# La probabilidad

## Conceptos básicos

Fabián Abarca Calderón

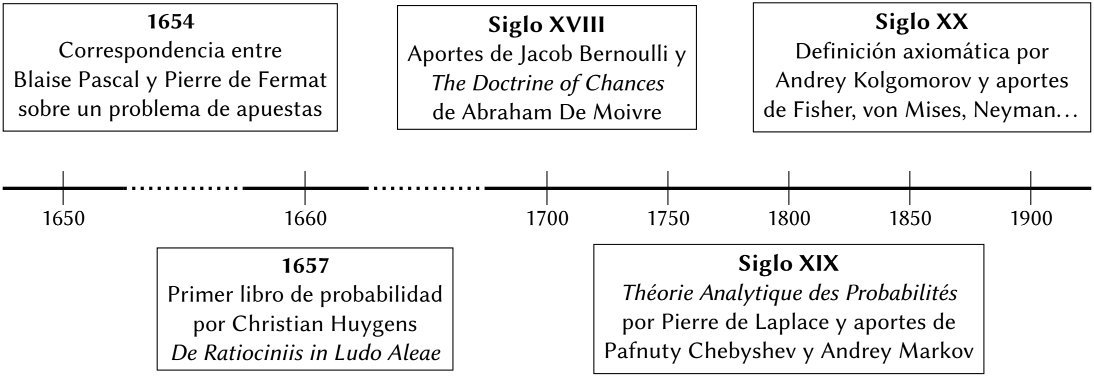
IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

**1**

10 de agosto de 2020
Semana 1 — Tema I

Universidad de Costa Rica
Escuela de Ingeniería Eléctrica

La probabilidad es una rama de la matemática con inmensa aplicación práctica en muchas disciplinas: desde el quehacer personal y doméstico hasta grandes decisiones sociales. En nuestra disciplina es, además, fundamental para el análisis de… señales y sistemas.


**1654**
Correspondencia entre
Blaise Pascal y Pierre de Fermat
sobre un problema de apuestas
**Siglo XVIII**
Aportes de Jacob Bernoulli y
*The Doctrine of Chances*
de Abraham De Moivre
**Siglo XX**
Definición axiomática por
Andrey Kolgomorov y aportes
de Fisher, von Mises, Neyman…
1650
1660
1700
1750
1800
1850
1900
**1657**
Primer libro de probabilidad
por Christian Huygens
*De Ratiociniis in Ludo Aleae*
**Siglo XIX**
*Théorie Analytique des Probabilités*
por Pierre de Laplace y aportes de
Pafnuty Chebyshev y Andrey Markov

THE

# DOCTRINE

OF

# CHANCES:

OR,

A Method of Calculating the Probability of Events in Play.

By *A. De Moivre.* F. R. S.

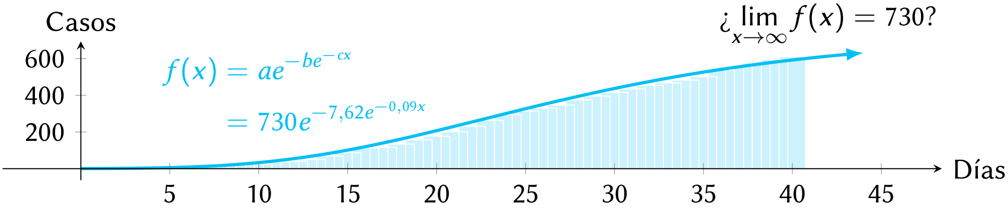
*LONDON:*

Printed by *W. Pearson,* for the Author. MDCCXVIII.

# ¿Qué es y para qué sirve la probabilidad?

La probabilidad es una *medida* de la certidumbre de ocurrencia de un evento.

- Permite tomar decisiones en un Universo fundamentalmente incierto.
- Es útil para tratar de
  - *adivinar el* ***futuro***
  - *adivinar el* ***pasado***
- No es posible saber lo que va a pasar, pero podemos **modelar y cuantificar** lo que podemos esperar, con base en lo que ya ha sucedido.



Puede ser la física (a partir del principio de incertidumbre), o por ser un **sistema caótico** (extremadamente sensible a las condiciones iniciales), o por el **conocimiento imperfecto** del observador (el fenómeno podría ser predecible desde algún punto de vista, pero el observador no lo sabe).

# ¿Qué aplicaciones tiene la teoría de probabilidad?

- Teoría de la información
- Comunicaciones
- Reconocimiento de patrones
- Producción industrial
- Finanzas
- Política pública
- Aprendizaje automático
- Meteorología
- Epidemias
- (...)

# Los conceptos de la probabilidad

La probabilidad de un evento $A$ se define *a priori* (sin experimentación) como

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \frac{\text{Número de resultados favorables a } A}{\text{Número total de resultados posibles}} \\
&= \frac{|A|}{|S|} = \frac{n(A)}{n(S)}
\end{aligned} \tag{1}
$$

en el caso de que todos los resultados (o *salidas*) son igualmente probables.

**Operador $P(\cdot)$**

El operador $P(\cdot)$ es una *medida* de la certeza de la ocurrencia del evento descrito $\cdot$.

Considerar una caja con $n$ bolas blancas y $m$ bolas rojas. En este caso, hay dos resultados elementales: una bola blanca o una bola roja. ¿Cuál es la probabilidad de seleccionar una bola blanca?

$$P(\text{seleccionar una bola blanca}) = \frac{n}{n+m}$$

$$P(A) = \frac{\text{Número de resultados favorables a } A}{\text{Número total de resultados posibles}}$$

- La probabilidad es utilizada para definir la probabilidad (referencia cíclica).
- No puede ser utilizado para situaciones donde los resultados no son igualmente probables.
- No puede ser utilizado para un número infinito de resultados posibles.

### Frecuencia relativa

Un experimento aleatorio se realiza muchas veces, entonces la probabilidad de un evento $A$ se define como:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n} \tag{2}$$

donde $n(A)$ es el número de ocurrencias de $A$ y $n$ es el número total de "experimentos" o "pruebas".

Este es un método común para determinación experimental de probabilidades.

## Personas con obesidad

$$P(\text{ser obeso}) = \frac{\text{Personas con obesidad}}{\text{Población mundial}} = \frac{725\ 039\ 900}{7\ 687\ 217\ 424} \approx 9,43\,\%$$

## Muertes por fumado

$$P(\text{morir por fumar}) = \frac{\text{Muertes por fumado}}{\text{Muertes este año}} = \frac{805\ 310}{9\ 514\ 900} \approx 8,46\,\%$$

¿Es correcto decir que tengo un 9,43 % de probabilidades de ser obeso y 8,46 % de morir por fumar?

Datos de http://www.worldometers.info/es/.

# Deficiencias de la definición estadística de la probabilidad

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{n(A)}{n}$$

- No se pueden realizar infinitos experimentos.
- No puede ser utilizado para un número infinito de resultados posibles.
- Asume eventos equiprobables.

**Axioma**

Proposición o enunciado tan evidente que no requiere demostración.

**Primer axioma** La “medida” asignada a un evento que denota su probabilidad es no negativa.

$$P(A) \geq 0 \tag{3}$$

**Segundo axioma** La probabilidad de ocurrencia de un resultado que pertenece al conjunto universal es segura.

$$P(S) = 1 \tag{4}$$

**Tercer axioma** La probabilidad de la suma de eventos mutuamente excluyentes es igual a suma de la probabilidad de los eventos individuales

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n) \tag{5}$$

En el caso especial para dos eventos, $A \cap B = \varnothing$,

$$P\left(A \cup B\right) = P(A) + P(B)$$

Un posible mnemónico es *PUSuP* (***P****robabilidad de la* ***U****nión es la* ***S****u**ma de las* ***P****robabilidades*)

$$\textit{primer axioma} \longrightarrow 0 \leq P(\cdot) \leq 1 \longleftarrow \textit{segundo axioma}$$

- La medida de la probabilidad es mayor a cero
- La medida de la probabilidad es menor a uno

$$\boxed{P(A) = 0{,}42} \qquad \cancel{P(A) = -0{,}42} \qquad \cancel{P(A) = 1{,}42}$$

El tercer axioma es la unión de operaciones de álgebra de conjuntos y operaciones aritméticas:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} P(A_n)$$

- Los **eventos** tienen operaciones de **álgebra de conjuntos** pero no aritméticas (suma, resta, multiplicación, división).
- Las **probabilidades** son números $(0 < P(\cdot) < 1)$ con **operaciones aritméticas**, pero no operaciones de unión, intersección, complemento.

$$\cancel{\overline{P(A)}} \qquad \boxed{P(A) + P(B)} \qquad \cancel{P(A + B)}$$

$$\boxed{P(\overline{A})} \qquad \cancel{P(A) \cup P(B)} \qquad \boxed{P(A \cup B)}$$

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

$$P(\varnothing) = 0$$

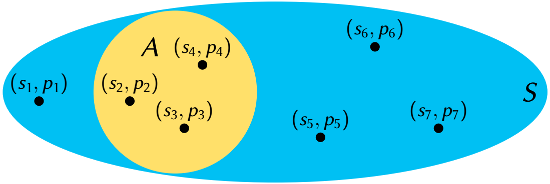
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Un experimento dentro del contexto de nuestro estudio, se definirá con

1. asignación de un espacio de muestras $S = \{s_1, \ldots, s_n, \ldots, s_N\}$ con $N$ el número total de resultados elementales posibles
2. definición de cierto evento de interés $A = \{a_1, \ldots, a_m, \ldots, a_M\}$ con $M \leq N$ resultados mutuamente excluyentes, y
3. asignación de probabilidad $P = \{p_1, \ldots, p_n, \ldots, p_N\}$ a los resultados elementales tal que satisfagan los axiomas
   - $P(a_m) \geq 0$
   - $P(S) = 1$
   - $P(A) = P\left(\bigcup_{m=1}^{M} a_m\right) = \sum_{m=1}^{M} P(a_m)$

Esto define un "espacio de probabilidad" representado como

$$(S, P)$$




y permite un cálculo de probabilidad tal como

$$P(A) = p_2 + p_3 + p_4$$

Justo después de nacer, los niños son evaluados en una escala llamada la *escala de Apgar*. Los posibles valores son $0, 1, \ldots, 10$, que está determinado por color, tonificación muscular, esfuerzo respiratorio, ritmo cardíaco y reflejos (el mejor valor posible es 10). Luego de análisis estadísticos, se determina que su “espacio de probabilidad” es

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(x)$ | 0,002 | 0,001 | 0,002 | 0,005 | 0,02 | 0,04 | 0,18 | 0,37 | 0,25 | 0,12 | 0,01 |

¿Cuál es la probabilidad del evento $A = \{x \geq 7\}$?

$$\begin{aligned} P(A) = P(x \geq 7) &= P(7) + P(8) + P(9) + P(10) \\ &= 0{,}37 + 0{,}25 + 0{,}12 + 0{,}01 = \boxed{0{,}75} \end{aligned}$$

- **Probability Part 1: Rules and Patterns**
  *CrashCourse*, https://youtu.be/OyddY7DlV58
- **Overpopulation – The Human Explosion Explained**
  *Kurzgesagt – In a Nutshell*, https://youtu.be/QsBT5EQt348
- **The Man Who Invented Modern Probability**:
  Chance encounters in the life of Andrei Kolmogorov
  *Slava Gerovitch*,
  https://getpocket.com/explore/item/the-man-who-invented-modern-probability