Momentos de las variables aleatorias múltiples

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

10

Tema III

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

Es posible determinar momentos asociados con dos o más variables aleatorias. La información que proveen, al igual que con las variables aleatorias individuales, son útiles como descriptores generales.

Las dos métricas más importantes para momentos conjuntos son la **correlación** y la **covarianza**, que cuantifican el grado de interrelación lineal entre una variable aleatoria y otra.

Valor esperado de una función de variables aleatorias

Valor esperado de una función de variables aleatorias

Si $g(X, Y)$ es alguna función de dos variables aleatorias X y Y, el valor esperado de $g(X, Y)$ está dado por:

$$\overline{g} = E[g(X, Y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(x, y) f_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{1}$$

Observación

Aunque $g(X, Y)$ define una nueva variable aleatoria, no es necesario conocer la densidad probabilística de esta para calcular su valor esperado. En cambio, es una suma ponderada de la densidad conjunta de X y Y.

El PDF conjunto de la cantidad X de almendras y la cantidad Y de semillas de marañón (y la cantidad Z de maní) en un tarro de 1 kg es

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 24xy & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x + y \leq 1 \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

Si 1 kg de almendras le cuesta a la compañía ¢6000, un kilogramo de semillas de marañón son ¢10.000 y 1 kg de maní cuesta ¢3.500. ¿Cuál es el costo esperado total del contenido del tarro?

Sea la función del costo

$$h(X, Y) = 6000X + 10000Y + 3500(1 - X - Y)$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E[h(X, Y)] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} h(x, y)f_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\ &= \int_{0}^{1}\int_{0}^{1-x} [6000x + 10000y + 3500(1 - x - y)]24xy\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x \\ &= 7100 \end{aligned}$$

que representa los costos esperados del contenido de la caja.

Momentos conjuntos alrededor del origen

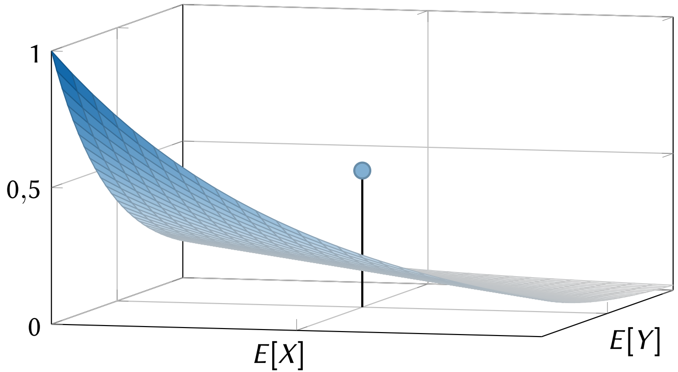
Los momentos conjuntos para dos variables aleatorias X y Y se denotan por m_{nk} y se definen por:

$$
\begin{aligned}
m_{nk} &= E\left[X^n Y^k\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^n y^k \, f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y
\end{aligned} \tag{2}
$$

Casos especiales

- $m_{n0} = E[X^n]$ son los momentos m_n de X
- $m_{0k} = E[Y^k]$ son los momentos de Y
- $n + k$ es el orden de los momentos. Ejemplo: m_{02}, m_{20}, m_{11} son los momentos de segundo orden de X y Y
- $m_{01} = E[Y] = \overline{Y}$ y $m_{10} = E[X] = \overline{X}$ son los valores esperados de Y y X, y son las coordenadas del centro de gravedad de la función $f_{X,Y}(x, y)$.

Ejemplo de la ubicación del “centro de gravedad” I



Correlación, independencia y ortogonalidad

El momento de segundo orden $m_{11} = E[XY]$ es denominado la **correlación** de X y Y. Recibe el símbolo especial R_{XY} por su importancia.

$$\begin{aligned} R_{XY} = m_{11} &= E[XY] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{aligned} \tag{3}$$

Interpretaciones posibles

- "La correlación es el grado en el cual dos o más cantidades están linealmente asociadas".
- Pero (fundamental) "**correlación no implica causalidad**".

El PDF conjunto de la cantidad X de almendras y la cantidad Y de semillas de marañón (y la cantidad Z de maní) en un tarro de 1 kg es

$$f_{X,Y}(x,y) = 24xy \qquad 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x+y \leq 1$$

¿Cuál es la correlación entre X y Y?

Ejemplo de correlación del tarro de nueces II

$$
\begin{aligned}
R_{XY} = m_{11} = E[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xy\, f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1\int_0^{1-y} xy\, 24xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 24\int_0^1 y^2\int_0^{1-y} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{24}{3}\int_0^1 y^2(1-y)^3\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{24}{3}\left[-\frac{y^6}{6} + 3\frac{y^5}{5} - 3\frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{15} \approx 0{,}13
\end{aligned}
$$

No correlación

Si la correlación puede escribirse en la forma:

$$R_{XY} = E[X]E[Y]$$

entonces X y Y se dice que **no** están correlacionadas.

Independencia y correlación

La independencia estadística de X y Y es suficiente para garantizar que **no** están correlacionadas.

El recíproco de esta última frase, que X y Y son independientes si X y Y no están correlacionadas, no es necesariamente cierto en general, con la sola excepción de las variables aleatorias gaussianas no correlacionadas, que son también independientes.

Ortogonalidad

Si $R_{XY} = 0$ para dos variables aleatorias X y Y, estas se denominan ortogonales.

En síntesis

- Si $R_{XY} = E[XY] = E[X]E[Y]$, no están correlacionadas.
- La independencia ($f_{XY}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$) garantiza que no están correlacionadas, pero no a la inversa.
- Si $R_{XY} = 0$, son ortogonales.

Sea X una variable aleatoria que tiene un valor medio $\overline{X} = E[X] = 3$ y varianza $\sigma_X^2 = 2$ y sea $Y = -6X + 22$. Determinar correlación y ortogonalidad entre X y Y.

El segundo momento de X alrededor del origen se calcula de:

$$\begin{aligned} \sigma_X^2 &= E[X^2] - (E[X])^2 \\ E[X^2] &= \sigma_X^2 + (E[X])^2 \\ &= 11 \end{aligned}$$

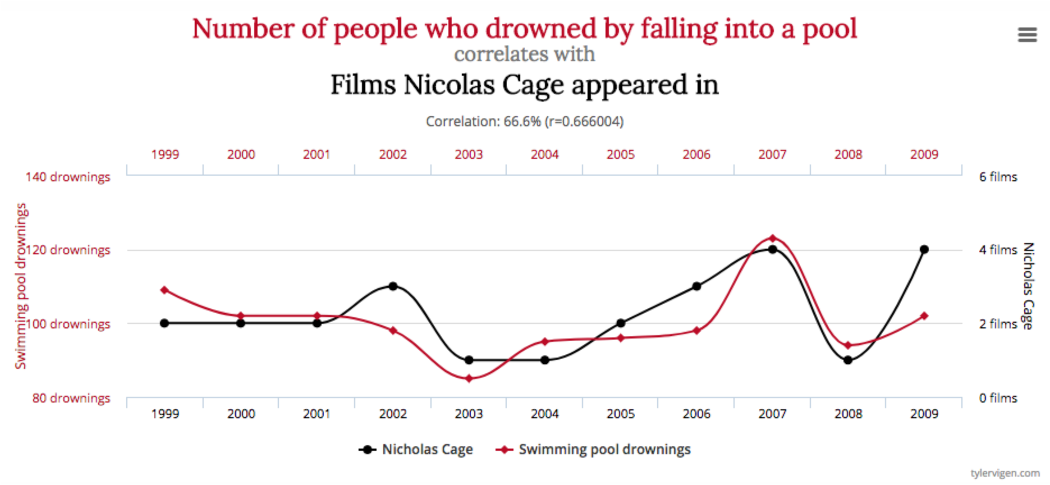
Con $Y = -6X + 22$:

$$\begin{aligned} E[Y] &= -6E[X] + 22 \\ &= -6(3) + 22 \\ &= 4 \end{aligned}$$

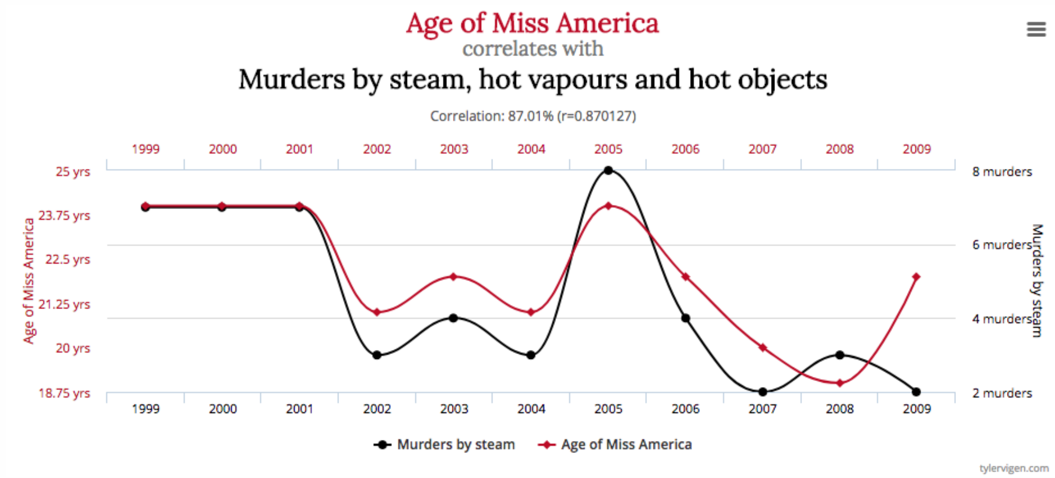
$$
\begin{aligned}
R_{XY} &= E[XY] \\
&= E[X(-6X + 22)] \\
&= E[-6X^2 + 22X] \\
&= -6E[X^2] + 22E[X] \\
&= -6(11) + 22(3) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

de donde X y Y son ortogonales. Por otro lado, $R_{XY} \neq E[X]E[Y] = 12$.

> Dos variables aleatorias pueden ser ortogonales aun cuando una de ellas, Y, está relacionada con la otra, X, por una función lineal $Y = aX + b$.


Number of people who drowned by falling into a pool
correlates with
Films Nicolas Cage appeared in
Correlation: 66.6% (r=0.666004)
1999 2000 2001 2002 2003 2004 2005 2006 2007 2008 2009
140 drownings
120 drownings
100 drownings
80 drownings
Swimming pool drownings
6 films
4 films
2 films
0 films
Nicholas Cage
Nicholas Cage
Swimming pool drownings
tylervigen.com

Ejemplos de correlación confusa II



Momentos centrales conjuntos

Momentos centrales conjuntos

Para dos variables aleatorias X y Y, estos momentos están dados por:

$$\begin{aligned}\mu_{nk} &= E\left[(X-\overline{X})^n(Y-\overline{Y})^k\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-\overline{X})^n(y-\overline{Y})^k f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{4}$$

Los momentos centrales de segundo orden

$$\mu_{20} = E[(X-\overline{X})^2] = \sigma_X^2$$

$$\mu_{02} = E[(Y-\overline{Y})^2] = \sigma_Y^2$$

son las varianzas de X y Y, respectivamente.

La covarianza de dos variables aleatorias

El momento conjunto de segundo orden μ_{11} es la covarianza de X y Y, y se le da el símbolo C_{XY}. Satisface que,

$$
\begin{aligned}
C_{XY} &= E[(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x - \overline{X})(y - \overline{Y}) f_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= E[XY - X\overline{Y} - \overline{X}Y + \overline{X}\cdot\overline{Y}] \\
&= E[XY] - E[X]E[Y] \\
C_{XY} &= R_{XY} - E[X]E[Y]
\end{aligned}
$$

- Si X, Y son independientes o no están correlacionadas, entonces $C_{XY} = 0$, como puede corroborarse.
- Si X, Y son ortogonales, $C_{XY} = -E[X]E[Y]$. En este último caso, si X o Y (o ambas) tienen valor medio cero, entonces $C_{XY} = 0$.

El momento conjunto de segundo orden normalizado

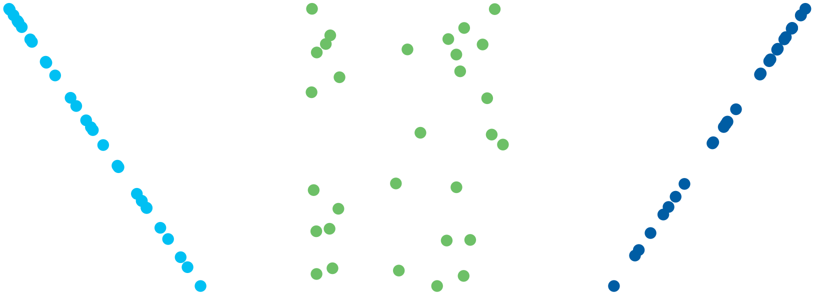
$$\rho = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} = \frac{C_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} \tag{5}$$

dado por

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{E[(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})]}{\sigma_X \sigma_Y} \\ &= E\left[\frac{(X - \overline{X})}{\sigma_X}\frac{(Y - \overline{Y})}{\sigma_Y}\right] \end{aligned} \tag{6}$$

se conoce como el **coeficiente de correlación** de X y Y, con $-1 \leq \rho \leq 1$.

Visualización de casos especiales del coeficiente de correlación de Pearson



(a) $\rho = -1$ (b) $\rho \approx 0$ (c) $\rho = 1$

Funciones características conjuntas

La función característica conjunta de dos variables aleatorias X y Y está definida por:

$$\Phi_{X,Y}(\omega_1, \omega_2) = E\left[e^{j\omega_1 X + j\omega_2 Y}\right] \tag{7}$$

donde ω_1, ω_2 son números reales. Una forma equivalente es:

$$\Phi_{X,Y}(\omega_1, \omega_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) e^{j\omega_1 x + j\omega_2 y}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{8}$$

Lo anterior es la transformada bidimensional de Fourier (con signos cambiados para ω_1, ω_2) de la función de densidad conjunta. De la transformada inversa de Fourier se tiene:

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{X,Y}(\omega_1, \omega_2) e^{-j\omega_1 x - j\omega_2 y}\, \mathrm{d}\omega_1\, \mathrm{d}\omega_2 \tag{9}$$

Con poner $\omega_2 = 0$ u $\omega_1 = 0$, se obtiene las funciones características de X o Y, de $\Phi_{X,Y}(\omega_1, \omega_2)$. Estas se llaman funciones características marginales:

$$\Phi_X(\omega_1) = \Phi_{X,Y}(\omega_1, 0) \tag{10}$$

$$\Phi_Y(\omega_2) = \Phi_{X,Y}(0, \omega_2) \tag{11}$$

Los momentos conjuntos m_{nk} pueden hallarse de la función característica conjunta como sigue:

$$m_{nk} = (-j)^{n+k} \frac{\partial^{n+k} \Phi_{X,Y}(\omega_1, \omega_2)}{\partial \omega_1^n \partial \omega_2^k} \bigg|_{\omega_1=0, \omega_2=0} \tag{12}$$