Teoría de conjuntos y análisis combinatorio

Herramientas para el estudio de la probabilidad

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

0

Tema I

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

Los “*eventos*” y “*experimentos*” que vamos a utilizar se modelan y analizan matemáticamente. Dos herramientas útiles para ello son la **teoría de conjuntos**, para relacionar y agrupar eventos, y el **análisis combinatorio**, para contar el número de posibles resultados de un experimento.

Teoría de conjuntos

Tema de estudio del curso: "la probabilidad de ocurrencia de un **evento**".

¿Qué es un evento?

Definiremos un **evento** como un **conjunto** de resultados elementales de un experimento.

$$\{\ \}$$

- Estos son resultados elementales "favorables" a (o coincidentes con) el evento en el que están incluidos.
- Ejemplo: el evento llamado { número par en un dado } tiene los resultados elementales 2, 4 y 6.
- Como conjunto que es, un evento sigue las reglas y la notación del ***álgebra de conjuntos***.

Posibles eventos en un dado

Diagrama de Venn

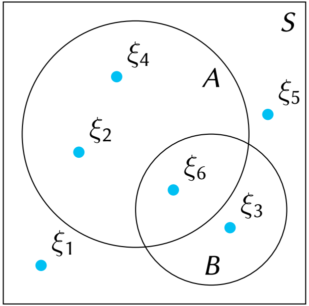


Figura: Diagrama de Venn: representación gráfica de conjuntos.

Sean $\xi_1, \ldots, \xi_6$ las caras de un dado. Sea A los números divisibles por 2 y B los números divisibles por 3. Los resultados elementales ξ_n pueden formar parte de uno o más eventos (conjuntos). El *conjunto universal* S contiene todos los eventos posibles: ⚀, ⚁, ⚂, ⚃, ⚄, ⚅.

- Un par de llaves $\{\quad\}$ denota un conjunto.
- Los elementos de un conjunto se escriben separados por una coma: $\{rojo, verde, azul\}$.
- El conjunto o evento puede ser descrito en palabras.
- Un conjunto siempre se representa por una letra mayúscula $(A, B, \ldots)$
- Si los elementos del conjunto son letras, van en minúscula $(a, b, c, \ldots, \alpha, \beta, \gamma, \ldots)$.
- Los elementos de un conjunto se pueden escribir en cualquier orden y no pueden repetirse.

Símbolo	Significado	Ejemplo
$\in$	pertenece a	$a_1 \in A$
$\notin$	no pertenece a	$b_1 \notin A$
$\subset$	es un subconjunto de	$\{a_1, a_2\} \subset A$
$\not\subset$	no es un subconjunto de	$\{a_1, a_2\} \not\subset B$
$:$	tal que	$\{n : n > 100\}$
$\mid$	tal que	$\{x \mid -20 > x\}$

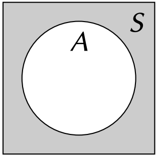
Cuadro: Algunos símbolos matemáticos del álgebra de conjuntos

Conjunto universal S o U, tiene todos los elementos posibles.

Igualdad Dos conjuntos A y B son iguales, denotado por $A = B$, si y solo si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Complemento Se supone que $A \subset S$. El complemento del evento A, denotado $\overline{A}$, es el conjunto que contiene todos los elementos en S pero no en A.

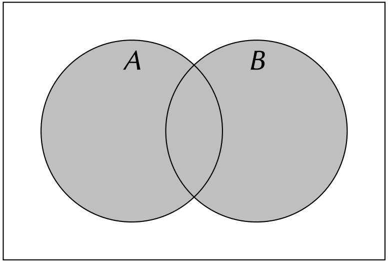
$$\overline{A} = \{\xi : \xi \in S \text{ y } \xi \notin A\} \tag{1}$$



"Hay 10 tipos de personas en el mundo: los que entienden binario (A) y los que no ($\overline{A}$)"

La unión de dos conjuntos A y B, denotado $A \cup B$, es el conjunto que contiene todos los elementos en A, en B o en ambos.

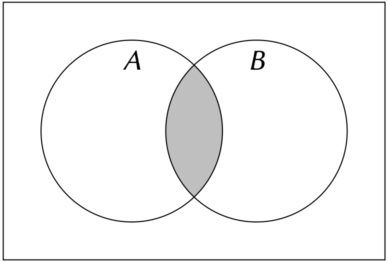
$$
\begin{aligned}
A \cup B &= \{\xi : \xi \in A \text{ o } \xi \in B\} \\
A \cup B &= \{\xi : \xi \in A \vee \xi \in B\}
\end{aligned} \tag{2}
$$



Tiene similitud con la operación lógica OR.

La intersección de dos conjuntos A y B, denotado $A \cap B$ (o simplemente AB), es el conjunto que contiene todos los elementos que están en A y en B.

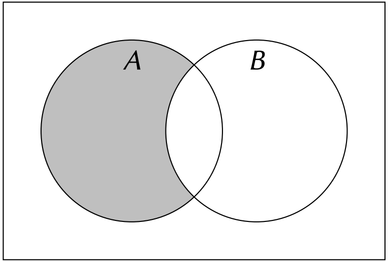
$$\begin{aligned} A \cap B &= \{\xi : \xi \in A \text{ y } \xi \in B\} \\ A \cap B &= \{\xi : \xi \in A \wedge \xi \in B\} \end{aligned} \tag{3}$$



Tiene similitud con la operación lógica AND.

La diferencia de dos conjuntos A y B, denotado $A\backslash B$ (que puede leerse como "A, no B"), es el conjunto que contiene todos los elementos que están en A pero no en B.

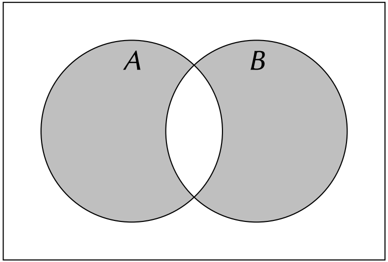
$$A\backslash B = \{\xi : \xi \in A \text{ y } \xi \notin B\} \tag{4}$$



Notar que $A\backslash B = A \cap \overline{B}$.

La diferencia simétrica de dos conjuntos A y B, denotado $A \triangle B$, es el conjunto que contiene todos los elementos que están en A o en B pero no en ambos.

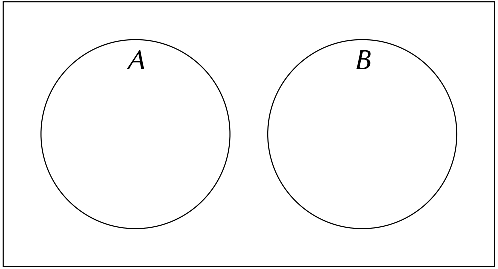
$$A \triangle B = \{\xi : \xi \in A \text{ o } \xi \in B \text{ y } \xi \notin A \cap B\} \tag{5}$$



Tiene similitud con la operación lógica XOR.

Conjunto vacío El conjunto que no contiene elementos es llamado *conjunto vacío*, denotado $\varnothing$. Notar que $\varnothing = \overline{S} = \{\}$.

Conjuntos disjuntos Dos conjuntos A y B son llamados disjuntos o *mutuamente excluyentes* (ME) si no contienen elementos comunes, es decir, si $A \cap B = \varnothing$.



Las definiciones de unión e intersección de dos conjuntos puede ser extendida a cualquier número finito de conjuntos, de la forma:

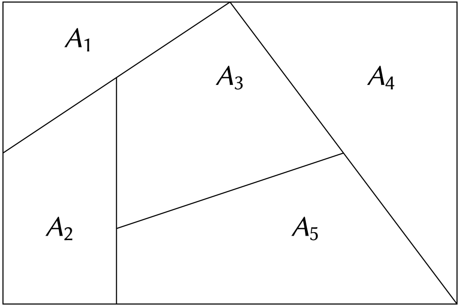
$$
\begin{aligned}
\bigcup_{i=1}^{N} A_i &= A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_N \\
&= \{\xi : \xi \in A_1 \text{ o } \xi \in A_2 \text{ o } \cdots \text{ o } \xi \in A_N\}
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
\begin{aligned}
\bigcap_{i=1}^{N} A_i &= A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_N \\
&= \{\xi : \xi \in A_1 \text{ y } \xi \in A_2 \text{ y } \cdots \text{ y } \xi \in A_N\}
\end{aligned} \tag{7}
$$

Si

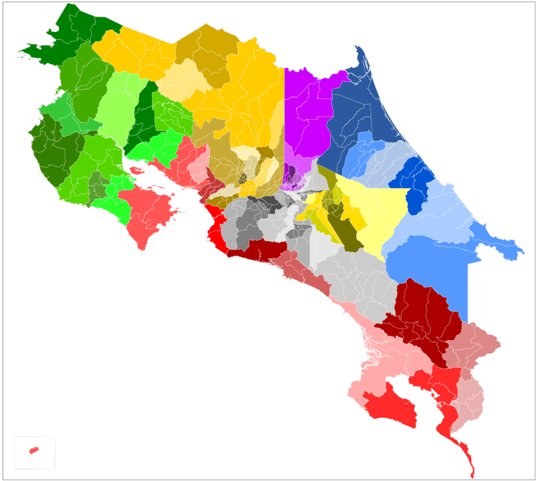
- $A_i \cap A_j = \varnothing$ para $i \neq j$ (son *disjuntos* o *mutuamente excluyentes*), y
- $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$ (son *exhaustivos*),

entonces la colección $\{A_i ; 1 \leq i \leq k\}$ se dice que forma una *partición* de S.



El mapa político de Costa Rica como un ejemplo de "partición del conjunto universal"

Álgebra de conjuntos



Cuando los conjuntos son *contables*, el tamaño (o cardinalidad) del conjunto A, denotado $|A|$ o $n(A)$, es el número de elementos contenidos en A.
Cuando los conjuntos tienen un número finito de elementos, el tamaño tiene las siguientes propiedades:

- Si $A \cap B = \varnothing$, entonces $|A + B| = |A| + |B|$.
- $|\varnothing| = 0$.
- Si $A \subset B$, entonces $|A| \leq |B|$.
- $|A \cup B| + |A \cap B| = |A| + |B|$.

El producto (o *producto cartesiano*) de los conjuntos A y B, denotado por $A \times B$, es el conjunto de pares ordenados de elementos de A y B. Notar que $A \times B \neq B \times A$, y que $|C| = |A \times B| = |A| \times |B|$.

$$C = A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\} \tag{8}$$

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbf{b_1} & \mathbf{b_2} & \cdots & \mathbf{b_n} \\ \mathbf{a_1} & (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \cdots & (a_1, b_n) \\ \mathbf{a_2} & (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \cdots & (a_2, b_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{a_m} & (a_m, b_1) & (a_m, b_2) & \cdots & (a_m, b_n) \end{array} \tag{9}$$

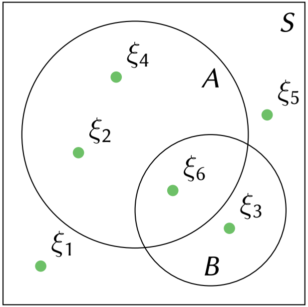


Figura: Sean $\xi_1, \ldots, \xi_6$ las caras de un dado, sea el evento A los números divisibles por 2 y el evento B los números divisibles por 3.

- $S = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6\}$
- $\overline{S} = \varnothing$
- $A = \{\xi_2, \xi_4, \xi_6\}$
- $\overline{A} = \{\xi_1, \xi_3, \xi_5\}$
- $B = \{\xi_3, \xi_6\}$
- $A \cup B = \{\xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_6\}$
- $A \cap B = \{\xi_6\}$
- $A \backslash B = \{\xi_2, \xi_4\}$
- $B \backslash A = \{\xi_3\}$
- $A \triangle B = \{\xi_2, \xi_3, \xi_4\}$
- $\overline{A \cup B} = \{\xi_1, \xi_5\}$

- $\overline{S} = \varnothing$
- $\overline{\varnothing} = S$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $S \cup A = S$
- $S \cap A = A$
- $A \cup \overline{A} = S$
- $A \cap \overline{A} = \varnothing$

- $A \cup \varnothing = A$
- $A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \backslash B = A \cap \overline{B}$
- $S \backslash A = \overline{A}$
- $A \backslash \varnothing = A$
- $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

Conmutatividad El orden en que se toman los elementos no altera el resultado.

$$A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A \tag{10}$$

Asociatividad El orden en que se ejecutan las operaciones no altera el resultado.

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \tag{11}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \tag{12}$$

Distributividad La intersección de una unión o la unión de una intersección pueden separarse.

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \tag{13}$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \tag{14}$$

De Morgan Complemento de una unión o de una intersección.

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \tag{15}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \tag{16}$$

Algunos resultados útiles del análisis combinatorio

En un diagrama tipo árbol donde i-ésimo nivel tiene n_i ramas, entonces la cantidad de posibles combinaciones en r niveles es $n_1 \times n_2 \cdots \times n_r$.

Ejemplo

- ¿Cuántas combinaciones posibles hay con cuatro sabores de helados y tres conos distintos?
- ¿Cuántas combinaciones posibles hay con cuatro sabores de helados, tres conos distintos y diez *toppings*?

52! = 80 658 175 170 943 878 571 660 636 856 403 766 975 289 505 440 883 277 824 000 000 000 000

Este número es **grande**.

En muchos análisis de la situación que se estudia, es necesario "contar" todos los resultados elementales posibles de un experimento. Este puede ser un número muy grande.

Los principales tipos son **combinaciones**, **permutaciones**, **particiones** y **composiciones**.

Es la selección de k ítemes de una colección de n elementos, *donde el orden no importa.*

$$ {}_n\mathbf{C}_k \equiv \binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!} \tag{17} $$

Se lee ${}_n\mathbf{C}_k$ como "de n escoge k" y $\binom{n}{k}$ es el ***coeficiente binomial***.

Ejemplo

Para hacer un grupo de cinco personas de una clase de 30 alumnos hay

$$ {}_{30}\mathbf{C}_5 \equiv \binom{30}{5} \equiv \frac{30!}{5!(30-5)!} = 142\,506 $$

combinaciones posibles.

Fuentes: **MathWorld** (http://mathworld.wolfram.com/Combination.html) y **Wikipedia** (https://en.wikipedia.org/wiki/Combination).

Es el arreglo de k ítemes de una colección de n elementos, *donde el orden sí importa.*

$$ {}_n\mathbf{P}_k \equiv \frac{n!}{(n-k)!} \tag{18} $$

Se lee ${}_n\mathbf{P}_k$ como "de n escoge k".

Ejemplo

Para hacer una *junta directiva* de cinco personas de una clase de 30 alumnos hay

$$ {}_{30}\mathbf{P}_5 \equiv \frac{30!}{(30-5)!} = 17\ 100\ 720 $$

permutaciones posibles.

Fuentes: **MathWorld** (http://mathworld.wolfram.com/Permutation.html) y **Wikipedia** (https://en.wikipedia.org/wiki/Permutation).

Sean $r_1, ..., r_l$, con l un entero positivo, números tales que $r_1 + r_2 + r_l = n$. Entonces, la cantidad de formas en las que una población de n elementos puede ser particionada en l sub-poblaciones donde la primera contiene r_1 elementos, la segunda r_2 y así sucesivamente, es:

$$\frac{n!}{r_1!r_2!\cdots r_l!} \tag{19}$$

Este coeficiente es conocido como ***coeficiente multinominal***.

Ejemplo

Un vendedor de autos tiene 6 carros disponibles de distinto modelo cada uno y los quiere acomodar en grupos de 1, 2 y 3 carros respectivamente por un tema de espacio. ¿De cuántas formas distintas los puede acomodar?

$$n_E = \frac{6!}{1! \times 2! \times 3!} = 60 \tag{20}$$

Fuentes: Stark, H., Woods, J. (2012) *Probability, Statistics, and Random Processes for Engineers.* Nueva Jersey: Pearson.

Una composición en análisis combinatorio es un arreglo ordenado de k elementos no negativos que suman n. Es por tanto una partición en la que el orden sí importa.
Por ejemplo, hay ocho composiciones de 4,

$$\begin{aligned}
4 &= 4 \\
&= 3 + 1 \\
&= 2 + 2 \\
&= 2 + 1 + 1 \\
&= 1 + 3 \\
&= 1 + 2 + 1 \\
&= 1 + 1 + 2 \\
&= 1 + 1 + 1 + 1
\end{aligned}$$

Un entero positivo n tiene $2^{(n-1)}$ composiciones.
El número de composiciones de n en k partes (donde 0 no es una parte) está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_k(n) &= \binom{n-1}{k-1} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \end{aligned} \tag{21}$$

Fuente: Stover, Christopher y Weisstein, Eric W. "Composition". De MathWorld – A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/Composition.html

- Una "mano de poker" consiste en cinco cartas escogidas de un mazo de 52 cartas, ¿cuántas posibilidades hay?

$$ {}_{52}\mathbf{C}_5 \equiv \binom{52}{5} \equiv \frac{52!}{5!(52-5)!} = 2\,598\,960 $$

- Las placas de carros en el país tienen tres consonantes y tres números, ¿cuántas placas son posibles? ¿Se agotarán pronto?

$$ 21 \times 21 \times 21 \times 10 \times 10 \times 10 = 9\,261\,000 $$

- Las campanas de una iglesia, tocadas al estilo inglés.

Cuando sea posible, las presentaciones tendrán referencias a videos[5] o artículos útiles… o al menos entretenidos.

- **How secure is 256 bit security?**, *3Blue1Brown*, https://youtu.be/S9JGmA5_unY
- **Mathematical Impressions: Change Ringing**, *SimonsFoundation*, https://youtu.be/3lyDCUKsWZs

[5] Muchas veces los videos serán en inglés, quizá con subtítulos. Aunque espero que no sea un inconveniente, ojalá sirva de gentil recordatorio de la importancia de seguir aprendiendo inglés.