Cadenas de Markov de tiempo discreto

El vector de probabilidad de estado estable

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

21

Tema V

Universidad de Costa Rica

Escuela de Ingeniería Eléctrica

Cuando existe una cantidad definida de estados, es posible modelar las transiciones entre todos estos estados.
Luego de suficientes transiciones, y al alcanzar un "régimen permanente", cada estado tiene una probabilidad definida.

El vector de probabilidad de estado estable

El vector de probabilidad de estado estable I

Como en el caso anterior (no discreto), supóngase que hay un número grande N de partículas, cada una que salta de estado a estado entre los estados de S guiados por la matriz de transición Π de probabilidades de saltos.

- Si todas las N partículas empiezan en el estado 0 en el tiempo $t = 0$, entonces después de un salto algunas permanecerán en el estado 0 (si $\Pi_{0,0} > 0$) y otras saltarán a otros estados. Se puede esperar $N\Pi_{0,j}$ partículas en el estado j después de un salto.
- Por otro lado, supóngase que se distribuyen las N partículas de modo que N_j empiezan en el estado j en el tiempo 0 para $j = 0, 1, 2, \ldots, N$.

- Dado que $N_j \Pi_{j,i}$ de aquellas partículas que empiezan en j puede esperarse que salten al estado i, el número total de partículas que puede esperarse que estén en el estado i después de un salto es

$$\sum_{j=1za}^{N} N_j \Pi_{j,i}$$

- Pudiera suceder que este número es el mismo número N_i de partículas que empezaron en el estado i en el tiempo 0.

Cada una de las partículas podría cambiar estados, pero el número completo en el estado i permanecerá constante. Si esto fuera cierto para cada estado $i \in S$, el sistema entero de N partículas estaría en **estado estable**: por cada partícula que deja un estado, una la reemplazaría proveniente de otro estado.

En vez del número N_i absoluto de partículas en estado i,

$$N_i = \sum_{j=0}^{N} N_j \Pi_{j,i}$$

reestablézcase la ecuación en términos del número relativo N_i/N de partículas en estado i.

Por tanto, es la probabilidad de que cualquier partícula ocupe el estado i

$$N_i/N = \sum_{j=0}^{N} (N_j/N)\,\Pi_{j,i}$$

Si este fuera el caso, el sistema entero de N partículas estaría en el estado estable.
Un vector de probabilidad ϕ representa el estado estable si

$$\phi_i = \sum_{j=0}^{N} \phi_j \Pi_{j,i} \tag{1}$$

o sea, si $\phi^1 = \phi \cdot \Pi = \phi$. De esta forma, la probabilidad de que una partícula esté en el estado i es la misma en el tiempo 1 como en el tiempo 0.
Nótese que si ϕ tiene esta propiedad de *reproducirse a sí mismo* después de un salto, esto se cumplirá para todos los tiempos t:

$$\phi^1 = \phi\Pi = \phi \tag{2}$$

lo que implica

$$\phi^2 = \phi^1\Pi = \phi\Pi = \phi$$

$$\phi^3 = \phi^2\Pi = \phi\Pi = \phi$$

y, en general,

$$\begin{aligned}\phi^t &= \phi^{t-1}\Pi \\ &= \phi\Pi \\ &= \phi\end{aligned}$$

Vector de probabilidad de estado estable

Cualquier vector de probabilidad con la propiedad $\phi = \phi\Pi$ es denominado un vector de probabilidad de estado estable. Si la partícula empieza en el estado i con probabilidad ϕ_i por cada estado i, entonces en todo tiempo t, estará en el estado i con probabilidad ϕ_i.

Procedimiento para hallar el vector de probabilidad de estado estable I

Consta de dos pasos:

1. Establezca y resuelva estas ecuaciones:

$$\phi_j = \sum_{i=0}^{N} \phi_i \Pi_{i,j}$$

   para $j = 0, 1, 2, \ldots, N$ o alternativamente, en notación matricial, $\phi = \phi\Pi$.

2. Normalice por medio de la ecuación

$$\sum_{i=0}^{N} \phi_i = 1$$

Procedimiento para hallar el vector de probabilidad de estado estable II

- El paso 1 anterior involucra la solución de $N+1$ ecuaciones para $N+1$ incógnitas $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N$. Siempre habrá redundancia: una de las ecuaciones será una combinación lineal de las otras.
- La ecuación del paso 2 es realmente la $(N+1)$-ésima.
- En otras palabras: el primer paso, aunque define un sistema de $N+1$ ecuaciones, solamente N de ellas son linealmente independientes, por lo que se necesita del paso 2 para proveer la $(N+1)$-ésima ecuación para poder encontrar las $N+1$ incógnitas, que definirán los componentes del vector de probabilidad de estado estable.

Encuentre el vector de probabilidad de estado estable de la cadena de Markov mostrada en la Figura 1.

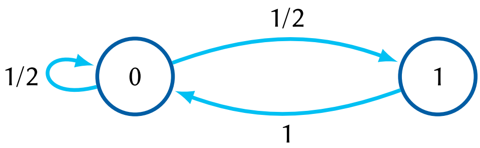


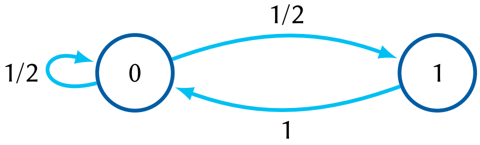
Figura 1: Vector de probabilidad de estado estable.

$$\begin{aligned}
\phi &= \phi\Pi \\
(\phi_0, \phi_1) &= (\phi_0, \phi_1)\Pi \\
&= (\phi_0, \phi_1)\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\
\phi_0 &= \frac{1}{2}\phi_0 + \phi_1 \\
\phi_1 &= \frac{1}{2}\phi_0
\end{aligned}$$

Las dos últimas ecuaciones son realmente la misma: $\phi_1 = \frac{1}{2}\phi_0$. A continuación se usa la condición de normalización:

$$1 = \phi_0 + \phi_1 = \phi_0 + \frac{1}{2}\phi_0 = \frac{3}{2}\phi_0$$

De esta forma se concluye que $\phi_0 = 2/3, \phi_1 = 1/3$. Por consiguiente, dos terceras partes del tiempo, la partícula se encontrará en el estado 0 y una tercera parte del tiempo se encontrará en el estado 1.



Considere la cadena de Markov de la Figura 2. Encuentre el vector de probabilidad de estado estable ϕ.

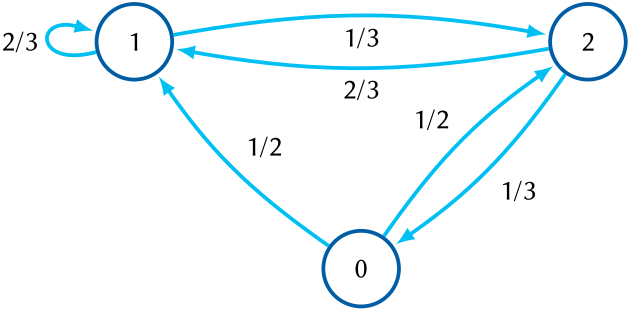


Figura 2: Vector de probabilidad de estado estable.

Se construye primero la matriz de transición Π:

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(\phi_0, \phi_1, \phi_2) = (\phi_0, \phi_1, \phi_2) \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\phi_0 = \frac{1}{3}\phi_2$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2}\phi_0 + \frac{2}{3}\phi_1 + \frac{2}{3}\phi_2$$

$$\phi_2 = \frac{1}{2}\phi_0 + \frac{1}{3}\phi_1$$

lo cual genera,

$$
\begin{aligned}
-3\phi_0 + \phi_2 &= 0 \\
3\phi_0 - 2\phi_1 + 4\phi_2 &= 0 \\
3\phi_0 + 2\phi_1 - 6\phi_2 &= 0
\end{aligned}
$$

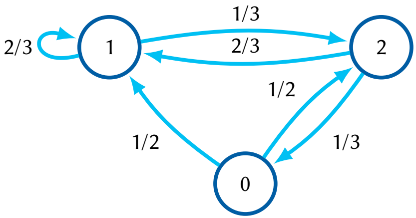
Si se suma la segunda y la tercera ecuaciones, resulta en $6\phi_0 - 2\phi_2 = 0$, que es esencialmente la misma primera ecuación, de donde se puede decir que la tercera ecuación es redundante. De las primeras dos ecuaciones se tiene que,

$$
\begin{aligned}
\phi_2 &= 3\phi_0 \\
\phi_1 &= \frac{15}{2}\phi_0
\end{aligned}
$$

Toca ahora usar la condición de normalización:

$$1 = \phi_0 + \phi_1 + \phi_2 = \left(1 + \frac{15}{2} + 3\right)\phi_0 = \frac{23}{2}\phi_0$$

Por consiguiente, $\phi_0 = \frac{2}{23}, \phi_1 = \frac{15}{23}, \phi_2 = \frac{6}{23}$.



Considere el proceso cíclico de la Figura 3. Hay $N+1$ estados $0, 1, 2, \ldots, N$. Para cada estado i, $0 < q_i < 1$. La partícula permanece en el estado i con probabilidad q_i, o salta al estado $i+1$ con probabilidad $p_i = 1 - q_i$. Si $i = N$, entonces $i+1$ será el estado 0; hay un *enrollamiento* del estado N al estado 0. Encuentre el vector de probabilidad de estado estable.

Se comienza por caracterizar la matriz de transición, a partir del diagrama de saltos.

$$\Pi = \begin{bmatrix} q_0 & p_0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & q_1 & p_1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & p_2 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_N & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & q_N \end{bmatrix}$$

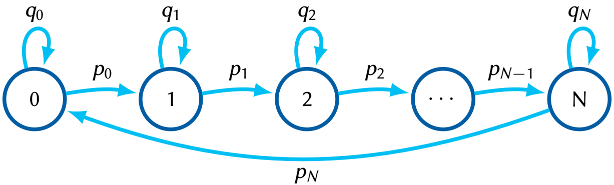


Figura 3: Proceso cíclico.

La ecuación $\phi = \phi\Pi$ implica que:

$$\begin{aligned}(\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_N) &= (\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_N)\Pi \\ \phi_0 &= q_0\phi_0 + p_N\phi_N \\ \phi_1 &= p_0\phi_0 + q_1\phi_1 \\ \phi_2 &= p_1\phi_1 + q_2\phi_2 \\ &\vdots\end{aligned}$$

lo que nos lleva a:

$$\begin{aligned} p_0\phi_0 &= p_N\phi_N \\ p_1\phi_1 &= p_0\phi_0 \\ p_2\phi_2 &= p_1\phi_1 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Se resuelve sucesivamente para cada ϕ_i en términos de ϕ_0 comenzando con la segunda ecuación:

$$\begin{aligned} \phi_1 &= (p_0/p_1)\phi_0 \\ \phi_2 &= (p_0/p_2)\phi_0 \\ \phi_3 &= (p_0/p_3)\phi_0 \\ &\vdots \\ \phi_N &= (p_0/p_N)\phi_0 \end{aligned}$$

Ahora se usa la condición de normalización,

$$\begin{aligned}1 &= \phi_0 + \phi_1 + \cdots + \phi_N \\ &= \left(1 + p_0/p_1 + p_0/p_2 + \cdots + p_0/p_N\right)\phi_0 \\ &= \left(1/p_0 + 1/p_1 + 1/p_2 + \cdots + 1/p_N\right)p_0\phi_0\end{aligned}$$

De esto último se obtiene que $1 = Cp_0\phi_0$, lo que determina ϕ_0. Para el proceso cíclico se obtiene finalmente que $\phi_i = 1/Cp_i$, donde $C = \sum_{j=0}^{N} 1/p_j$.

Sea

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

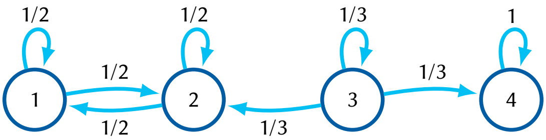


Figura 4: Proceso de Markov.

Caso con dos vectores de probabilidad de estado estable II

Hay dos vectores de probabilidad de estado estable distinguibles:

$$\phi = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$$
$$\psi = (0, 0, 0, 1)$$

Esto se verifica simplemente chequeando $\phi\Pi = \phi, \psi\Pi = \psi$.

Considérese un paseo aleatorio sobre los enteros positivos $S = \{0, 1, 2, \ldots\}$ en el que las transiciones son solamente hacia la derecha; suponga que $0 < p < 1$ y $q = 1 - p$. Véase la Figura 5. ¿Hay estado estable?

Esta cadena es similar al proceso cíclico. Aquí $p_i = p$ es constante y $N = \infty$.

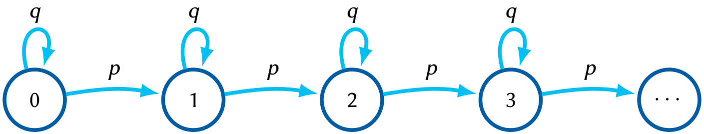


Figura 5: Paseo aleatorio sobre los enteros positivos.

La correspondiente matriz de transición está dada por:

$$\Pi = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & q & p & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & q & p & 0 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$\phi = \phi\Pi$ implica que

$$\begin{aligned} q\phi_0 &= \phi_0 \\ p\phi_0 + q\phi_1 &= \phi_1 \\ p\phi_1 + q\phi_2 &= \phi_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dado que $0 < p, q < 1$, la primera, la segunda, la tercera, y demás ecuaciones implican $\phi_0 = 0, \phi_1 = 0, \phi_2 = 0, \ldots$ Por consiguiente, no hay estado estable.

Fin