Cadenas de Markov de tiempo discreto

Introducción

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

20

Tema V

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

Cuando existe una cantidad definida de estados, es posible modelar las transiciones entre todos estos estados.

Cadenas de Markov de tiempo discreto

- Considérese un sistema que puede estar en cualquiera de varios estados.
- El conjunto de estados es denominado el espacio de estados S y se supondrá en general que $S = \{0, 1, 2, \ldots, N\}$.
- Supóngase ahora que una *partícula* es libre de saltar entre los estados del espacio de estados S. Su localización al tiempo t es X_t.
- De esta forma se tiene un proceso estocástico $\{X_t\}_{t=0}^{\infty}$.
- La localización X_t se mide solamente en los **tiempos discretos** $t = 0, 1, 2, \ldots$
- X_0 es la localización en el tiempo 0.

1. Suponga que la partícula está en el estado i en el tiempo t. La probabilidad que brinque a otro estado j depende solamente de i. Matemáticamente, sea $i, j, i_{t-1}, \ldots, i_0 \in S$. Entonces para cualquier tiempo t:

$$
\begin{aligned}
P(X_{t+1} = j \mid X_t = i, X_{t-1} = i_{t-1}, \ldots, X_0 = i_0) \\
= P(X_{t+1} = j \mid X_t = i)
\end{aligned}
$$

Es decir, el futuro (tiempo $t+1$), dado el presente (tiempo t), es independiente del pasado (tiempos $t-1, \ldots, 0$). La probabilidad anterior es la probabilidad de transición o de salto del estado i al estado j.

Esta es la *propiedad de Markov*

2. Las probabilidades de transición descritas son

Independientes de los estados pasados una vez que se conoce donde la partícula está ahora

Independientes de t el momento en que hace la transición

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = \Pi_{i,j} \tag{1}$$

Esta última suposición se denomina **homogeneidad en el tiempo**.

$\Pi_{i,j}$ es la probabilidad de transición del estado i al estado j

Cadena de Markov de tiempo discreto (homogénea)

Consiste de una partícula que salta en cada unidad de tiempo entre estados en un espacio de estados S. X_t denota el estado ocupado en el tiempo t para $t = 0, 1, 2, \ldots$

Si la partícula está en el estado i al tiempo t, estará en el estado j en el tiempo $t + 1$ (sin importar los estados ocupados antes del tiempo t) con probabilidad

$$\Pi_{i,j} = P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) \tag{2}$$

Sea $S = \{0, 1\}$ con probabilidades de transición dadas por:

$$\Pi_{0,0} = 1/3 \qquad \Pi_{0,1} = 2/3 \qquad \Pi_{1,0} = 1/4 \qquad \Pi_{1,1} = 3/4 \tag{3}$$

Su representación gráfica es:

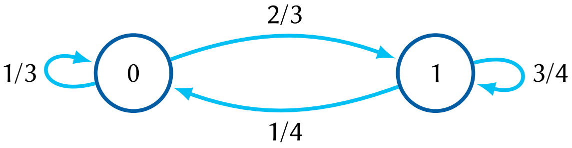

Figura 1: Cadena de Markov de tiempo discreto.

También se suele representar la misma información dada en la ecuación (3)

$$\Pi_{0,0} = 1/3 \qquad \Pi_{0,1} = 2/3 \qquad \Pi_{1,0} = 1/4 \qquad \Pi_{1,1} = 3/4$$

pero de forma matricial:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Hay una manera estándar de escribir las probabilidades de salto $\Pi_{i,j}$ como una matriz, a la que se le llama la matriz de transición Π. El elemento en su i-ésima fila y j-ésima columna es $\Pi_{i,j}$, la probabilidad que la partícula salte de i a j.

$$\Pi = \begin{bmatrix} \Pi_{0,0} & \Pi_{0,1} & \Pi_{0,2} & \cdots & \Pi_{0,N} \\ \Pi_{1,0} & \Pi_{1,1} & \Pi_{1,2} & \cdots & \Pi_{1,N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{N,0} & \Pi_{N,1} & \Pi_{N,2} & \cdots & \Pi_{N,N} \end{bmatrix} \tag{5}$$

Nótese que la i-esima fila de la matriz Π muestra las probabilidades de salto **del** estado i, la j-ésima columna muestra las probabilidades de salto **al** estado j.

Matriz de transición

Sea Π una matriz de transición de una cadena de Markov. Entonces,

1. $0 \leq \Pi_{i,j} \leq 1$ para todo i, j en el espacio de estados S.
2. Π tiene filas que suman 1:

$$\sum_{j=0}^{N} \Pi_{i,j} = \sum_{j=0}^{N} P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = 1 \tag{6}$$

En una cadena de Markov hay tres estados: $S = \{0, 1, 2\}$. Del estado 0 la partícula salta a los estados 1 o 2 con una idéntica probabilidad de 1/2. Del estado 2, la partícula debe saltar al estado 1. El estado 1 es absorbente: una vez que la partícula entre al estado 1, no puede salirse. Dibuje el diagrama y escriba la matriz de transición.

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

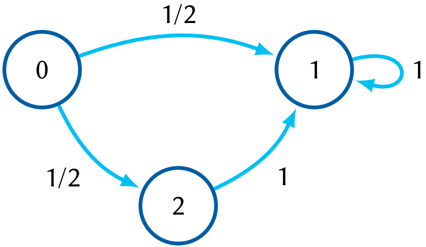

Figura 2: Cadena de Markov de tiempo discreto.

Estado absorbente

El estado i es absorbente si $\Pi_{i,i} = 1$.

Interpretado como “la probabilidad de pasar del estado i al mismo estado i es del 100 %”.

De cualquiera de los estados **interiores** $1, 2, \ldots, N-1$, la partícula salta a la derecha al estado $i+1$ con probabilidad p y hacia la izquierda al estado $i-1$ con probabilidad $q = 1 - p$. Es decir, para $1 \leq i \leq N - 1$,

$$\Pi_{i,i+1} = p, \qquad \Pi_{i,i-1} = q, \qquad \Pi_{i,j} = 0 \text{ para } j \neq i \pm 1$$

¿Cuál es la matriz de transición y el diagrama de saltos?

Esto corresponde al siguiente juego: tire una moneda; si sale escudo, entonces gana un colón; si sale corona, entonces pierde un colón. En cada tiro se salta al estado $i + 1$ con probabilidad p o al estado $i - 1$ con probabilidad q, con i colones al presente.

A este "juego" se le conoce como *la ruina del apostador*

Pueden considerarse tres casos diferentes acerca de la conducta de la partícula en los estados frontera 0 y N.

Caso 1 Ambos estados frontera podrían ser **absorbentes**, en cuyo caso se tendría,

$$\Pi_{0,0} = 1 \qquad \Pi_{N,N} = 1$$

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ q & 0 & p & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & q & 0 & p & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$$

Esto corresponde a las situaciones en que el juego acabó dado que se quedó sin dinero o si se ha ganado el dinero de los oponentes.

Caso 2 Ambos estados frontera podrían ser **reflectores**, en cuyo caso,

$$\Pi_{0,1} = 1 \qquad \Pi_{N,N-1} = 1$$

Esto corresponde al caso cuando mi oponente me da uno de sus colones cuando quedo con los bolsillos vacíos, o inversamente. Y que siga el juego.

Caso 3 Los estados frontera podrían ser **parcialmente reflectores**, en cuyo caso,

$$\Pi_{0,0} = r, \quad \Pi_{0,1} = 1 - r, \quad \Pi_{N,N} = s, \quad \Pi_{N,N-1} = 1 - s$$

La correspondiente matriz de transición estaría dada por

$$\Pi = \begin{bmatrix} r & 1-r & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1-s & s \end{bmatrix}$$

El caso 3 incluye los dos casos anteriores para valores particulares de r y s.

Un paseo aleatorio sobre $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ V

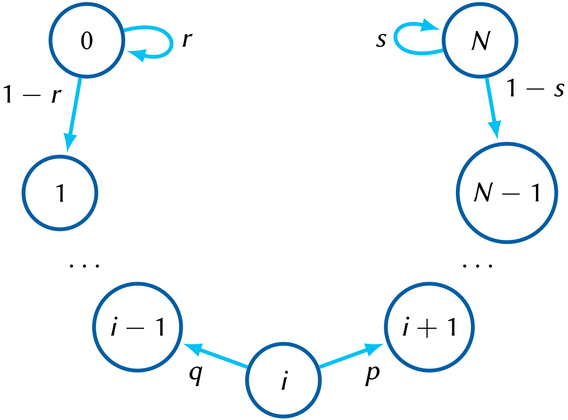

Figura 3: Paseo aleatorio sobre $S = \{0, 1, 2, \dots, N\}$.

La matriz de transición de orden t

La matriz de transición Π muestra las probabilidades de transición $\Pi_{i,j}$. Supóngase que se necesita encontrar probabilidades tales como

$$P(X_{t+3} = j \mid X_t = i)$$

de que la partícula estará en estado j tres saltos desde el estado actual i.

Si probabilidades de transición de un paso $\Pi_{i,j}$ son las entradas de la matriz Π, ¿cómo puede encontrarse las probabilidades de tres pasos, y más generalmente, las probabilidades de t pasos?

Matriz de transición de orden t

La matriz de transición de orden t es Π^t, cuya entrada (i, j) es

$$\Pi^t_{i,j} = P(X_t = j \mid X_0 = i) \tag{7}$$

que es la probabilidad de saltar de i a j en t pasos.

La homogeneidad en el tiempo (el hecho de que las probabilidades de transición no dependan de t) implica que no obstante el tiempo $\mu \geq 0$,

$$P(X_{t+\mu} = j \mid X_\mu = i) = \Pi^t_{i,j} \tag{8}$$

O sea, las probabilidades de transición de t pasos dependen solamente de la diferencia de tiempo.

Un algoritmo general se necesita para hallar la matriz de transición Π^t de orden t para cualquier matriz Π de una cadena de Markov dada.

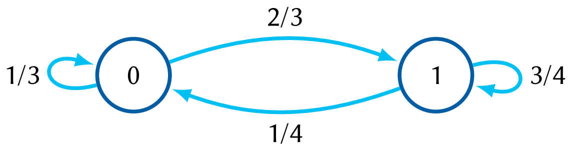

Figura 4: Cadena de Markov de tiempo discreto.

Para hallar la matriz de transición de orden $t+1$ a partir de la de orden t, se usa las suposiciones de Markov básicas.

- Supóngase que la partícula empieza en estado i en el tiempo 0, es decir, $X_0 = i$.
- Para que la partícula esté en el estado j en el tiempo $t+1$, debe haber atravesado algún estado k en el tiempo intermedio t, es decir, $X_0 = i \longrightarrow X_t = k \longrightarrow X_{t+1} = j$.

El objetivo es encontrar una expresión para $\Pi_{i,j}^{t+1}$.

$$
\begin{aligned}
\Pi_{i,j}^{t+1} &= P(X_{t+1} = j \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{N} P(X_{t+1} = j \text{ y } X_t = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{N} P(X_{t+1} = j \mid X_t = k \text{ y } X_0 = i) P(X_t = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{N} P(X_{t+1} = j \mid X_t = k) P(X_t = k \mid X_0 = i) \\
&= \sum_{k=0}^{N} \Pi_{i,k}^{t} \Pi_{k,j}
\end{aligned}
$$

- La primera igualdad es por definición de la matriz de transición de orden t.
- La segunda igualdad viene de particionar donde la partícula estaba en el tiempo t.
- La tercera igualdad viene de

$$P(A \cap B \mid C) = P(A \mid B \cap C)P(B \mid C)$$

que se sigue de la definición de probabilidad condicional.
- La cuarta igualdad usa la propiedad de Markov, es decir, la suposición de que la probabilidad de que la partícula esté en j en $t+1$ dado que estaba en k en el tiempo t, es independiente del hecho de que estaba en i en el tiempo 0.
- La quinta igualdad es por definición de las matrices de transición y por la propiedad de homogeneidad.

Ecuaciones de Chapman – Kolmogorov

Sea los tiempos $t, s \geq 0$. Entonces para todos los estados i, j:

$$\Pi_{i,j}^{t+s} = \sum_{k=0}^{N} \Pi_{i,k}^{t} \Pi_{k,j}^{s} \tag{9}$$

con $\Pi^{t+s} = \Pi^t \Pi^s$.
Para que la partícula que comienza en i en el tiempo 0 esté en j en el tiempo $t + s$, debe estar en algún estado k en el tiempo intermedio t.

Convierta el diagrama de salto de probabilidades de la Figura 5 en la correspondiente cadena de Markov y encuentre la probabilidad de que la partícula estará en el estado 1 después de tres saltos dado que empezara en el estado 1.

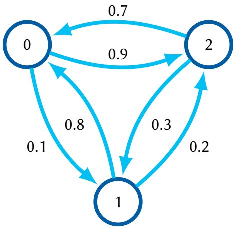

Figura 5: De un diagrama de salto a la matriz de transición.

Si se pasa la información dada por el diagrama de saltos a la correspondiente matriz de transición, se encuentra que:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 0 \end{bmatrix}$$

Con la ayuda de la matriz anterior, se encuentra que:

$$\Pi^2 = \Pi^1\Pi^1 = \begin{bmatrix} 0{,}71 & 0{,}27 & 0{,}02 \\ 0{,}14 & 0{,}14 & 0{,}72 \\ 0{,}24 & 0{,}07 & 0{,}69 \end{bmatrix}$$

$$\Pi^3 = \Pi^2\Pi = \begin{bmatrix} 0{,}230 & 0{,}077 & 0{,}693 \\ 0{,}616 & 0{,}230 & 0{,}154 \\ 0{,}539 & 0{,}231 & 0{,}230 \end{bmatrix}$$

Para responder a la pregunta hecha,

$$P(X_3 = 1 \mid X_0 = 1) = \Pi^3_{1,1} = 0{,}230$$

un 23 %.

El vector de probabilidad ρ^t

Se ha aprendido a calcular probabilidades condicionales de la forma $P(X_t = j \mid X_0 = i)$. Pero supóngase que la partícula comenzó en el estado i_0 en el tiempo 0. Entonces, ¿cuál sería $P(X_t = j)$? Más en general, suponga que la partícula empieza en el estado i con probabilidad p_i en el tiempo $t = 0$. Se desea responder la pregunta: con las probabilidades iniciales $\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_N$, ¿cuál sería $P(X_t = j)$ para cualquier estado j? Sea el vector de **probabilidad inicial** definido por

$$\rho = (\rho_0, \rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N)$$

Nótese que $0 \leq \rho_i \leq 1$ para todos los estados i en el espacio de estados S y $\rho_0 + \rho_1 + \cdots + \rho_N = 1$, dado que la partícula debe comenzar en alguna parte en el tiempo 0. Nótese además que $\rho^0 = \rho$.

El vector de probabilidad en el tiempo t se define como

$$\rho^t = (\rho_0^t, \rho_1^t, \rho_2^t, \ldots, \rho_N^t)$$

donde

$$\rho_j^t = P(X_t = j \mid \text{vector de probabilidad inicial sea } \rho)$$

Es decir, ρ_j^t es la probabilidad de que la partícula se encontrará en el estado j dado que comenzó en el estado i con probabilidad ρ_i para $i = 0, 1, \ldots, N$. Además,

$$\sum_{j=0}^{N} \rho_j^t = \sum_{j=0}^{N} P(X_t = j) = 1$$

Es decir, para cada t, ρ^t es un vector de probabilidad.

Vector de probabilidad ρ

Un vector de probabilidad $\rho = (\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_N)$ satisface

1. $0 \leq \rho_i \leq 1$ para cada $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.
2. $\rho_0 + \rho_1 + \ldots + \rho_N = 1$

Hay un método directo para obtener el vector de probabilidad ρ^t en el tiempo t dado el vector de probabilidad inicial ρ^0 en el tiempo 0 y la matriz de transición Π^t de orden t:

$$\rho_j^t = \sum_{i=0}^{N} \rho_i \Pi_{i,j}^t$$

El vector de probabilidad en el tiempo t es

$$\rho^t = \rho\Pi^t = \rho^0\Pi^t \tag{10}$$

Para probar el resultado, se calcula lo siguiente:

$$\begin{aligned}\rho_j^t &= P(X_t = j)\\ &= \sum_{i=0}^{N} P(X_t = j \mid X_0 = i)P(X_0 = i)\\ &= \sum_{i=0}^{N} \Pi_{i,j}^t \rho_i\end{aligned}$$

donde la primera y segunda igualdades son las definiciones de ρ^t, Π^t y ρ. La segunda igualdad constituye una aplicación de la ley de probabilidad total.

Para la cadena de Markov de la Figura 6, encuentre la probabilidad de que la partícula estará en el estado 0 en el tiempo 3 si comenzó en el estado 0 con probabilidad 1/3 y en el estado 1 con probabilidad 2/3 en el tiempo 0.

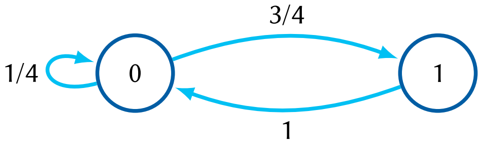

Figura 6: Vector de probabilidad ρ^t.

Primero, se encuentra la matriz de transición a partir del diagrama de salto y el vector de probabilidad en el tiempo 0 a partir de la información dada en el enunciado:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rho = (1/3, 2/3)$$

Toca a continuación calcular las matrices de transición de orden 2 y de orden 3, para finalmente calcular el vector de probabilidad de orden 3:

$$\Pi^2 = \Pi \cdot \Pi = \begin{bmatrix} 13/16 & 3/16 \\ 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$$

$$\Pi^3 = \Pi \cdot \Pi^2 = \begin{bmatrix} 25/64 & 39/64 \\ 13/16 & 3/16 \end{bmatrix}$$

$$\rho^3 = \rho\Pi^3 = (1/3, 2/3)\Pi^3 = (129/192, 63/192)$$

De esto último se concluye que $P(X_3 = 0) = \rho_0^3 = 129/192 \approx 0{,}7$.

Supóngase que la partícula empieza en el tiempo $t = 0$ en el estado i. En la terminología de los vectores de probabilidad, esto significa que:

$$\rho^0 = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$$

El número 1 en el anterior vector está en la i-ésima entrada.

Por consiguiente, el vector de probabilidad en el tiempo t es:

$$\begin{aligned}\rho^t &= (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)\Pi^t \\ &= (\Pi^t_{i,o},\Pi^t_{i,1},\Pi^t_{i,2},\ldots,\Pi^t_{i,N})\end{aligned}$$

lo que implica que dado que la partícula comenzó en el estado i,

$$P(X_t = j) = \rho^t_j = \Pi^t_{i,j}$$

que confirma lo que ya se sabe: la entrada (i,j) de la matriz Π^t es la probabilidad de estar en el estado j en el tiempo t dado que estaba en el estado i en el tiempo 0.