Cadenas de Markov de tiempo continuo

El vector de probabilidad de estado estable

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

19

Tema V

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

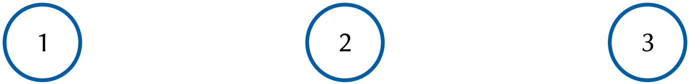
Luego de suficientes transiciones de estados, la probabilidad de ocurrencia de un estado i, de entre los $|S|$ estados posibles, se estabiliza en un valor constante. A cada estado, por tanto, se le asigna una probabilidad de estado estable ϕ_i.

El vector de probabilidad de estado estable

El vector de probabilidad de estado estable I

Después de que el proceso de nacimiento y muerte evoluciona por algún tiempo, se llega a la estabilidad.

- Esto significa que el estado del proceso se vuelve menos y menos dependiente de su estado inicial X_0 en el tiempo 0.
- El proceso seguirá cambiando estados pero habrá una probabilidad bien definida ϕ_i con la que el proceso X_t estará en el estado i.



$P(X_t = 1) = \phi_1$ $\qquad$ $P(X_t = 2) = \phi_2$ $\qquad$ $P(X_t = 3) = \phi_3$

- En tiempo 0, el proceso de nacimiento y muerte empieza en un cierto estado X_0.
- Sea $\rho_i = P(X_0 = i)$ para todo $i \in S$.
  - Caso especial: si se sabe que X_0 es algún estado específico k, entonces $\rho_k = 1$ y $\rho_i = 0$ para todo $i \neq k$.
- Un vector de probabilidad $\rho = (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots)$ en el espacio de estados S satisface las siguientes dos condiciones:
  1. $0 \leq \rho_i \leq 1$ para todo $i \in S$
  2. $\displaystyle\sum_{i \in S} \rho_i = 1$

Vector de estado estable

No importando el vector de probabilidad inicial ρ en tiempo 0,

$$P(X_t = i \mid \text{cualquier vector inicial } \rho) \to \phi_i \tag{1}$$

conforme $t \to \infty$ para cada estado i. Esto significa que el proceso se estabiliza en los diferentes estados con probabilidades dadas por el vector $\phi = (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_N)$.

ϕ es un vector de probabilidades que especifica la permanencia del proceso en los estados cuando la influencia del vector de probabilidad inicial ρ se desvaneció en el tiempo por los efectos de la aleatoriedad.

Hay, de hecho, procesos de nacimiento y muerte que no tienen o alcanzan un estado estable de probabilidades.

Pero supóngase que ϕ existe y se encontrará fórmulas que debe satisfacer.

- El tiempo de espera o de permanencia en el estado i está exponencialmente distribuido con parámetro Ω_i.
- Sea $f_i(t) = \Omega_i e^{-\Omega_i t}$ para $t > 0$, la densidad para este tiempo de espera.

- Por lo tanto, el proceso se moverá del estado i en un intervalo de tiempo de longitud Δt con probabilidad

$$
\begin{aligned}
P(\text{moverse de } i \text{ en } [t, t+\Delta t] \mid \text{en estado } i \text{ al tiempo } t) &= \\
P(\text{moverse de } i \text{ en } [0, \Delta t] \mid \text{en estado } i \text{ al tiempo } 0) &= \\
\int_0^{\Delta t} f_i(t)\, \mathrm{d}t &= \\
1 - e^{-\Omega_i \Delta t} &= \\
1 - \left(1 - \Omega_i \Delta t + \frac{(\Omega_i \Delta t)^2}{2!} - \cdots\right) &\simeq \Omega_i \Delta t
\end{aligned}
$$

para un Δt pequeño.

La primera igualdad usa la propiedad de carencia de memoria de la distribución exponencial. La tercera igualdad es una integración directa. La penúltima igualdad usa la expansión en series de Taylor de la función exponencial, junto con una aproximación de primer orden $1 - (1 - \Omega_i \Delta t)$.

- La probabilidad de que el proceso se moverá del estado i durante el próximo Δt es aproximadamente $\Omega_i \Delta t$ para $\Delta t \simeq 0$.

$$P(\text{moverse de } i \text{ en } [t, t + \Delta t] \mid \text{en estado } i \text{ al tiempo } t) \simeq \Omega_i \Delta t$$

donde Ω_i es el parámetro de permanencia. (Dado que $\Omega_i \Delta t$ es una probabilidad, $0 < \Omega_i \Delta t < 1$).

Supóngase que hay un número grande de procesos cada uno moviéndose entre estados de acuerdo a los mismos parámetros Ω_i y probabilidades de transición p_i, q_i para $i \in S$.

- Supóngase que n_i de estos procesos están en el estado i. Entonces aproximadamente

$$n_i \Omega_i \Delta t$$

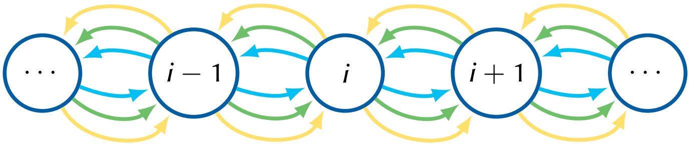
  (una fracción) se moverán del estado i durante el próximo Δt.
- ¿Hacia dónde se moverán?
  - Una fracción p_i se moverá al estado $i + 1$
  - Otra fracción q_i a $i - 1$
- El número aproximado de procesos que se mueven del estado i al estado $i - 1$ en el tiempo t durante el próximo Δt es

$$n_i \; \Omega_i \; \Delta t \; q_i$$

  .

- En estado estable, este número debe ser balanceado por un número equivalente de procesos moviéndose del estado $i-1$ al estado i. Entonces, el número de procesos moviéndose del estado $i-1$ al i durante el próximo Δt es $n_{i-1}\,\Omega_{i-1}\,\Delta t\;p_{i-1}$. En el estado estable por tanto,

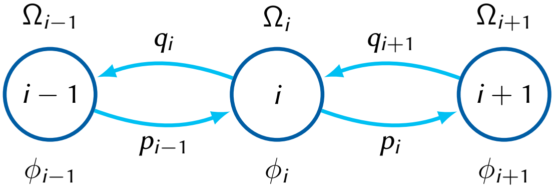
$$n_i\,\Omega_i\,\Delta t\;q_i \simeq n_{i-1}\,\Omega_{i-1}\,\Delta t\;p_{i-1} \tag{2}$$



Varios procesos simultáneos III

- Supóngase que hay un número grande n de procesos. La probabilidad de que uno de ellos esté en el estado i es $n_i/n = \phi_i$. Dividiendo la ecuación (2) por n y cancelando Δt implica que las probabilidades ϕ_i de estado estable satisfacen, para $i = 1, 2, \ldots$

$$\boxed{\phi_i \Omega_i q_i = \phi_{i-1} \Omega_{i-1} p_{i-1}} \tag{3}$$



Considere el dispositivo de dos estados $S = \{0, 1\}$ de un ejemplo anterior. Para $i = 1$ y con las sustituciones $\alpha = \Omega_1 q_1$ y $\beta = \Omega_0 p_0$ (todos ellos parámetros conocidos), la ecuación (3) se escribe como:

$$\phi_1 \Omega_1 q_1 = \phi_0 \Omega_0 p_0 \qquad \phi_1 \alpha = \phi_0 \beta$$

Esta es una ecuación con dos incógnitas, ϕ_0 y ϕ_1. La otra ecuación necesaria es la normalización que debe ser satisfecha por cualquier vector de probabilidad:

$$1 = \phi_0 + \phi_1 = \phi_0(1 + \beta/\alpha) = \phi_0 \frac{\alpha + \beta}{\alpha}$$

De esta forma,

$$\phi_0 = \alpha/(\alpha + \beta)$$
$$\phi_1 = \beta/(\alpha + \beta)$$

Se puede seguir un procedimiento general para resolver problemas relacionados con el vector de probabilidad de estado estable.

1. Suponga que el espacio de estados es $S = \{0, 1, \ldots, N\}$ o $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
2. Suponga además que ningún estado es absorbente y que es posible alcanzar cualquier estado desde otro estado; es decir, suponga que:
   - $p_0 = 1$ y $0 < p_i < 1$ para $i \in S$, $i > 0$
   - $q_N = 1$ si $S = \{0, \ldots, N\}$
   - $\Omega_i > 0$ para $i \in S$ (no hay estados absorbentes)

3. Se usa la fórmula recursiva, obtenida de la ecuación (3) $\phi_i \Omega_i q_i = \phi_{i-1} \Omega_{i-1} p_{i-1}$:

$$\phi_i = \frac{\Omega_{i-1} p_{i-1}}{\Omega_i q_i} \phi_{i-1} \tag{4}$$

para $i = 1, 2, \ldots$ para expresar cada ϕ_i en términos de ϕ_0.

4. Y además se usa la normalización

$$\sum_i \phi_i = 1 \tag{5}$$

Las ecuaciones (4) y (5) son suficientes para encontrar los ϕ_i.

Diagrama del procedimiento para hallar el vector de estado estable

Suponer

$$S = \{0, 1, \dots, N\}$$

Verificar

$$p_0 = 1$$
$$0 < p_i < 1$$
$$q_N = 1$$
$$\Omega_i > 0$$

Iterar

$$\phi_i = \frac{\Omega_{i-1} p_{i-1}}{\Omega_i q_i} \phi_{i-1}$$

Normalizar

$$\sum_i \phi_i = 1$$

Estado estable para el teléfono con botón de retención I

Ejemplo 6

Encuentre las probabilidades de estado estable ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 para el teléfono con un botón de retención de un ejemplo anterior. Encuentre el número esperado de personas en la línea o en espera en estado estable.

- Para $i = 0$,

$$\Omega_0 = \lambda \qquad p_0 = 1$$

- Para $i = 2$,

$$\Omega_2 = \nu \qquad q_2 = 1$$

- Para $i = 1$,

$$\Omega_1 = \lambda + \nu, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \nu}, \quad q_1 = \frac{\nu}{\lambda + \nu}$$

Estos fueron los resultados obtenidos en el problema para $S = \{0, 1, 2\}$.

Si se usa la fórmula recursiva con los valores de los parámetros Ω_i y las probabilidades de transición p_i, q_i para $i = 0, 1, 2$ se obtiene:

$$\phi_1 = \frac{\Omega_0 p_0}{\Omega_1 q_1}\phi_0 = \frac{\lambda \cdot 1}{(\lambda+\nu)\nu/(\lambda+\nu)}\phi_0 = \frac{\lambda}{\nu}\phi_0$$

$$\phi_2 = \frac{\Omega_1 p_1}{\Omega_2 q_2}\phi_1 = \frac{(\lambda+\nu)\lambda/(\lambda+\nu)}{\nu \cdot 1}\phi_1 = \frac{\lambda}{\nu}\phi_1 = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 \phi_0$$

Se usa a continuación normalización:

$$1 = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 = \phi_0 \left(1 + \frac{\lambda}{\nu} + \left(\frac{\lambda}{\nu} \right)^2 \right) = \phi_0 \frac{\lambda^2 + \lambda\nu + \nu^2}{\nu^2}$$

Por consiguiente:

$$\boxed{\phi_0 = \frac{\nu^2}{C} \qquad \phi_1 = \frac{\lambda\nu}{C} \qquad \phi_2 = \frac{\lambda^2}{C}}$$

donde $C = (\lambda^2 + \nu\lambda + \nu^2)$. Hay i personas con probabilidad ϕ_i en estado estable. Así, el número esperado de personas en espera en estado estable es:

$$E[X] = 0 \cdot \phi_0 + 1 \cdot \phi_1 + 2 \cdot \phi_2 = \frac{\lambda\nu + 2\lambda^2}{C}$$

Con los siguientes parámetros:

- Llamadas por minuto: $\lambda = 0{,}5$
- Promedio del tiempo de servicio: $t_{\text{servicio}} = 2{,}4$ (minutos)
- Parámetro de la distribución exponencial del tiempo de servicio: $\nu = 1/t_{\text{servicio}} \approx 0{,}4167$

Los resultados son:

- $\phi_0 \approx 0{,}2747$
- $\phi_1 \approx 0{,}3297$
- $\phi_2 \approx 0{,}3956$

Y el valor esperado de clientes es $E[X] = 1{,}1209$, es decir, que casi siempre habrá alguien siendo atendido. Resultado sensato según los parámetros.

Encuentre el vector de probabilidad ϕ de estado estable para la cola de un servidor.

Usando los valores de Ω_i, p_i, q_i de ese ejemplo:

$$\Omega_{i-1}p_{i-1} = \lambda \qquad \Omega_i q_i = \nu$$

para todo $i \geq 1$. De esta forma,

$$\phi_i = \frac{\Omega_{i-1}p_{i-1}}{\Omega_i q_i}\phi_{i-1} = \frac{\lambda}{\nu}\phi_{i-1}$$

con lo que

$$\phi_i = \frac{\lambda}{\nu}\phi_{i-1} = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^2 \phi_{i-2} = \cdots = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^i \phi_0$$

para $i = 0, 1, 2, \ldots$. La normalización implica que (utilizando la serie geométrica)

$$1 = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i = \phi_0 \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^i = \phi_0 \left[\frac{1}{1 - \frac{\lambda}{\nu}}\right]$$

para $\lambda/\nu < 1$.
Si $\lambda/\nu \geq 1$, la condición de normalización no se satisface.

Para que exista un estado estable, la tasa de partidas ν debe ser mayor que la de llegadas λ. De otra forma, la cola tiende a hacerse más y más grande y no alcanza una estabilidad.

Un sistema M/M/s tiene un proceso de llegada y de servicio tipo Markov (de ahí la M) y un número s de servidores.

En un sistema M/M/s, las llegadas son descritas por un proceso de Poisson con parámetro λ. Cada uno de los s servidores tiene un tiempo de servicio exponencial con parámetro ν.
El proceso $X(t) = i$ (notación abreviada X_t) describe el estado del sistema al tiempo t para $S = \{0, 1, \ldots\}$ (es decir, $i \geq 0$).

Únicamente con $\rho = \lambda/(s\nu) < 1$ el sistema alcanza un estado estacionario, donde:

$$\Omega_0 = \lambda \qquad \Omega_{i\to i-1} = \begin{cases} i\nu & \text{para } 0 < i < s \\ s\nu & \text{para } i \geq s \end{cases} \tag{6}$$

$$\phi_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^k}{k!} + \frac{(s\rho)^s}{s!(1-\rho)}\right]^{-1} \tag{7}$$

$$\phi_i = \begin{cases} \dfrac{(s\rho)^i}{i!}\phi_0 & \text{para } i < s \\ \dfrac{s^s\rho^i}{s!}\phi_0 & \text{para } i \geq s \end{cases} \tag{8}$$

Asimismo, es posible describir el número promedio de clientes en el sistema, como:

$$L = \frac{\lambda}{\nu} + \frac{\rho(s\rho)^s}{s!(1-\rho)^2}\phi_0 \tag{9}$$

Y el número promedio de clientes en una fila (cuando todos los servidores están ocupados), dado como:

$$L_q = \frac{\rho(s\rho)^s}{s!(1-\rho)^2}\phi_0 = L - \frac{\lambda}{\nu} \tag{10}$$

Para una corriente de arribo de Poisson con parámetro λ y un tiempo de servicio exponencialmente distribuido con parámetro ν y un solo servidor, $s = 1$, las probabilidades de estado estable son:

$$\Omega_0 = \lambda \qquad\qquad \Omega_{i \to i-1} = \nu \tag{11}$$

$$\phi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\nu} = 1 - \rho \tag{12}$$

$$\phi_i = \left(1 - \frac{\lambda}{\nu}\right)\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^i = (1-\rho)\rho^i \tag{13}$$

El número promedio de clientes en el sistema es:

$$L = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{\lambda}{\nu - \lambda} \tag{14}$$

Y el número promedio de clientes en una fila (cuando el servidor está ocupado) es:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\nu(\nu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{15}$$

Un servidor web es modelado como un sistema $M/M/1$ con una tasa de arribo de 2 solicitudes por minuto. Es deseado tener 3 solicitudes o menos en fila (más una que está siendo atendida) el 99 % del tiempo. ¿Qué tan rápido debe ser el servicio? ν es solicitudes atendidas por minuto.

El estado i es el número de clientes en el sistema. La longitud de la fila es $L_q = i - 1$ (en virtud de la solicitud que está siendo atendida en $s = 1$ servidores). Es posible encontrar:

$$P(5 \text{ o más clientes en el sistema}) = \sum_{i=5}^{\infty}(1-\rho)\rho^i = 1 - \sum_{i=0}^{4}(1-\rho)\rho^i = \rho^5$$

que depende de $\rho = \lambda/\nu$ y del parámetro de servicio ν buscado.

De los datos del problema: $\lambda = 2$. Para tener una fila de 3 o menos clientes el 99 % del tiempo se necesita:

$$P(\text{5 o más clientes en el sistema}) = \rho^5 = \left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^5 \leq 0{,}01$$

$$\nu^5 \geq \frac{\lambda^5}{0{,}01} = \frac{2^5}{0{,}01} = 3200 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\nu \geq 5{,}024}$$

es decir, el servidor debe atender más de 5,024 solicitudes por minuto en promedio para poder satisfacer el requisito.

- **¿Qué es una cadena de Markov?**
  Luis Rincón, https://youtu.be/Trf9P7DnOHQ
- **Origin of Markov chains | Journey into information theory | Computer Science**
  Khan Academy Labs, https://youtu.be/Ws63I3F7Moc