Ergodicidad y funciones de correlación

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

14

Tema IV

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

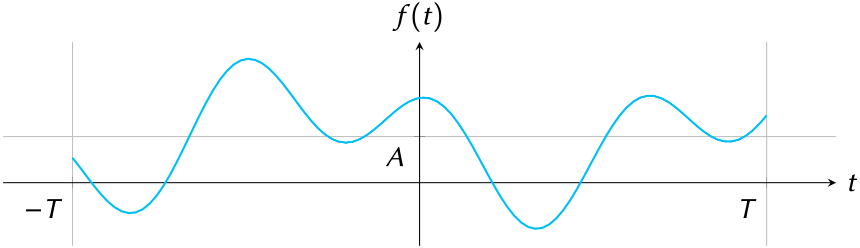
La ergodicidad establece la igualdad entre el promedio estadístico y el promedio temporal de un proceso aleatorio.
Es una nueva forma de estacionaridad que simplifica el análisis del proceso aleatorio.

Promedios en el tiempo y ergodicidad

El promedio temporal de una función está definido con el nuevo operador

$$A[\,\diamond\,] = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \diamond \, \mathrm{d}t \tag{1}$$

donde A se utiliza para denotar **promedio temporal** de una manera análoga al operador E para el **promedio estadístico**. $\diamond$ es una función del tiempo cualquiera.



El valor $\overline{x} = A[x(t)]$ representa el promedio temporal de una función muestra. La función de autocorrelación temporal es denotada por $\mathscr{R}_{XX}(\tau) = A[x(t)x(t+\tau)]$. Estas funciones están definidas por

$$\begin{aligned} \overline{x} &= A[x(t)] \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)\, \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} \mathscr{R}_{XX}(\tau) &= A[x(t)x(t+\tau)] \\ &= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)x(t+\tau)\, \mathrm{d}t \end{aligned} \tag{3}$$

Para cualesquiera función muestra $x(t)$ del proceso $X(t)$, estas dos últimas integrales simplemente producen dos números (para un valor fijo de τ).

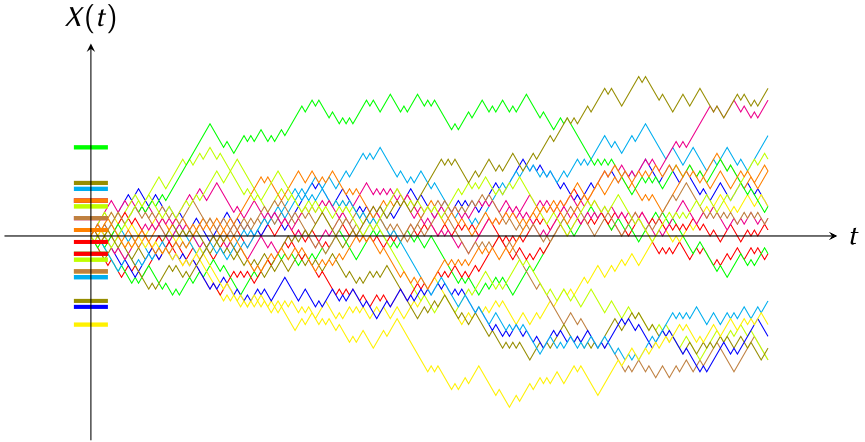


Figura: Ejemplo de un proceso aleatorio llamado “caminata aleatoria” (*random walk*).

Cuando se consideran todas las funciones muestra, $\overline{x}$ y $\mathscr{R}_{XX}(\tau)$ son realmente variables aleatorias. Tomando el valor esperado a ambos lados de las definiciones, suponiendo que la operación matemática de la esperanza puede llevarse al interior de la integral y suponiendo que $X(t)$ es un **proceso estacionario**,

$$E[\overline{x}] = \overline{X} \qquad\qquad E[\mathscr{R}_{XX}(\tau)] = R_{XX}(\tau)$$

Procesos ergódicos

Si se supone que $\overline{x}$ y $\mathscr{R}_{XX}(\tau)$ tienen varianzas nulas, es decir, que son constantes, se escribe entonces,

$$E[\overline{x}] = \overline{x} = \overline{X}$$
$$E[\mathscr{R}_{XX}(\tau)] = \mathscr{R}_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau)$$

Los promedios temporales $\overline{x}$ y $\mathscr{R}_{XX}(\tau)$ igualan a los promedios estadísticos.
Los procesos para los que los promedios temporales igualan a los estadísticos se denominan ergódicos.

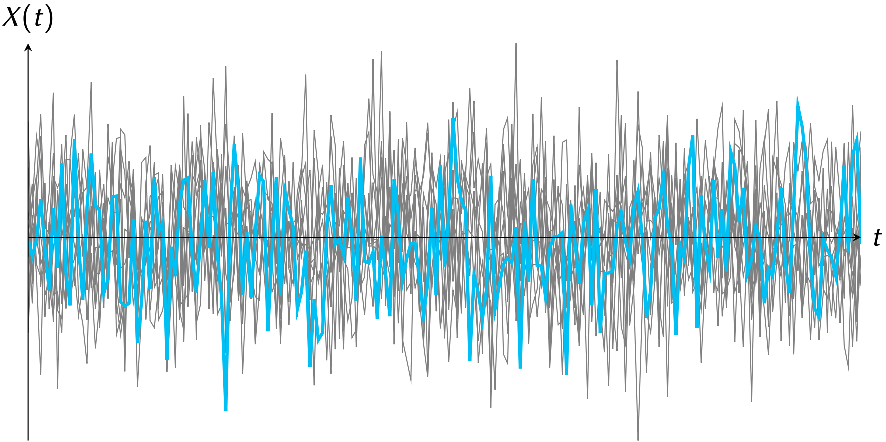


Figura: Ejemplo de un proceso aleatorio llamado “ruido blanco” (*white noise*).

Ergodicidad es una forma muy restrictiva de estacionaridad y puede ser difícil probar que constituye una suposición razonable para cualquier situación física. Sin embargo, se asumirá que un proceso es ergódico a veces para *simplificar problemas*.

Ergodicidad conjunta

Dos procesos aleatorios son llamados conjuntamente ergódicos si son individualmente ergódicos y también tienen una función de correlación cruzada temporal que iguala la función de correlación cruzada estadística:

$$\mathscr{R}_{XY}(\tau) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} x(t)y(t+\tau)\,\mathrm{d}t = R_{XY}(\tau) \tag{4}$$

Funciones de correlación y covarianza

Las funciones de correlación y covarianza cuantifican el grado de relación lineal entre un mismo proceso aleatorio en distintos de tiempo (*auto*) y entre dos procesos distintos (*cruzada*).
Sus propiedades tienen interpretaciones importantes en el procesamiento de señales.

Autocorrelación

La autocorrelación de un proceso aleatorio $X(t)$ es la correlación $E[X_1 X_2]$ de dos variables aleatorias $X_1 = X(t_1)$ y $X_2 = X(t_2)$ definidas por el proceso en tiempos t_1 y t_2.

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \tag{5}$$

Con $t_1 = t$ y $t_2 = t_1 + \tau$

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] \tag{6}$$

Si $X(t)$ es estacionario en sentido amplio, $R_{XX}(t, t+\tau)$ es función únicamente de la diferencia $\tau = t_2 - t_1$,

$$R_{XX}(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] \tag{7}$$

1. El valor máximo de $R_{XX}(\tau)$ está en $\tau = 0$, por tanto está acotado en el origen.

$$|R_{XX}(\tau)| \leq R_{XX}(0) \tag{8}$$

2. La autocorrelación tiene simetría par.

$$R_{XX}(-\tau) = R_{XX}(\tau) \tag{9}$$

3. El valor máximo es igual a la media del cuadrado (o *valor cuadrático medio*), llamado también la **potencia del proceso**.

$$R_{XX}(0) = E[X^2(t)] \tag{10}$$

4. Si $X(t)$ es ergódico sin componentes periódicos, y además $E[X(t)] = \overline{X} \neq 0$, entonces

$$\lim_{|\tau|\to\infty} R_{XX}(\tau) = \overline{X}^2 \tag{11}$$

- Si $X(t)$ es ergódico sin componentes periódicos, con media cero, entonces

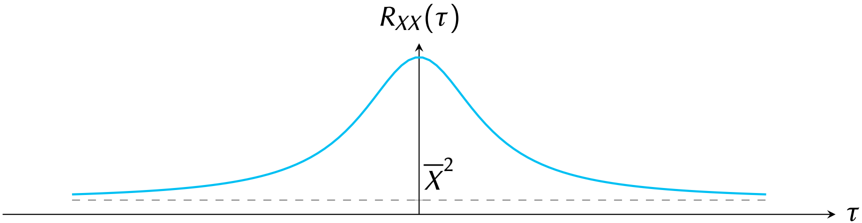
$$\lim_{|\tau|\to\infty} R_{XX}(\tau) = 0$$

5. Si $X(t)$ tiene un componente periódico, entonces $R_{XX}(\tau)$ tendrá un componente periódico con el mismo periodo.

Para un proceso estacionario **WSS** y ergódico **ERG**, sin componentes periódicos, en

$$R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1 + 6\tau^2}$$

encontrar el valor medio y la varianza del proceso.



Ejemplo de aplicación de las propiedades de autocorrelación II

$$R_{XX}(\tau) = 25 + \frac{4}{1+6\tau^2}$$

La propiedad 4 establece que $\lim_{|\tau|\to\infty} R_{XX}(\tau) = \overline{X}^2$ y entonces

$$E[X(t)] = \overline{X} = \sqrt{25} = \pm 5$$

Nótese que tal propiedad solamente da la magnitud de $\overline{X}$ y no su signo.
Con la definición de varianza y la propiedad 3 dada por $R_{XX}(0) = E[X^2(t)]$ entonces

$$\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= E[X^2(t)] - (E[X(t)])^2 \\
&= R_{XX}(0) - \overline{X}^2 \\
&= 29 - 25 = 4
\end{aligned}$$

Correlación cruzada

La función de correlación cruzada está definida por

$$R_{XY}(t, t+\tau) = E\left[X(t)Y(t+\tau)\right] \tag{12}$$

1. Si $X(t)$ y $Y(t)$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio, $R_{XY}(t, t+\tau)$ será independiente del tiempo absoluto:

$$R_{XY}(\tau) = E\left[X(t)Y(t+\tau)\right] \tag{13}$$

2. Si $R_{XY}(t, t+\tau) = 0$, entonces $X(t)$ y $Y(t)$ son procesos ortogonales.
3. Si los dos procesos son estadísticamente independientes, la función de correlación cruzada se convierte en:

$$R_{XY}(t, t+\tau) = E[X(t)]E[Y(t+\tau)] \tag{14}$$

4. Si además de ser independientes, $X(t)$ y $Y(t)$ son *al menos* estacionarios en sentido amplio,

$$R_{XY}(\tau) = \overline{X} \cdot \overline{Y} \tag{15}$$

que es una constante.

5. Si los procesos son *al menos* estacionarios en sentido amplio, entonces:
   - $R_{XY}(-\tau) = R_{YX}(\tau)$
   - $|R_{XY}(\tau)| \leq \sqrt{R_{XX}(0)R_{YY}(0)}$ (media geométrica)
   - $|R_{XY}(\tau)| \leq \frac{1}{2}\left[R_{XX}(0) + R_{YY}(0)\right]$ (media aritmética)

Funciones de covarianza

Autocovarianza

La función de **autocovarianza** (momento conjunto central de orden dos) de un proceso estocástico está definida por:

$$C_{XX}(t,t+\tau) = E\left[\{X(t)-E[X(t)]\}\{X(t+\tau) - E[X(t+\tau)\}\right] \tag{16}$$

equivalente a

$$C_{XX}(t,t+\tau) = R_{XX}(t,t+\tau) - E[X(t)]E[X(t+\tau)] \tag{17}$$

Covarianza cruzada

La función de **covarianza cruzada** para dos procesos $X(t)$ y $Y(t)$ está definida por:

$$\begin{aligned} C_{XY}(t, t+\tau) = E\big[&\{X(t) - E[X(t)]\} \\ &\{Y(t+\tau) - E[Y(t+\tau)]\}\big] \end{aligned} \tag{18}$$

o, alternativamente,

$$C_{XY}(t, t+\tau) = R_{XY}(t, t+\tau) - E[X(t)]E[Y(t+\tau)] \tag{19}$$

Para procesos que son a lo menos conjuntamente estacionarios en sentido amplio (WSS), las covarianzas son

$$C_{XX}(\tau) = R_{XX}(\tau) - \overline{X}^2 \quad (20)$$

$$C_{XY}(\tau) = R_{XY}(\tau) - \overline{X} \cdot \overline{Y} \quad (21)$$

- La **varianza** de un proceso aleatorio está dada por la autocovarianza con $\tau = 0$.
- Para un proceso estacionario en sentido amplio, la varianza no depende del tiempo y está dada por la ecuación (20) con $\tau = 0$

$$\sigma_X^2 = E[\{X(t) - E[X(t)]\}^2] = R_{XX}(0) - \overline{X}^2 \quad (22)$$

- Para dos procesos aleatorios, si

$$C_{XY}(t, t+\tau) = 0 \tag{23}$$

entonces están no-correlacionados. Esto significa que

$$R_{XY}(t, t+\tau) = E[X(t)] \cdot E[Y(t+\tau)] \tag{24}$$

- Se concluye de la última igualdad, que **procesos independientes son no-correlacionados**. *El recíproco no es cierto* (aunque sí lo es para procesos conjuntamente gaussianos).