice de promoción, su rango va de 1 a 3. El índice se obtuvo a partir del promedio de los siguientes ítems sobre frecuencia de repetición:

- En educación primaria
- En III Ciclo de la Educación General Básica
- En educación media

El rango va de 1 a 3 porque dichos ítems pueden tomar los siguientes valores:

- 1= Nunca

2=Sí, una vez

3=Sí, dos veces o más

Antes de obtener el promedio, cada ítem fue recodificado de manera que a mayor es el promedio, se tenga una mayor promoción.

### 3. Ambiente educativo del colegio

- Facilidad para desarrollar enseñanza: Índice de factores asociados a facilidades para desarrollar la enseñanza, su rango va de 1 a 4. El índice se obtuvo a partir del promedio de los siguientes ítems:

- Falta de profesores calificados de Ciencias
- Falta de profesores calificados de Matemática
- Falta de profesores calificados de Español
- Falta de profesores calificados de otras materias
- Falta de personal de biblioteca
- Falta de personal auxiliar
- Escasez o inadecuación de los laboratorios de ciencias
- Escasez o inadecuación del material pedagógico
- Escasez o inadecuación de computadoras para el trabajo en clase
- Escasez o insuficiencia de la conexión a Internet
- Escasez o inadecuación del software para trabajo en clase
- Escasez o inadecuación de los recursos de la biblioteca
- Escasez o inadecuación de equipos audiovisuales

El rango va de 1 a 4 porque cada ítem puede tomar los valores:

1=De ninguna manera

2=Muy poco

3=En cierta medida

4=Mucho

Antes de obtener el promedio, cada ítem fue recodificado de manera que valores altos en el índice indican que hay menos problemas que afectan la capacidad para impartir enseñanza.

- Escala de gestión del director: Escala de gestión del director en la institución, su rango va de 1 a 4, y se compone de 13 ítems. Los ítems que conforman la escala son:
  - Trato que las actividades de desarrollo profesional de los profesores estén de acuerdo con los objetivos de enseñanza de la institución
  - Velo por que los profesores trabajen de acuerdo con los objetivos pedagógicos de la institución
  - Voy a los salones para observar las clases
  - Me sirvo de los resultados de los estudiantes para elaborar los objetivos pedagógicos de la institución
  - Doy consejo a los profesores sobre la manera como pueden mejorar sus prácticas
  - Sigo de cerca el trabajo de los estudiantes
  - Cuando un profesor tiene un problema en clase, tomo la iniciativa de discutir de ello con él / ella

- Informo a los profesores sobre las posibilidades de actualizar sus conocimientos y competencias
- Me cercioro de que las actividades llevadas a cabo en clase estén de acuerdo con nuestros objetivos pedagógicos
- Tengo en cuenta los resultados de los exámenes en la toma de decisiones con relación al ajuste de los programas de las clases
- Hago lo posible para que la puesta en práctica de los programas de estudio sea pertinente
- Cuando un profesor señala un problema que tuvo en clase, buscamos una solución juntos
- Estoy atento a los comportamientos susceptibles de perturbar el trabajo en clase

El rango va de 1 a 4 porque cada ítem puede tomar los valores:

1=Nunca

2=Rara vez

3=Bastante frecuente

4=Muy frecuente

- Clima escolar: Escala de clima escolar positivo, su rango va de 1 a 4, y se compone de 12 ítems. Valores altos representan un clima más desfavorable. Los ítems que conforman la escala son:

- Bajas expectativas de los profesores hacia los estudiantes
- El ausentismo de los estudiantes
- Malas relaciones entre estudiantes y profesores
- Estudiantes que interrumpen las clases
- Profesores que no identifican las necesidades individuales de los estudiantes
- Al ausentismo de los profesores
- Estudiantes que se ausentan en las clases sin justificación
- La falta de respeto de los estudiantes hacia los profesores
- Personal que se resiste a los cambios
- El consumo de alcohol o de sustancias ilegales por los estudiantes
- Profesores que son demasiado estrictos con los estudiantes
- Estudiantes que amenazan o intimidan a otros estudiantes

El rango va de 1 a 4 porque cada ítem puede tomar los valores:

1=De ninguna manera

2=Muy poco

3=En cierta medida

4=Mucho

Antes de obtener el promedio, cada ítem fue recodificado de manera que valores altos en el índice indican que hay un clima más positivo.

#### 4. Hábitos, actitudes y motivación hacia la lectura

- Escala de actitud hacia la lectura: Puntaje del (la) estudiante en una escala de actitud hacia la lectura, su rango va de 1 a 4, y se compone de 9 ítems. Los ítems que conforman la escala son:
  - Solamente leo si lo tengo que hacer (se recodificó para cambiar su dirección)

- La lectura es uno de mis pasatiempos preferidos
- A mí me gusta hablar con la gente sobre libros
- Me gusta que me regalen libros
- Para mí la lectura es una pérdida de tiempo (se recodificó para cambiar su dirección)
- Me gusta ir a una librería o a una biblioteca
- Yo sólo leo para buscar la información que necesito
- Me gusta dar mi opinión sobre los libros que he leído
- Me gusta intercambiar libros con mis amigos

El rango va de 1 a 4 porque cada ítem puede tomar los valores:

1=Completamente en desacuerdo

2=En desacuerdo

3=De acuerdo

4=Completamente de acuerdo

- Frecuencia de lectura de textos educativos: Índice de frecuencia de lectura de distintos tipos de textos para el colegio, su rango va de 1 a 4. El índice se obtuvo a partir del promedio de los siguientes ítems:

- El índice se obtuvo a partir del promedio de los siguientes ítems:

- Textos de información sobre escritores o libros
- Poesía
- Textos que incluyen diagramas o mapas
- Ficción
- Reportes de periódicos y artículos de revistas
- Instrucciones o manuales que indican cómo construir o hacer algo
- Textos que incluyen tablas o gráficos
- Material publicitario

El rango va de 1 a 4 porque cada ítem puede tomar los valores:

1=Nunca

2=Una vez

3=Dos o tres veces

4=Varias veces

- Frecuencia de lectura por iniciativa propia: Índice de frecuencia de lectura de distintos tipos de texto por iniciativa propia, su rango va de 1 a 5. El índice se obtuvo a partir del promedio de los siguientes ítems:

- Revistas
- Tiras cómicas
- Libros de ficción (novelas, narraciones, relatos)
- Libros que no sean de ficción (didáctica, documental, informativa)
- Periódicos

El rango va de 1 a 5 porque los ítems pueden tomar los valores:

1=Nunca o casi nunca

2=Algunas veces por año

3=Alrededor de una vez por mes

- 4=Varias veces por mes
- 5=Varias veces por semana
- Tiempo de lectura por placer: Tiempo de lectura por placer, los valores de la variable son:
  - 1= Yo no leo por placer
  - 2= 30 minutos o menos por día
  - 3= Más de 30 pero menos de 60 minutos por día
  - 4= De 1 a 2 horas por día
  - 5= Más de 2 horas por día

### 5. Competencia lectora

PISA provee cinco valores plausibles del rendimiento de los estudiantes en lugar de una única medida de resultado para evaluar el área lectora, los cuales fueron utilizados la medición del constructo competencia lectora.

### 6. Alfabetización matemática

PISA provee cinco valores plausibles del rendimiento de los estudiantes en lugar de una única medida de resultado para evaluar el área matemática, los cuales fueron utilizados la medición del constructo alfabetización matemática.

## Referencias

- ABELLO, A. & MONTAÑO, J. (2013). «Leer y comprender para aprender Matemática». *VARONA: Científico-Metodológica*, 57, 60-69.
- BANDURA, A. (1977). «Self-efficacy: toward unifying theory of behavior change». *Psychological Review*, 84, 191-215.
- BANDURA, A. (1999). «Social cognitive theory: An agentic perspective». *Asian Journal of Social Psychology*, 2(1), 21-41.
- BANDURA, A.. (1982). «Self-efficacy mechanism in human agency». *American Psychologist*, 37 (2), 122-147.
- BIRENBAUM, M., & NASSER, F. (2005). «Modeling Mathematics Achievement of Jewish and Arab Eighth Graders in Israel: The Effects of Learner-Related Variables». *Educational Research and Evaluation, Taylor & Francis*. 11(3), 277-302.
- CARRASCO M. Y DEL BARRIO, M. (2002). «Evaluación de la autoeficacia en niños y adolescentes». *Psicothema*, 14(2), 323-332. Recuperado el 18 de setiembre del 2017 de: <http://www.psicothema.com/psicothema.asp?id=727>
- CARTAGENA, M. (2008). «Relación entre la Autoeficacia en el Rendimiento Escolar y los Hábitos de Estudio en el Rendimiento Académico en Alumnos de Secundaria. REICE». *Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*. 5(6), 59-99. Disponible en: <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=55160304>.

- CONEUS, K.; LAUCHT, M. & REUB, K. (2010). «The role of parental investments for cognitive and non cognitive skill formation – Evidence for the first 11 years of life». *Economics & Human Biology*. 10(2), 189-209.
- DURAND, M., HULME, C., LARKIN, R., & SNOWLING, M. (2005). «The cognitive foundations of reading and arithmetic skills in 7- to 10-year-olds». *Journal of Experimental Child Psychology*. 91(2), 113–136. doi.org/10.1016/j.jecp.2005.01.003.
- ESCOBEDO, M., H, J., ESTEBANÉ, V., & MARTÍNEZ, G. (2016). «Modelos de ecuaciones estructurales: Características, fases, construcción, aplicación y resultados». *Ciencia & trabajo*, 18(55), 16-22.
- FERNÁNDEZ, A. (2017). «Latinoamérica en pisa 2012: factores asociados a la alfabetización matemática». *Ciencias Económicas*, 35(1), 09-37.
- FERNÁNDEZ, A. (2017). «Un modelo de ecuaciones estructurales bayesiano: aplicación al rendimiento matemático en PISA 2012». *Estadística Española*. 9(192), 5-27.
- GEARY, D. (2010). «Mathematical disabilities: Cognitive, neuropsychological, and genetic components». *Learning and Individual Differences*. 20(2), 130-133. doi:10.1037/0033-2909.114.2. 345.
- GONZÁLEZ-PIENDA, J., NÚÑEZ J., ÁLVAREZ L., ROCES C., GONZÁLEZ-PUMARIEGA S., GONZÁLEZ P., BERNARDO A. (2003). «Adaptabilidad y cohesión familiar, implicación parental en conductas autoregulatorias, autoconcepto del estudiantes y rendimiento académico». *Psicothema*, 15 (3), 471-477. Recuperado de <http://www.psicothema.com/pdf/1090.pdf>
- HAIR, J., ANDERSON, R., TATHAM, R., BLACK, W (1999). «Análisis Multivariante». 5a ed. Madrid: Prentice.
- HÉBERT, T., & FURNER, J. (1997). «Helping High Ability Students Overcome Math Anxiety through Bibliotherapy». *The Journal of Secondary Gifted Education*, 8(4), 164-178.
- HOYLE, R. H. (2012). «Handbook of Structural Equation Modeling». New York: The Guilford Press.
- JÖRESKOG, K. G., & SÖRBOM, D. (2008). «LISREL 8.80 user's guide». Lincolnwood, IL: Scientific Software International.
- KERLINGER, F. & LEE, H. (2002). «Investigación del comportamiento. Métodos de investigación en las ciencias sociales». México: McGraw-Hill.
- LITTLE, T. D. (2013). «Longitudinal Structural Equation Modeling». New York: The Guilford Press.
- MONTERO, E. ET AL. (2012). «Costa Rica en las pruebas PISA 2009 de Competencia Lectora y Alfabetización Matemática. Informe Final. Cuatro Informe del Estado de la Educación». Programa Estado de la Nación.
- MULAIK, S. A. (2009). «Linear causal modeling with structural equations ». New York: CRC Press Taylor & Francis Group.



- MUTHÉN, B., & ASPAROUHOV, T. (2012). «Bayesian SEM: A more flexible representation of substantive theory ». *Psychological Methods*, 17(3), 313-335.
- MUTHÉN, B. (2010). «Bayesian analysis in Mplus: A brief introduction ». Disponible en <http://www.statmodel.com/download/IntroBayesVersion%203.pdf>
- MUTHÉN, L. K., & MUTHÉN, B. O. (2012). «Mplus user's guide (7th ed.)». Los Angeles, CA: Muthén & Muthén.
- MULLIS, I., MARTIN M., FOY, P., & DRUCKER, K. (2012). «PIRLS 2011 international results in reading». *Chestnut Hill, MA: TIMSS & PIRLS International Study Center, Lynch School of Education, Boston College.*
- OECD. (2009). «PISA 2009 Assessment Framework. Key competencies in reading, mathematics and science». Recuperado el 18 de setiembre del 2017 de: <https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/44455820.pdf>
- OCDE. (2009). «PISA: Compresión Lectora -Marco y análisis de los ítems». Recuperado el 18 de setiembre del 2017 de: [http://www.iseivei.net/cast/pub/itemsliberados/lectura2011/lectura\\_PISA2009completo.pdf](http://www.iseivei.net/cast/pub/itemsliberados/lectura2011/lectura_PISA2009completo.pdf)
- OECD-SANTILLANA. (2011). «Informe Pisa. Lo que los estudiantes saben y pueden hacer. Rendimiento de los estudiantes en lectura, matemáticas y ciencias» (Vol. I).
- PAJARES, F., & GRAHAM, L. (1999). «Self-Efficacy, Motivation Constructs, and Mathematics Performance of Entering Middle School Students». *Contemporary Educational Psychology*, 24(2), 124-139.
- PALACIOS, A., ARIAS, V., & ARIAS, B. (2014). «Attitudes Towards Mathematics: Construction and Validation of a Measurement Instrument». *Revista de Psicodidáctica*, 19(1), 67-91.
- PRESS, S. J. (2003). «Subjective and objective Bayesian statistics: Principles, models, and applications» (2nd edición.). New York: Wiley.
- RIVERO, J. (2000). «Reforma y desigualdad educativa en América Latina». *Revista Iberoamericana De Educación*, 23, 103-133. Recuperado a partir de <https://rieoei.org/RIE/article/view/1008>.
- RODINO, A. (2012) «La competencia lectora de los estudiantes costarricenses según la evaluación internacional PISA 2009+». *Cuarto informe del estado de la educación*. San José, Costa Rica.
- RUIZ, M., PARDO, A., SAN MARTÍN, R. (2010). «Modelos de ecuaciones estructurales (Structural equation models)» *Papeles del Psicologo*, 31(1), 34-45.
- SALAS, O. (2011). «Constructo “Alfabetización Matemática”, según PISA. Cuarto Informe del Estado de la Educación». Recuperado el 18 de setiembre del 2017, de [http://estadonacion.or.cr/files/biblioteca\\_virtual/educacion/004/salas\\_alfabetizacion\\_matematica\\_pisa.pdf](http://estadonacion.or.cr/files/biblioteca_virtual/educacion/004/salas_alfabetizacion_matematica_pisa.pdf)

- SÁNCHEZ, J., SEGOVIA, A. & MIÑÁN, A. (2011). «Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros». *Profesorado*, 15(3). 1989-639X (edición electrónica). Recuperado el 18 de setiembre del 2017 de <http://www.ugr.es/~recfpro/rev153COL6.pdf>
- SIMMONS, F., & SINGLETON, C. (2008). «Do weak phonological representations impact on arithmetic development? A review of research into arithmetic and dyslexia». *Dyslexia*, 14, 77–94. doi:10.1002/dys.341
- SPEARMAN, CH. (1904). «General intelligence objectively determined and measured». *American J. of Psychology*, 15, 201-293.
- VARGAS, M & MONTERO, E. (2016). «Factores que determinan el rendimiento académico en Matemáticas en el contexto de una universidad tecnológica: aplicación de un modelo de ecuaciones estructurales». *Universitas Psychologica Colombia*. 15(4), 1657-9267.
- VILENIUS, P. M., AUNOLA K. & NURMI, J. (2008). «The association between mathematical word problems and reading comprehension». *Educational Psychology, Taylor & Francis*. 28(4), 409-426.
- VILLAR, A., DE LA RICA, S., GARCÍA, J., GONZÁLEZ, A., HIDALGO, M., ROBLES, J., SERRANO, L., SOLER, A. (2012). «PISA 2009 y el Sistema Educativo Español». Educación y desarrollo, 1era edición. Bilbao: Fundación BBVA.
- WANG, HEFETZ & LIBERMAN (2017). « Applying structural equation modelling in educational research / La aplicación del modelo de ecuación estructural en las investigaciones educativas». *Cultura y Educación, Taylor & Francis*, 29(3), 563-618.
- WANG, J., & WANG, X. (2012). « Structural equation modeling: Applications using Mplus». New York, NY: John Wiley.
- ZHANG, X., KOPONEN, T., RÄSÄNEN, P., AUNOLA, K., LERKKANEN, M. K., & NURMI, J. E. (2014). «Linguistic and spatial skills predict early arithmetic development via counting sequence knowledge». *Child Development*, 85(3), 1091-1107.