# Respuesta de sistemas lineales a una señal aleatoria

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

**16**

Tema IV

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

En la interacción de señales y sistemas donde hay entradas aleatorias, es posible determinar cantidades útiles para el análisis, como la señal misma o la potencia de salida, conociendo las características determinísticas del sistema y características estadísticas de la entrada.

# Respuesta del sistema

# Respuesta del sistema: convolución I

Con $x(t)$ una señal aleatoria, la respuesta de cualquier red eléctrica, denotada por $y(t)$, está dada por la integral de convolución

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\xi)h(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)x(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= x(t) * h(t)
\end{aligned}
\tag{1}
$$

donde $h(t)$ es la respuesta al impulso de la red. Se está suponiendo un sistema lineal e invariante con el tiempo (LIT).

$$
x(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)
$$

La ecuación (1) es una operación sobre un miembro $x(t)$ del agregado del proceso estocástico $X(t)$ que produce un miembro del agregado de un nuevo proceso $Y(t)$. En general, para todo el proceso estocástico,

$$
\begin{aligned}
Y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)X(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= X(t) * H(T)
\end{aligned}
\tag{2}
$$

# Valor medio y cuadrático medio de la respuesta del sistema

Si $X(t)$ es estacionario en sentido amplio (WSS), entonces

$$\begin{aligned} E[Y(t)] = E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)X(t-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)E[X(t-\xi)]\,\mathrm{d}\xi \\ = \overline{X}\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \overline{Y} \quad \text{(constante)} \end{aligned} \tag{3}$$

Entonces el valor medio de $Y(t)$ iguala al valor medio de $X(t)$ multiplicado por el área bajo la curva de la respuesta al impulso.

Las operaciones de integración y de esperanza matemática son intercambiables, de modo que, para

$$\int_{t_1}^{t_2} E[|W(t)|]|h(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$$

donde $t_1$, $t_2$ son constantes reales que pueden ser infinitas, aplica que

$$E\left[\int_{t_1}^{t_2} W(t)h(t)\, \mathrm{d}t\right] = \int_{t_1}^{t_2} E[W(t)]h(t)\, \mathrm{d}t$$

donde $W(t)$ es alguna función acotada de un proceso aleatorio (sobre el intervalo $[t_1, t_2]$) y $h(t)$ es una función del tiempo, no aleatoria.

Para el valor cuadrático medio de $Y(t)$, se calcula

$$\begin{aligned} E[Y^2(t)] &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1)X(t-\xi_1)\,\mathrm{d}\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_2)X(t-\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[X(t-\xi_1)X(t-\xi_2)]h(\xi_1)h(\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 \end{aligned} \tag{4}$$

Si se supone que la entrada es estacionaria en sentido amplio:

$$E[X(t-\xi_1)X(t-\xi_2)] = R_{XX}(\xi_1-\xi_2)$$

con lo que la ecuación 4 se vuelve independiente de $t$:

$$\begin{aligned} \overline{Y^2} &= E[Y^2(t)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\xi_1-\xi_2)h(\xi_1)h(\xi_2)\,\mathrm{d}\xi_1\,\mathrm{d}\xi_2 \end{aligned} \tag{5}$$

Se encontrará $\overline{Y^2}$ para un sistema con ruido blanco gaussiano en su entrada. Aquí:

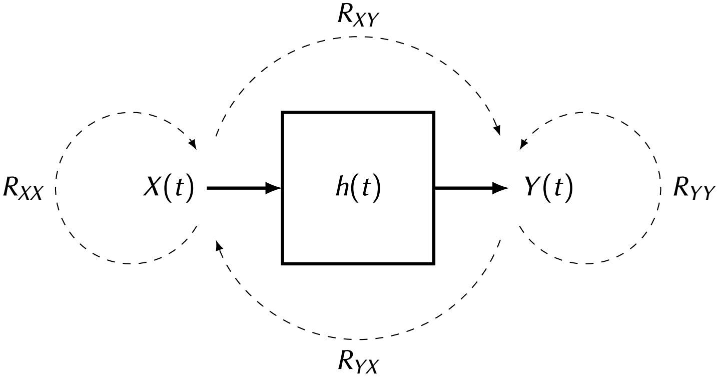
$$R_{XX}(\xi_1 - \xi_2) = (\mathcal{N}_0/2)\delta(\xi_1 - \xi_2)$$

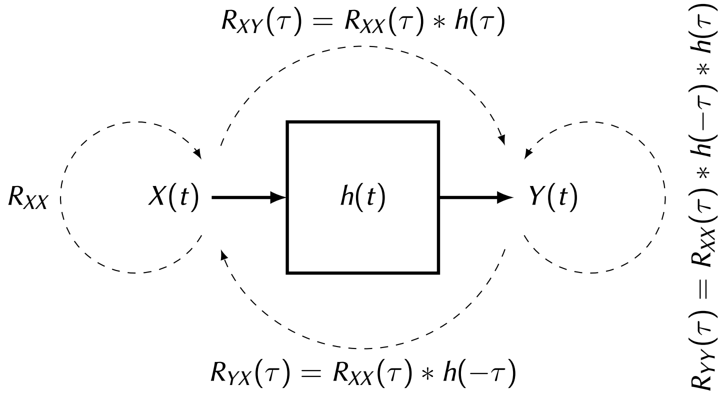
donde $\mathcal{N}_0$ es una constante real positiva. Luego,

$$\begin{aligned}\overline{Y^2} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(\mathcal{N}_0/2)\delta(\xi_1 - \xi_2)h(\xi_1)d\xi_1 h(\xi_2)d\xi_2 \\ &= (\mathcal{N}_0/2)\int_{-\infty}^{\infty} h^2(\xi_2)d\xi_2\end{aligned}$$

La potencia de salida se vuelve proporcional al área bajo el cuadrado de la curva de $h(t)$, en este ejemplo.

# Autocorrelaciones de entrada y salida y correlaciones cruzadas


$R_{XY}$
$R_{XX}$
$X(t)$
$h(t)$
$Y(t)$
$R_{YY}$
$R_{YX}$


$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau)$
$R_{XX}$
$X(t)$
$h(t)$
$Y(t)$
$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$
$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)$

Sea $X(t)$ estacionario en sentido amplio. La autocorrelación de la respuesta del sistema $Y(t)$ es:

$$\begin{aligned} R_{YY}(t, t+\tau) &= E[Y(t)Y(t+\tau)] \\ &= E\left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1)X(t-\xi_1)\, \mathrm{d}\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_2)X(t+\tau-\xi_2)\, \mathrm{d}\xi_2\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} E[X(t-\xi_1)X(t+\tau-\xi_2)]h(\xi_1)h(\xi_2)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 \end{aligned}$$

que se reduce a:

$$R_{YY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau+\xi_1-\xi_2)h(\xi_1)h(\xi_2)\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 \tag{6}$$

pues $X(t)$ se supone que es estacionario en sentido amplio.

Se puede concluir que:

1. $Y(t)$ es estacionario en sentido amplio si $X(t)$ es estacionario en sentido amplio porque $R_{YY}(\tau)$ no depende de $t$ y $E[Y(t)]$ es constante.
2. $R_{YY}(\tau)$ es la doble convolución de la autocorrelación de entrada con la respuesta al impulso del sistema; es decir:

$$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau) * h(\tau) \tag{7}$$

La correlación cruzada de $X(t)$ e $Y(t)$ es

$$\begin{aligned} R_{XY}(t, t+\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\ &= E\left[X(t)\int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)X(t+\tau-\xi)\,\mathrm{d}\xi\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} E[X(t)X(t+\tau-\xi)]h(\xi)\,\mathrm{d}\xi \end{aligned}$$

Si $X(t)$ es estacionario en sentido amplio,

$$R_{XY}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau-\xi)h(\xi)\,\mathrm{d}\xi \tag{8}$$

que es la convolución de $R_{XX}(\tau)$ con $h(\tau)$:

$$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau) \tag{9}$$

Un desarrollo similar muestra que:

$$
\begin{aligned}
R_{YX}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau - \xi)h(-\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
R_{YX}(\tau) &= R_{XX}(\tau) * h(-\tau)
\end{aligned}
\tag{10}
$$

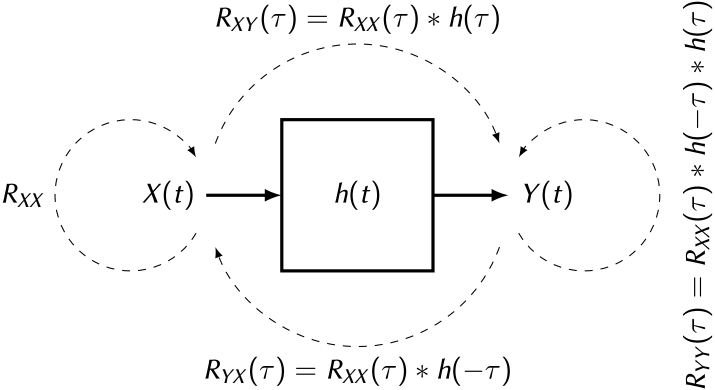
Es claro que la correlación cruzada depende de $\tau$ y no del tiempo absoluto $t$. Como consecuencia de este hecho, $X(t)$ y $Y(t)$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio si $X(t)$ es estacionario en sentido amplio (esto se concluye puesto que se demostró anteriormente que $Y(t)$ es estacionario en sentido amplio).

La autocorrelación y la correlación cruzada están relacionados entre sí:

$$\begin{aligned} R_{YY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{XY}(\tau + \xi_1)h(\xi_1)\, \mathrm{d}\xi_1 \\ &= R_{XY}(\tau)h(-\tau) \end{aligned} \tag{11}$$

Igualmente,

$$\begin{aligned} R_{YY}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{YX}(\tau - \xi_2)h(\xi_2)\, \mathrm{d}\xi_2 \\ &= R_{YX}(\tau) * h(\tau) \end{aligned} \tag{12}$$



$R_{XY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(\tau)$
$R_{XX}$
$X(t)$
$h(t)$
$Y(t)$
$R_{YX}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau)$
$R_{YY}(\tau) = R_{XX}(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)$

# Características espectrales de la respuesta del sistema

- La transformada de Fourier de una función de correlación (autocorrelación o correlación cruzada) es un espectro de potencia para procesos estacionarios en sentido amplio
- Si $R_{XX}(\tau)$ es conocida para el proceso de entrada, se puede hallar $R_{YY}(\tau)$, $R_{XY}(\tau)$ y $R_{YX}(\tau)$ como se ha descrito anteriormente, para luego obtener espectros de potencia por transformación.
- Desde un punto de vista práctico las integrales involucradas pueden ser difíciles de evaluar.
- El espectro de potencia deseado involucrando la respuesta del sistema se relaciona con el espectro de potencia de entrada.

Asumiendo estacionaridad en sentido amplio conjunta, escríbase $\mathcal{S}_{YY}(\omega)$ como la transformada de Fourier de la autocorrelación de salida

$$\mathcal{S}_{YY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{YY}(\tau) e^{-j\omega\tau} \, \mathrm{d}\tau \tag{13}$$

Si se sustituye ahora la integral para $R_{YY}(\tau)$,

$$\mathcal{S}_{YY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_2) \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau + \xi_1 - \xi_2) e^{-j\omega\tau} \, \mathrm{d}\tau \, \mathrm{d}\xi_2 \, \mathrm{d}\xi_1$$

Se hace ahora el cambio de variable $\xi = \tau + \xi_1 - \xi_2, \ \mathrm{d}\xi = \ \mathrm{d}\tau$, se tiene:

$$\mathcal{S}_{YY}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_1)e^{j\omega\xi_1}\,\mathrm{d}\xi_1 \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi_2)e^{-j\omega\xi_2}\,\mathrm{d}\xi_2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\xi)e^{-j\omega\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

Las anteriores tres integrales se reconocen como $H^*(\omega)$, $H(\omega)$ y $\mathcal{S}_{XX}(\omega)$, respectivamente.

$$\mathcal{S}_{YY}(\omega) = H^*(\omega)H(\omega)\mathcal{S}_{XX}(\omega) = \mathcal{S}_{XX}(\omega)|H(\omega)|^2 \tag{14}$$

$|H(\omega)|^2$ se llama la *función de transferencia de potencia del sistema.*

# Espectro de densidad de potencia de la respuesta III

$$\mathcal{S}_{XX}(\omega) \longrightarrow \boxed{H(\omega)} \longrightarrow \mathcal{S}_{YY}(\omega) = \mathcal{S}_{XX}(\omega)|H(\omega)|^2$$

La potencia promedio, denotada por $P_{YY}$, en la respuesta del sistema se encuentra calculando:

$$P_{YY} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{S}_{XX}(\omega) |H(\omega)|^2 \, \mathrm{d}\omega \tag{15}$$

# Espectros de densidad de potencia cruzada de entrada y salida

Puede demostrarse que las transformadas de Fourier de las correlaciones cruzadas pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{XY}(\omega) &= \mathcal{S}_{XX}(\omega)H(\omega) \\ \mathcal{S}_{YX}(\omega) &= \mathcal{S}_{XX}(\omega)H(-\omega) \end{aligned} \tag{16}$$