Funciones de distribución condicionales de una variable aleatoria

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

5

Tema I

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

Para las variables aleatorias también es posible modelar probabilidades de eventos condicionados a la ocurrencia de otros eventos. Esta relación de interdependencia está sujeta al experimento o fenómeno particular y una buena cantidad de situaciones reales obedecen a un modelado condicional como este.

Función acumulativa condicional, $F_X(x \mid B)$

La función acumulativa condicional es idéntica en sus propiedades a la función acumulativa ordinaria, excepto que ahora está implícita la ocurrencia de un evento anterior que modifica su distribución de probabilidades.

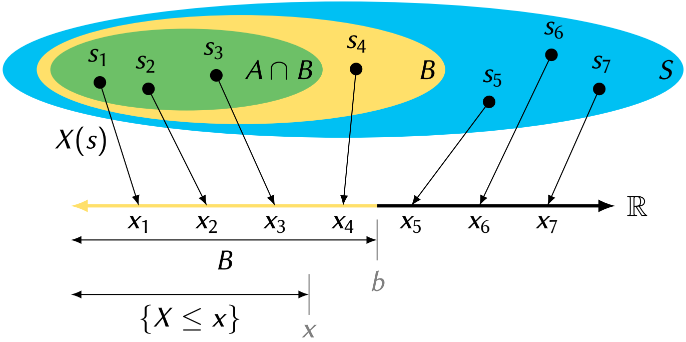
Sea A el evento $\{X \leq x\}$ de la variable aleatoria X. La probabilidad $P\left(X \leq x \mid B\right)$ se define como la *función acumulativa condicional de* X, que se denota $F_X(x \mid B)$,

$$P(A \mid B) = P\left(X \leq x \mid B\right) \triangleq F_X(x \mid B) \tag{1}$$

$$F_X(x \mid B) = \frac{P\left(\{X \leq x\} \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P(A \mid B) \tag{2}$$

Aplicable a variables aleatorias discretas, continuas o mixtas.

El evento conjunto $\{X \leq x\} \cap B$ consiste de los resultados s tales que $X(s) \leq x$ y $s \in B$.



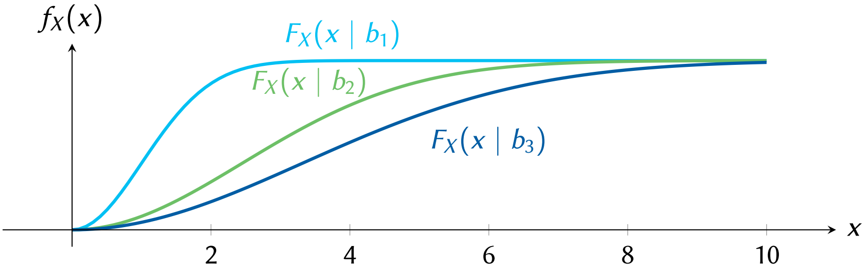
$$\{s : X(s) \leq x \;\wedge\; s \in B\} = \{s_1, s_2, s_3\}$$

Propiedades de la función acumulativa condicional

Todas las propiedades de las funciones acumulativas ordinarias se aplican a $F_X(x \mid B)$:

1. Similar a $P(\varnothing) = 0$:
$$F_X(-\infty \mid B) = 0$$
2. Similar a $P(S) = 1$:
$$F_X(\infty \mid B) = 1$$
3. Es una probabilidad:
$$0 \leq F_X(x \mid B) \leq 1$$
4. Es no decreciente:
$$F_X(x_1 \mid B) \leq F_X(x_2 \mid B) \text{ si } x_1 < x_2$$
5. Probabilidad de un segmento:
$$\begin{aligned} P\{x_1 < X \leq x_2 \mid B\} \\ = F_X(x_2 \mid B) - F_X(x_1 \mid B) \end{aligned}$$
6. Continuidad por la derecha:
$$F_X(x^+ \mid B) = F_X(x \mid B)$$

Si solo existen los resultados elementales $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ entonces puede existir una función acumulativa $F_X(x \mid B)$ con tres parámetros distintos, a saber



Considere el experimento de tres lanzamientos de moneda (o el lanzamiento de tres monedas, que es equivalente porque son eventos independientes). Sea la VA X "el número total de coronas" y sea el evento $B = \{\text{más coronas que escudos}\}$. Determine y esboce $F_X(x \mid B)$.

El lanzamiento de monedas tiene ocho resultados distintos (2^3) .El evento B es:

$$B = \{CCC, CCE, CEC, ECC\}$$

con $P(B) = \dfrac{1}{2}$.

Considere el evento conjunto $\{X \leq x\} \cap B$ y la definición

$$F_X(x \mid B) = \frac{P\left(\{X \leq x\} \cap B\right)}{P(B)}$$

Si X es "el número total de coronas" y $B = \{$ más coronas que escudos $\}$, entonces

x	$\{X \leq x\} \cap B$	$P\left(\{X \leq x\} \cap B\right)$	$F_{X\|B}$
0	$\{EEE\} \cap B = \varnothing$	0	0
1	$\{CEE, ECE, EEC, EEE\} \cap B = \varnothing$	0	0
2	$\{CCE, CEC, ECC\}$	$3/8$	$3/4$
3	$\{CCC, CCE, CEC, ECC\} = B$	$4/8$	1

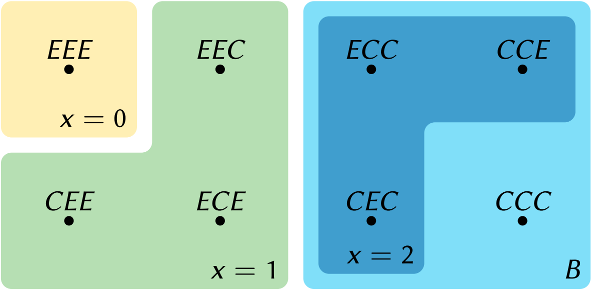


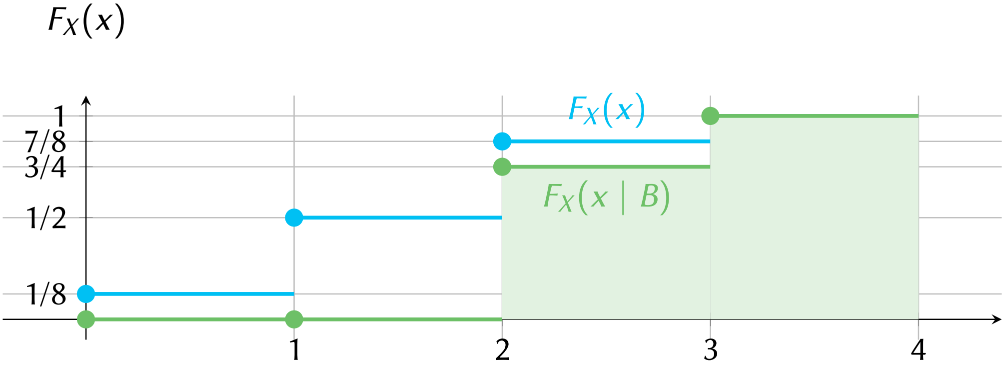
Figura: Espacio de eventos del experimento de tres lanzamientos de moneda, junto con los eventos X, "el número total de coronas" y $B = \{\text{más coronas que escudos}\}$, es decir, $B = \{CCC, CCE, CEC, ECC\}$.

Entonces,

$$F_X(x \mid B) = \begin{cases} 0 & x < 2 \\ 3/4 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$

mientras que,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \leq x < 1 \\ 1/2 & 1 \leq x < 2 \\ 7/8 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$$



X es "el número total de coronas" y $B = \{\text{más coronas que escudos}\}$

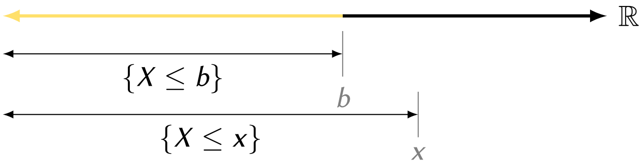
Sea el evento $B = \{X \leq b\}$ (una semirrecta), donde b es algún número real $-\infty < b < \infty$. Entonces,

$$\begin{aligned} F_X(x \mid X \leq b) &\triangleq P(X \leq x \mid X \leq b) \\ &= \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{X \leq b\})}{P(X \leq b)} \end{aligned}$$

donde $P(X \leq b) \neq 0$.

Dos situaciones pueden considerarse, una es donde $X \geq b$ y la otra donde $X < b$.

Si $b \leq x$ el evento $B = \{X \leq b\}$ es un subconjunto del evento $A = \{X \leq x\}$, de modo que $\{X \leq x\} \cap \{X \leq b\} = \{X \leq b\}$.

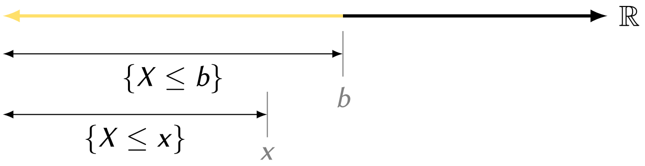


Luego,

$$F_X(x \mid X \leq b) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{X \leq b\})}{P(X \leq b)} = \frac{P(X \leq b)}{P(X \leq b)} = 1$$

para $x \geq b$.

Si $b > x$ el evento $A = \{X \leq x\}$ es un subconjunto del evento $B = \{X \leq b\}$, de modo que $\{X \leq x\} \cap \{X \leq b\} = \{X \leq x\}$.



Entonces,

$$F_X(x \mid X \leq b) = \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{X \leq b\})}{P(X \leq b)} = \frac{F_X(x)}{F_X(b)}$$

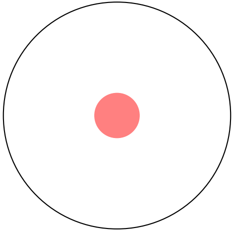
para $x < b$.

Casos especiales de la función acumulativa condicional IV

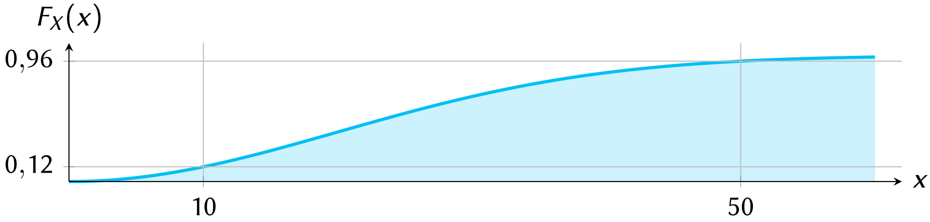
$$F_X(x \mid X \leq b) = \begin{cases} \dfrac{F_X(x)}{F_X(b)} & x < b \\ 1 & x \geq b \end{cases} \tag{3}$$

cuando $B = \{X \leq b\}$, donde b es algún número real $-\infty < b < \infty$.

La distancia de yerro radial de aterrizajes por paracaídas medida desde el centro del blanco, es una variable aleatoria Rayleigh con $b = 800\ \mathrm{m}^2$ y $a = 0$.
El blanco es un círculo de radio 50 metros con un ojo de buey de radio 10 metros.
Encuéntrese la probabilidad de que un paracaidista acierte en el ojo del buey si el aterrizaje es dentro del blanco.



$$F_X(x) = \left[1 - \exp\left\{-\frac{x^2}{800}\right\}\right] u(x)$$



La probabilidad $P($ dar en el ojo de buey $|$ aterrizaje da en el blanco $)$ es:

$$
\begin{aligned}
P(\{X \leq 10\} \mid \{X \leq 50\}) &= \\
\frac{P(\{X \leq 10\} \cap \{X \leq 50\})}{P(\{X \leq 50\})} &= \frac{P(\{X \leq 10\})}{P(\{X \leq 50\})} \\
&= \frac{F_X(10)}{F_X(50)} \\
&= \frac{1 - e^{-100/800}}{1 - e^{-2500/800}} \\
&= 0{,}1229
\end{aligned}
$$

La precisión del paracaidista es tal que cerca de un 12,29 % de aterrizajes que dan en el blanco, serán dentro del ojo de buey.

Cuando existe una partición[1] $\{A_i\}$ de la cual depende otro evento $B = \{X \leq x\}$, se puede crear una probabilidad total condicional de la forma en que se hizo anteriormente. Ahora,

$$F_X(x) = \sum_{i=1}^{N} F_X(x \mid A_i) P(A_i) \tag{4}$$

Esta ecuación describe a $F_X(x)$ como la *suma ponderada* de funciones de distribución condicionales.

[1] Una partición es exhaustiva y sus conjuntos son mutuamente excluyentes.

En la manufactura automatizada de chips de memoria de computadoras, la compañía *Evil Corp.* produce y vende un chip defectuoso por cada cinco chips buenos. Los chips defectuosos (CD) tienen un tiempo de fallo X que obedece la CDF

$$F_X(x \mid CD) = (1 - e^{-x/2})u(x) \qquad (x \text{ en meses})$$

mientras que el tiempo de fallo de los chips buenos (CB) sigue la función de distribución de probabilidad acumulativa

$$F_X(x \mid CB) = (1 - e^{-x/10})u(x) \qquad (x \text{ en meses})$$

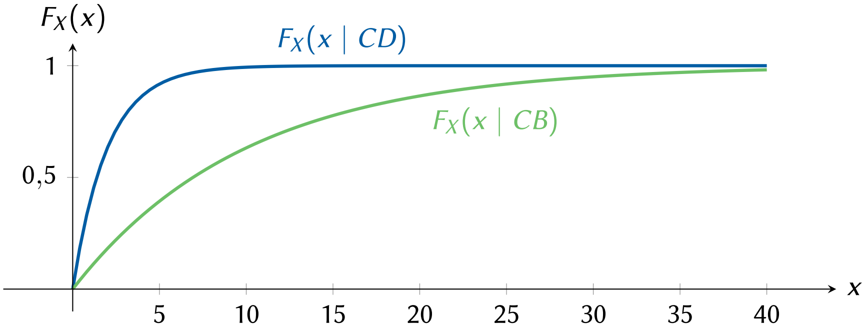


Figura: Función acumulativa de X, tiempo de fallo, que demuestra que cuando el chip es defectuoso, $F_X(x \mid CD)$, prácticamente todos han fallado antes de 10 meses, mientras que cuando está bueno, la probabilidad casi segura de que falle es hasta la semana 40, $F_X(40 \mid CB) \approx 1$.

Visualmente, los chips malos son irreconocibles de entre los buenos. Un chip es comprado. ¿Cuál es la probabilidad de que el chip fallará antes de seis meses de uso?

La distribución de probabilidad *incondicional* para el chip es

$$F_X(x) = F_X(x \mid CB)P(CB) + F_X(x \mid CD)P(CD)$$

donde $P(CB)$ y $P(CD)$ son las probabilidades de seleccionar un chip bueno y uno malo, respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} F_X(6) &= \left(1 - e^{-0{,}6}\right)\frac{5}{6} + \left(1 - e^{-3}\right)\frac{1}{6} \\ &= 0{,}158 + 0{,}376 = 0{,}534 \end{aligned}$$

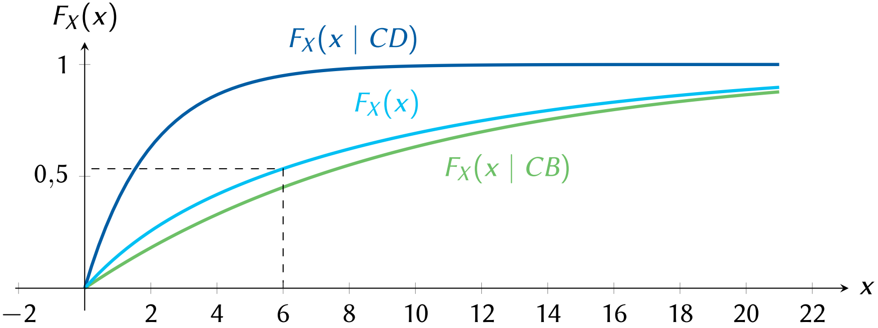


Figura: Función acumulativa de X, $F_X(x)$ junto al caso de chips defectuosos, $F_X(x \mid CD)$, y de chips buenos, $F_X(x \mid CB)$. Como hay más chips buenos que defectuosos, la función acumulativa total se acerca más a la de los chips buenos.

Función de densidad condicional, $f_X(x \mid B)$

La función de densidad condicional es una nueva función de densidad, de propiedades idénticas, que asume la existencia de un evento condicionante. En la práctica, al igual que la función acumulativa, puede servir para modelar los distintos escenarios ante diferentes cursos de acción (decisiones, sucesos, otros eventos aleatorios, etc.).

De manera similar a la función de densidad ordinaria (o incondicional),

$$f_X(x \mid B) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x \mid B) \tag{5}$$

Si $F_X(x \mid B)$ contiene discontinuidades tipo escalón, como cuando X es una variable aleatoria discreta o mixta, habrá funciones impulso en $f_X(x \mid B)$ a causa de las derivadas en las discontinuidades.

Todas las propiedades de las funciones de densidad ordinarias se aplican a $f_X(x \mid B)$:

1. Siempre positivo:

$$f_X(x \mid B) \geq 0$$

2. El área bajo la curva es unitaria:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x \mid B)\,\mathrm{d}x = 1$$

3. Probabilidad en un intervalo:

$$P\{x_1 < X \leq x_2 \mid B\} = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x \mid B)\,\mathrm{d}x$$

4. Función acumulativa a partir de función de densidad:

$$F_X(x \mid B) = \int_{-\infty}^{x} f_X(v \mid B)\,\mathrm{d}v$$

Sea H una variable aleatoria que representa la hora a la que llega el primer cliente a un comercio particular. Su distribución cambia según sea el día D de la semana. La función $f_H(h \mid D)$ es una distribución normal con los siguientes parámetros:

$$f_H(h \mid D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(h-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \text{con} \begin{cases} \mu = 8, \sigma^2 = 4 & \text{si } D = \text{días laborales} \\ \mu = 12, \sigma^2 = 4 & \text{si } D = \text{fines de semana} \\ \mu = 16, \sigma^2 = 4 & \text{si } D = \text{feriados} \end{cases}$$

Ejemplo del primer cliente de una tienda II