Proceso contador de Poisson

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

17

Tema V

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

Un proceso aleatorio de Poisson describe el número de veces que algún evento ha ocurrido, como una función del tiempo o el espacio, y en donde los eventos ocurren en instantes o lugares al azar.

Proceso aleatorio de Poisson

Ejemplos de situaciones que pueden describirse con este modelo:

- La llegada de un cliente a la caja de supermercado
- La caída de un rayo dentro de un área prescrita
- La falla de un componente en un sistema
- La emisión de un electrón desde la superficie de un material sensible a la luz (fotodetector)
- El número de solicitudes a un servidor
- El número de plantas en un área boscosa

El proceso se reduce a *contar el número de tales ocurrencias con el tiempo*. Por esta razón, el proceso también se conoce como proceso **contador** de Poisson.

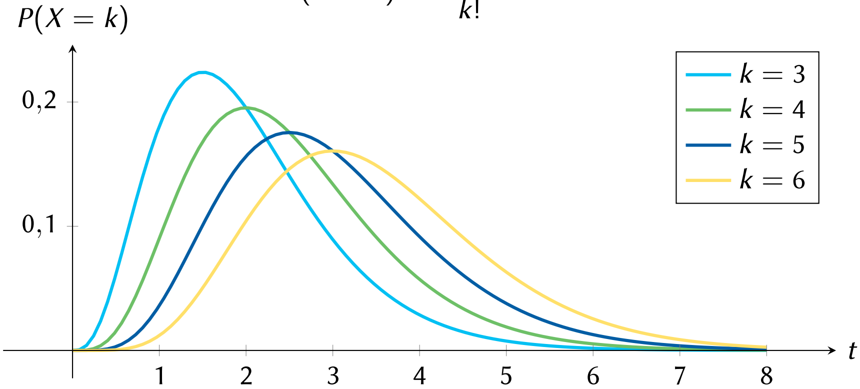
Definición del proceso de Poisson

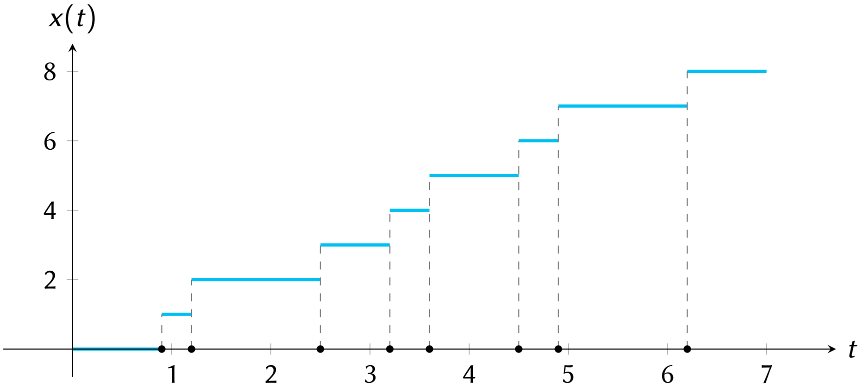
Sea $X(t)$ el número de ocurrencias del evento con el tiempo (el proceso); entonces $X(t)$ consiste en funciones de valores enteros no-decrecientes. La probabilidad de que sucedan exactamente k eventos en el tiempo t es:

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \tag{1}$$

Por conveniencia, se toma $X(t) = 0$ en $t = 0$; para $t > 0$, $X(t)$ es el número de ocurrencias en el intervalo $[0, t]$; para $t < 0$, $X(t)$ es el negativo del número de ocurrencias en el intervalo $[t, 0]$.

$$P(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$





x(t)
8
6
4
2
1
2
3
4
5
6
7
t

- A la vez solamente ocurre un evento (los tiempos de ocurrencia de los eventos pueden, aún así, estar muy cerca unos de otros).
- Los tiempos de ocurrencia son estadísticamente independientes, de modo que el número de ellos que ocurra en cualquier intervalo dado es independiente del número en cualquier otro intervalo.
- El número de eventos crece de forma aproximadamente lineal con el tiempo.

El número de ocurrencias de eventos en cualquier intervalo finito de tiempo está descrito por la distribución de Poisson donde la **tasa** promedio de ocurrencias se denota por λ, conocida también como **intensidad**.

Suponga que en un contador de Geiger llegan pulsos con una tasa promedio de 6 por minuto, de forma que $\lambda = 6$. ¿Cuál es la probabilidad de que en un intervalo de 30 segundos al menos un pulso es recibido?

Notar que el número de pulsos en dado intervalo tiene una distribución de Poisson con parámetro $\lambda t = 6(0{,}5) = 3$. Entonces, con $X = \{$ el número de pulsos recibidos en un intervalo de 30 segundos $\}$,

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - \frac{3^0}{0!}e^{-3} = 95\,\%$$

Funciones de densidad del proceso de Poisson

La probabilidad de exactamente k ocurrencias sobre un intervalo $[0, t]$ es

$$P[X(t) = k] = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

y la densidad de probabilidad del número de ocurrencias es

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \, \delta(x - k) \tag{3}$$

$$f_X(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}\, \delta(x-k)$$

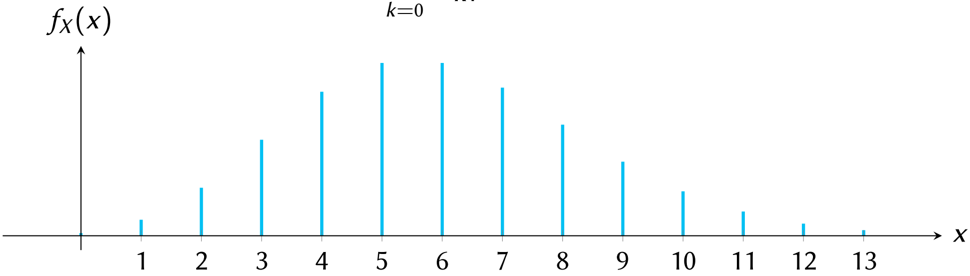


Figura: Función de de densidad de probabilidad de Poisson para cada $x = k \in \mathbb{N}$.

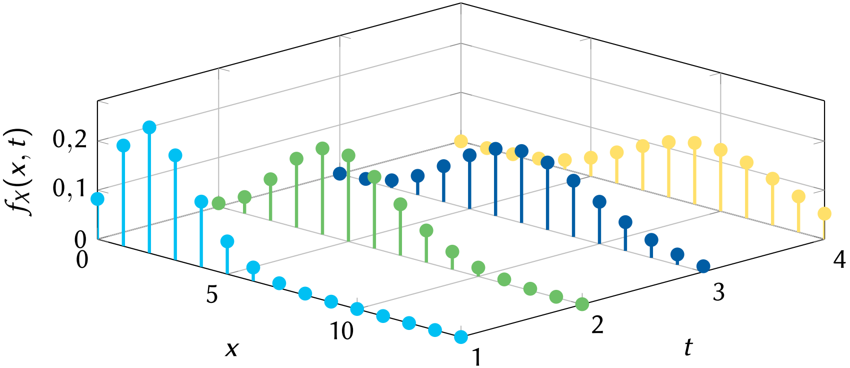


Figura: Esta es la función de probabilidad de masa (PMF) de una secuencia aleatoria de Poisson, con $\lambda = 2{,}5$ eventos por minuto. Es claramente no estacionario e ilustra la probabilidad de $x = 0, 1, 2 \ldots$ ocurrencias en t. Observar el aumento de la dispersión conforme aumenta t.

Momentos de la distribución de Poisson

El **primer momento ordinario** (la media) es:

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!} \delta(x-k)\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E[X(t)] = \lambda t}$$

Este resultado implica que es un proceso **no estacionario**.

El **segundo momento ordinario** es:

$$
\begin{aligned}
E[X^2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E[X^2(t)] = \lambda t[1 + \lambda t]}$$

La **varianza**, por tanto, es:

$$
\begin{aligned}
\sigma_X^2 &= E[X^2(t)] - E[X(t)]^2 \\
&= \lambda t + \lambda^2 t^2 - \lambda^2 t^2
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\sigma_X^2 = \lambda t} \quad \text{con desviación estándar } \sigma_X = \sqrt{\lambda t}$$

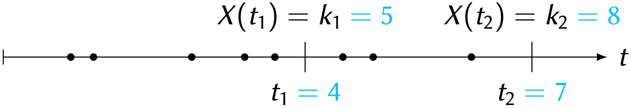
Probabilidad conjunta y condicional del proceso de Poisson

Densidad probabilística conjunta y condicional I

Proceso aleatorio de Poisson

Probabilidad conjunta la probabilidad de que ocurran k_1 eventos en un tiempo t_1, **y que** ocurran otros $k_2 - k_1$ eventos en el intervalo de t_1 a t_2, para un total de k_2 eventos en t_2 unidades de tiempo.

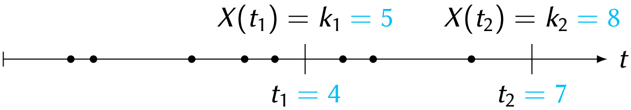
Probabilidad condicional la probabilidad de que ocurran $k_2 - k_1$ eventos en el intervalo de t_1 a t_2, **dado que** ocurrieron k_1 eventos en un tiempo t_1 (para un total de k_2 eventos en t_2 unidades de tiempo).



(Números en celeste de ejemplo).

Para determinar la función de densidad probabilística conjunta para el proceso de Poisson en los tiempos $0 < t_1 < t_2$, primero obsérvese que la probabilidad de k_1 ocurrencias de eventos sobre $[0, t_1]$ es:

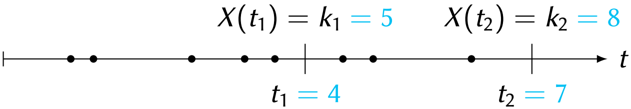
$$P[X(t_1) = k_1] = \frac{(\lambda t_1)^{k_1}}{k_1!} e^{-\lambda t_1} \qquad k_1 = 0, 1, 2, \ldots \tag{4}$$



La probabilidad condicional de k_2 ocurrencias sobre $[0, t_2]$ dado que k_1 eventos ocurran sobre $[0, t_1]$, es la probabilidad que $k_2 - k_1$ eventos ocurran sobre $[t_1, t_2]$ la cual es, *debido a la propiedad de falta de memoria*,

$$P[X(t_2) = k_2 | X(t_1) = k_1] = \frac{[\lambda(t_2 - t_1)]^{k_2 - k_1}}{(k_2 - k_1)!} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$$

para $k_2 \geq k_1$.



La probabilidad conjunta de k_2 ocurrencias al tiempo t_2 y k_1 ocurrencias al tiempo t_1 es el producto de los dos últimos resultados:

$$\begin{aligned} P[X(t_1) = k_1 \cap X(t_2) = k_2) &= P[X(t_1) = k_1] \cdot P[X(t_2) = k_2 \mid X(t_1) = k_1] \\ &= \frac{(\lambda t_1)^{k_1} [\lambda(t_2 - t_1)]^{k_2 - k_1}}{k_1!(k_2 - k_1)!} e^{-\lambda t_2} \qquad k_2 \geq k_1 \end{aligned} \tag{5}$$

"Fácilmente" deducible a partir de la relación básica de probabilidad condicional:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

La función de densidad conjunta es

$$f_X(x_1, x_2) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=k_1}^{\infty} P(k_1, k_2)\delta(x_1 - k_1)\delta(x_2 - k_2) \tag{6}$$

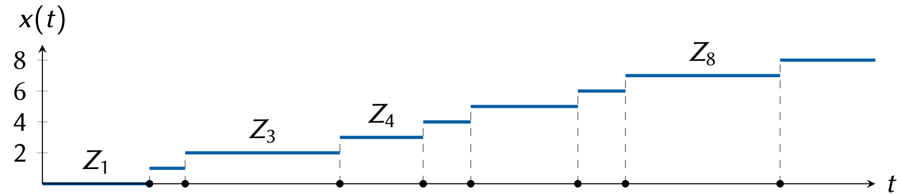
para las variables aleatorias del proceso $X(t_1) = X_1$ y $X(t_2) = X_2$.

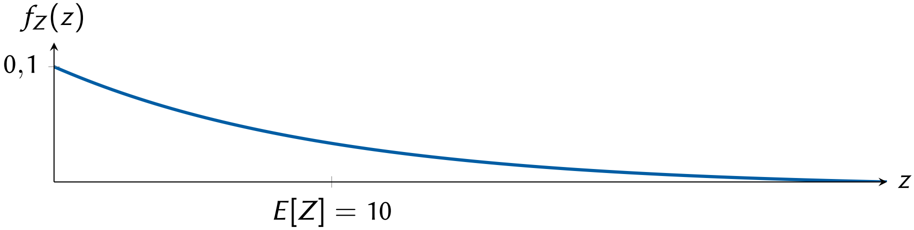
La llegada de los pacientes a la oficina de cierto doctor se puede modelar por medio de un proceso de Poisson con tasa $\lambda = \frac{1}{10}$ minutos. El doctor no verá a un paciente hasta que al menos tres pacientes se encuentren en la sala de espera.

1. Encuentre el tiempo que debe esperar el primer paciente para ser atendido por el doctor. Asuma que los tiempos de espera se modelan exponencialmente.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que nadie sea atendido en la primera hora?

Considerar que el tiempo de llegada de n clientes es $T_n = Z_1 + Z_2 + Z_3, \ldots$, donde

$$Z \sim \text{exponencial}(\lambda) \qquad f_Z(z) = \lambda e^{-\lambda z} \qquad E[Z] = 1/\lambda$$


$x(t)$
8
6
4
2
Z_1
Z_3
Z_4
Z_8
t


$f_Z(z)$
0,1
z
$E[Z] = 10$

Parte 1: *Encuentre el tiempo que debe esperar el primer paciente para ser atendido por el doctor. Asuma que los tiempos de espera se modelan exponencialmente.*

Sea T_n el tiempo de llegada del n-ésimo paciente a la oficina del doctor, entonces:

$$T_n = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

donde $\{Z_n\}$ para $n = 1, 2, \ldots$ son VA IID exponenciales con el mismo parámetro $\lambda = \frac{1}{10}$ que describen el tiempo de espera desde la última llegada de una persona.

Así entonces:

$$E[T_n] = E\left[\sum_{i=1}^{n} Z_i\right] = \sum_{i=i}^{n} E[Z_i] = n\frac{1}{\lambda}$$

considerando que la media de la función exponencial es $1/\lambda$.
Desde el punto de vista del primer paciente, que tiene que esperar (insensiblemente de parte del doctor) a que dos pacientes más lleguen para ser atendido, el tiempo promedio de espera desde que el momento en que llega es de:

$$E[T_2] = 2 \times 10 = 20 \text{ minutos}$$

Parte 2: *¿Cuál es la probabilidad de que nadie sea atendido en la primera hora?*

Sea $X(t)$ el proceso de Poisson con el parámetro $\lambda = \frac{1}{10}$. La probabilidad de que nadie sea atendido en la primer hora es la misma probabilidad de que al menos dos pacientes lleguen en los primeros 60 minutos. Con $\lambda t = 60 \cdot 1/10 = 6$, se tiene que:

$$
\begin{aligned}
P[X(60) \leq 2] &= P[X(60) = 0] + P[X(60) = 1] + P[X(60) = 2] \\
&= \frac{6^0}{0!}e^{-6} + \frac{6^1}{1!}e^{-6} + \frac{6^2}{2!}e^{-6} \\
&= e^{-6}(1 + 6 + 18) \approx 0{,}062
\end{aligned}
$$

Por lo tanto la probabilidad de que nadie sea atendido en la primera hora es de 6,2 %.

- **Poisson or Not? (When does a random variable have a Poisson distribution?)**
  jbstatistics, https://youtu.be/sv_KXSiorFk