Eventos independientes y pruebas de Bernoulli

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

3

Tema I

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

Eventos independientes

La independencia estadística es una simplificación útil en los cálculos de probabilidad. Implica que la ocurrencia de un evento no afecta la probabilidad de ocurrencia de otro evento independiente.
La independencia de dos o más eventos es una **propiedad del experimento** y su determinación depende del conocimiento del mismo o de un análisis estadístico. A menudo también es una **aproximación**.

Sean A y B dos eventos con probabilidades no nulas de ocurrencia, $P(A) \neq 0 \neq P(B)$.

> A y B son llamados estadísticamente independientes si la probabilidad de ocurrencia de un evento no es afectada por la ocurrencia del otro evento.

Esto es,

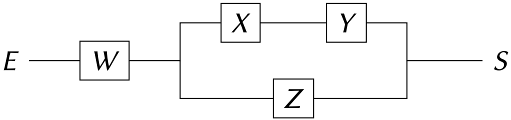
$$P(A \mid B) = P(A) \qquad (1) \qquad\qquad P(B \mid A) = P(B) \qquad (2)$$

y esta independencia estadística de dos eventos implica que

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)P(B)} \qquad (3)$$

Ejemplo de los subsistemas electrónicos I

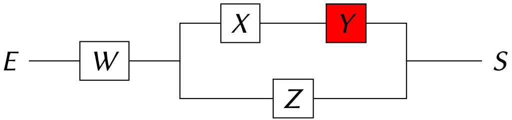
Un sistema electrónico consiste en cuatro subsistemas W, X, Y y Z que **operan de forma independiente** y que están interconectados de la siguiente forma:



El sistema total funciona cuando hay un "camino" habilitado entre la entrada E y la salida S. Sean $\{W, X, Y, Z\}$ los eventos en que operan correctamente los subsistemas W, X, Y y Z, respectivamente. Las probabilidades de operación apropiada de cada subsistema son $P(W)$, $P(X)$, $P(Y)$ y $P(Z)$.

1. Si, por un defecto permanente, $P(Y) = 0$, ¿cuál es la probabilidad $P(C)$ de que el sistema funcione correctamente?
2. Si se hacen cambios tales que $P(W) = 1$ y $P(Y) > 0$, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema funcione correctamente? Si fuera necesario, considere la condición de De Morgan ($\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$) y el hecho de que $P(A) = 1 - P(\overline{A})$.
3. Si ahora $0 < P(W), P(X), P(Y), P(Z) < 1$, ¿cuál es la probabilidad de que el sistema funcione correctamente?
4. Para las probabilidades $P(W) = 0{,}90$, $P(X) = 0{,}95$, $P(Y) = 0{,}90$ y $P(Z) = 0{,}85$, ¿cuál es el valor de la probabilidad anterior?

Parte 1: *Si, por un defecto permanente,* $P(Y) = 0$*, ¿cuál es la probabilidad* $P(C)$ *de que el sistema funcione correctamente?*

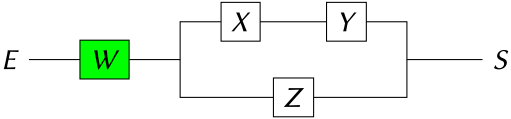


El brazo superior $(X \cap Y)$ queda inhabilitado porque Y no funciona. En ese caso, el único "camino" o ruta disponible es a través de W y Z, es decir, la ocurrencia simultánea $W \cap Z$, con probabilidad $P(W \cap Z)$. Debido a que los subsistemas son independientes,

$$\boxed{P(C) = P(W \cap Z) = P(W)P(Z)}$$

Ejemplo de los subsistemas electrónicos IV

Parte 2: *Si se hacen cambios tales que* $P(W) = 1$ *y* $P(Y) > 0$, *¿cuál es la probabilidad de que el sistema funcione correctamente?*



Ahora la probabilidad de operación solo depende de que la ruta $X \cap Y$ **o** la ruta Z funcionen, es decir, $C = Z \cup (X \cap Y)$, y así

$$\boxed{P(C) = P(Z \cup (X \cap Y))}$$

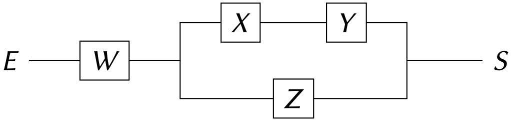
Puede ser conveniente simplificar esta expresión para que quede en términos de intersecciones, que luego pueden multiplicarse por su independencia. Para esto consideramos la relación de De Morgan ($\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$) y el hecho de que $P(A) = 1 - P(\overline{A})$:

$$\begin{aligned} P(Z \cup (X \cap Y)) &= 1 - P(\overline{Z \cup (X \cap Y)}) \\ &= 1 - P(\overline{Z} \cap \overline{(X \cap Y)}) \\ &= 1 - P(\overline{Z})P(\overline{X \cap Y}) \\ &= 1 - (1 - P(Z))(1 - P(X \cap Y)) \end{aligned}$$

$$\boxed{P(C) = 1 - [1 - P(Z)]\,[1 - P(X)P(Y)]}$$

Ejemplo de los subsistemas electrónicos VI

Parte 3: *Si ahora* $0 < P(W), P(X), P(Y), P(Z) < 1$, *¿cuál es la probabilidad de que el sistema funcione correctamente?*



Hay dos planteamientos posibles:

- Observando que las dos rutas posibles son $W \cap X \cap Y$ y $W \cap Z$, y que el sistema opera cuando funciona una **u** otra, y así:

$$P(C) = P((W \cap X \cap Y) \cup (W \cap Z))$$

$$\boxed{P(C) = P(W)P(X)P(Y) + P(W)P(Z) - \bigcap_{i=W}^{Z} P(i)}$$

donde se utiliza la independencia y el resultado para la unión de dos conjuntos que no son mutuamente excluyentes: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

- A partir de los incisos anteriores, y considerando que W está "en serie" con el subsistema "en paralelo" de X, Y y Z, entonces,

$$\boxed{P(C) = P(W)P(Z \cup (X \cap Y))}$$

$$P(C) = P(W)\left\{1 - [1 - P(Z)]\,[1 - P(X)P(Y)]\right\}$$

Los dos resultados son equivalentes.

Parte 4: *Para las probabilidades* $P(W) = 0{,}90$*,* $P(X) = 0{,}95$*,* $P(Y) = 0{,}90$ *y* $P(Z) = 0{,}85$*, ¿cuál es la probabilidad anterior?*

Con los dos resultados equivalentes:

$$
\begin{aligned}
P(C) &= P((W \cap X \cap Y) \cup (W \cap Z)) \\
&= P(W)P(X)P(Y) + P(W)P(Z) - \bigcap_{i=W}^{Z} P(i) \\
&= 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}9 + 0{,}9 \cdot 0{,}85 \\
&\quad - 0{,}9 \cdot 0{,}95 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}85 \\
&= 0{,}880425 \approx 88\,\%
\end{aligned}
$$

Y para corroborar la equivalencia de los resultados, se calcula también de la forma

$$
\begin{aligned}
P(C) &= P(W)P(Z \cup (X \cap Y)) \\
&= P(W)\left\{1 - [1 - P(Z)]\,[1 - P(X)P(Y)]\right\} \\
&= 0{,}90\left\{1 - [1 - 0{,}85]\,[1 - 0{,}95 \cdot 0{,}90]\right\} \\
&= 0{,}880425 \approx 88\,\%
\end{aligned}
$$

¿Cuál es la diferencia entre eventos independientes y eventos mutuamente excluyentes? I

Esta es una pregunta importante. Algunas aseveraciones:

- La característica de exclusión mutua es una *propiedad de conjuntos* (el hecho de que ningún elemento dentro de A pertenece a B también).
- La independencia es una *propiedad estadística*, propia del experimento. También puede ser una aproximación.

¿Cuál es la diferencia entre eventos independientes y eventos mutuamente excluyentes? II

- Los eventos mutuamente excluyentes no son independientes. Esto porque si $A \cap B = \varnothing$ (la prueba ME) y si en un experimento aparece A, esto implica necesariamente que B no es posible, o sea, $P(B \mid A) = 0$, que significa que no son independientes.
- La independencia estadística es usual en secuencias de experimentos, donde un resultado anterior no afecta al siguiente (en ciertos contextos se les dice "sin memoria").

Pruebas de Bernoulli

Pruebas de Bernoulli

Un tipo de experimento en el que solo hay **dos resultados posibles** en cualquier prueba.

- Sea A el evento elemental que tiene uno de los dos resultados posibles como su elemento. $\overline{A}$ es el otro (y único) posible evento elemental.
- Se repetirá el experimento básico N veces, y se calculará la probabilidad de que A suceda k veces (no necesariamente consecutivas: en cualquier orden).
- Los eventos elementales son estadísticamente independientes.
- El evento A ocurre en cualquier ensayo con probabilidad $\boxed{P(A) = p}$.
- El evento $\overline{A}$ entonces tiene la probabilidad complementaria $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - p = q}$.

- Ejemplo: después de N ensayos del experimento básico, una secuencia posible (de muchas) es el evento A ocurriendo k veces seguidas, seguido por el evento $\overline{A}$ ocurriendo $N-k$ veces. Puesto que se asumió la independencia estadística de los ensayos, la probabilidad de esta secuencia particular es:

$$\underbrace{P(A)P(A)\cdots P(A)}_{k \text{ eventos } A}\underbrace{P(\overline{A})P(\overline{A})\cdots P(\overline{A})}_{N-k \text{ eventos } \overline{A}} = p^k(1-p)^{N-k} \tag{4}$$

- Hay otras secuencias que dan k eventos A y $N-k$ eventos $\overline{A}$. Por la independencia estadística, *la probabilidad de cada una de estas secuencias es la misma.*

- Del análisis combinatorio, el número de maneras de tomar k objetos de una colección de N objetos es:

$$\binom{N}{k} = \frac{N!}{k!(N-k)!} = \mathtt{C}_k^N = {}_N\mathrm{C}_k \tag{5}$$

La cantidad $\binom{N}{k}$ se conoce como *coeficiente binomial.*
Se obtiene entonces la, así llamada, *distribución binomial*:

$$\begin{aligned} P(k) &= P\{A \text{ ocurre exactamente } k \text{ veces}\} \\ &= \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \\ &= (\text{el número de combinaciones}) \times (\text{la probabilidad de cada una}) \end{aligned} \tag{6}$$

Un dato binario (0 o 1) se envía por una línea de transmisión con una probabilidad de error de 0,001. Si 1000 bits son enviados, ¿cuál es la probabilidad de que hay…

1. …exactamente 5 errores…

$$P(\{\text{exactamente 5 errores}\}) = \binom{1000}{5}(0{,}001)^5(0{,}999)^{995}$$

2. …o entre 2 y 5 errores?

$$P(\{\text{entre 2 y 5 errores}\}) = \sum_{k=2}^{5}\binom{1000}{k}(0{,}001)^k(0{,}999)^{1000-k}$$

- ¡Los factoriales son difíciles de evaluar!
- Las potencias de muy alto orden también son difíciles de calcular.

Por eso existen dos aproximaciones de la distribución binomial que hacen más práctica su aplicación y su cálculo[1]:

a) Aproximación de De Moivre-Laplace
b) Aproximación de Poisson

[1] No existía ni Python ni Mathematica ni Matlab… hace 300 años.

Fórmula de Stirling

Una aproximación de los factoriales de la forma:

$$m! \approx (2\pi m)^{\frac{1}{2}} m^m e^{-m} \tag{7}$$

para m grande. Entonces,

$$\boxed{\binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi Np(1-p)}} \exp\left[-\frac{(k-Np)^2}{2Np(1-p)}\right]} \tag{8}$$

Aplica para N, k, $(N-k)$ grandes, k cerca de Np tales que sus desviaciones de Np (más arriba o más abajo) son pequeñas en magnitud relativas tanto a Np como a $N(1-p)$.

Si se cumple que:

- k es pequeño
- N y por tanto $(N-k)$ son grandes
- $p \ll 1$ y además $Np = \lambda \approx 1$

Entonces la expresión a continuación es una aproximación de la prueba de Bernoulli,

$$\boxed{P(k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda}} \tag{9}$$

llamada *distribución de Poisson* (aquí sin demostración).

Ejemplo de transmisión binaria de datos y errores I

Un dato binario (0 o 1) se envía por una línea de transmisión con una probabilidad de error de 0,001. Si 1000 bits son enviados, ¿cuál es la probabilidad de que hay...

Verificar en este ejemplo que:

- k es pequeño: $k = 5$
- N y $(N - k)$ son grandes: $N = 1000$ y $(N - k) = 995$
- $p \ll 1$ y además $Np = \lambda \approx 1$, que son: $p = 0{,}001$ y $Np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$

Entonces aplica la distribución de Poisson:

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda} \tag{10}$$

Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que hay…

1. …exactamente 5 errores…

$$
\begin{aligned}
&P(\{\text{exactamente 5 errores}\})\\
&\approx \frac{1^5 e^{-1}}{5!}\\
&= 0{,}003065
\end{aligned}
$$

2. …o entre 2 y 5 errores?

$$
\begin{aligned}
&P(\{\text{entre 2 y 5 errores}\})\\
&\approx \frac{1^2 e^{-1}}{2!} + \frac{1^3 e^{-1}}{3!} + \frac{1^4 e^{-1}}{4!} + \frac{1^5 e^{-1}}{5!}\\
&= 0{,}26365
\end{aligned}
$$

Computacionalmente, estas aproximaciones son mucho más sencillas de calcular.