Funciones que dan momentos

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

7

Tema I

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

A partir de una nueva función es posible generalizar la obtención de los momentos ordinarios de una variable aleatoria. Esta función es única para cada VA.
Hay dos tipos de estas funciones: la función generadora de momentos (MGF) y la función característica (CF), que se obtienen con la ayuda de dos personajes conocidos…

Función generadora de momentos, $M_X(\nu)$

Función generadora de momentos de una VA X

Está definida por

$$\begin{aligned} M_X(\nu) &= E\left[e^{\nu X}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{\nu x}\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{1}$$

donde ν es un número real con $-\infty < \nu < \infty$. Si se sustituye ν por s entonces esta función sería la **transformada de Laplace** con signo cambiado de s.

Relación de los momentos con $M_X(\nu)$

El n-ésimo momento ordinario de la variable aleatoria X se obtiene a partir de la n-ésima derivada de $M_X(\nu)$ con respecto a ν, evaluada en $\nu = 0$:

$$m_n = \left. \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\nu^n} M_X(\nu) \right|_{\nu=0} \tag{2}$$

¿Por qué es una “función generadora de momentos”? I

Para comprender por qué esta es una “función generadora de momentos”, será posible expandir la función $e^{\nu X}$, de la siguiente forma:

$$
\begin{aligned}
M_X(\nu) &= E\left[e^{\nu X}\right] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} [e^{\nu x}] f_X(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \frac{\nu x}{1!} + \frac{\nu^2 x^2}{2!} + \frac{\nu^3 x^3}{3!} + \cdots\right] f_X(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} 1 f_X(x)\, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu x}{1!} f_X(x)\, \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu^2 x^2}{2!} f_X(x)\, \mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\nu^3 x^3}{3!} f_X(x)\, \mathrm{d}x + \cdots
\end{aligned} \tag{3}
$$

Y replanteando ahora, en términos del valor esperado,

$$\begin{aligned} M_X(\nu) &= E\left[1 + \frac{\nu X}{1!} + \frac{\nu^2 X^2}{2!} + \frac{\nu^3 X^3}{3!} + \cdots\right] \\ &= E[1] + \frac{\nu}{1!}E[X] + \frac{\nu^2}{2!}E\left[X^2\right] + \frac{\nu^3}{3!}E\left[X^3\right] + \cdots \end{aligned} \tag{4}$$

Es claro que haciendo la n-ésima derivada con respecto a ν y evaluando en $\nu = 0$, se obtiene, por ejemplo,

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\nu^2}\left\{1 + \frac{\nu}{1!}E[X] + \frac{\nu^2}{2!}E\left[X^2\right] + \frac{\nu^3}{3!}E\left[X^3\right] + \cdots\right\}_{\nu=0} \\ &= \left\{0 + 0 + E\left[X^2\right] + \nu E\left[X^3\right] + \cdots\right\}_{\nu=0} = E\left[X^2\right] \end{aligned}$$

el segundo momento ordinario.

Función característica, $\Phi_X(\omega)$

Función característica de una variable aleatoria X

Está definida por

$$\Phi_X(\omega) = E\left[e^{j\omega X}\right] \tag{5}$$

donde $j = \sqrt{-1}$. Esta es una función del número real $-\infty < \omega < \infty$ y es la **transformada de Fourier** (con el signo de ω cambiado) de $f_X(x)$:

$$\Phi_X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\omega x}\, \mathrm{d}x \tag{6}$$

Este detalle de la función característica permite usar las tablas de la transformada de Fourier así como la teoría respectiva.

Por otro lado, si $\Phi_X(\omega)$ es conocida, $f_X(x)$ puede calcularse de la transformada inversa de Fourier (con el signo de x cambiado)

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_X(\omega)e^{-j\omega x}\,\mathrm{d}\omega \tag{7}$$

Con la derivación de (6) n veces con respecto a ω y con $\omega = 0$ en la derivada, el n-ésimo momento ordinario de X está dado por

$$\boxed{m_n = (-j)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n}\Phi_X(\omega)\bigg|_{\omega=0}} \tag{8}$$

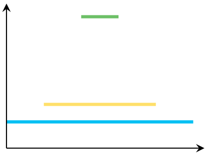
La magnitud máxima de una función característica es uno y ocurre en $\omega = 0$; es decir,

$$|\Phi_X(\omega)| \leq \Phi_X(0) = 1 \tag{9}$$

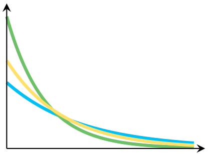
Diferencias entre función característica (CF) y función generadora de momentos (MGF)

- ¡Pocas!
- La principal desventaja de la función generadora de momentos es que puede no existir para todas las variables aleatorias y todos los valores de ν. No obstante, si $M_X(\nu)$ existe para todos los valores de ν en un vecindario de $\nu = 0$, los momentos están dados por la ecuación (2).
- Una ventaja de usar $\Phi_X(\omega)$ para hallar momentos es que $\Phi_X(\omega)$ existe siempre, de modo que los momentos pueden encontrarse si $\Phi_X(\omega)$ es conocida, siempre que sus momentos y derivadas existan.

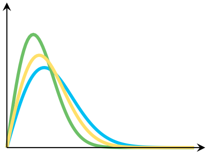
La **MGF** (*Moment Generating Function*, función generadora de momentos) y la **CF** (*Characteristic Function*, función característica) son únicas para cada distribución y representan **una descripción completa de la VA**, tanto como lo son la **CDF** (*Cumulative Distribution Function*, función de distribución acumulativa) y la **PDF** (*Probability Density Function*, función de densidad probabilística).



Uniforme



Exponencial



Rayleigh

	Uniforme	Exponencial	Rayleigh
PDF	$\dfrac{1}{b-a}$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\dfrac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/\left(2\sigma^2\right)}$
MGF	$\begin{cases} \frac{e^{\nu b}-e^{\nu a}}{\nu(b-a)} & \text{para } \nu \neq 0 \\ 1 & \text{para } \nu = 0 \end{cases}$	$\frac{\lambda}{\lambda-\nu},\ \nu < \lambda$	$1 + \sigma\nu e^{\sigma^2\nu^2/2} \dots$
CF	$\begin{cases} \frac{e^{j\omega b}-e^{j\omega a}}{j\omega(b-a)} & \text{para } \omega \neq 0 \\ 1 & \text{para } \omega = 0 \end{cases}$	$\dfrac{\lambda}{\lambda - j\omega}$	$1 - \sigma\omega e^{-\sigma^2\omega^2/2} \dots$

Ejemplo de determinación de la función característica I

Se define una variable aleatoria discreta Y con la función de densidad probabilística

$$\begin{aligned} f_Y(y) = & P\{X \leq x_1\}\delta(y-1) \\ & + P\{x_1 < X \leq x_2\}\delta(y-2) \\ & + P\{x_2 < X \leq x_3\}\delta(y-3) \\ & + P\{x_3 < X < \infty\}\delta(y-4) \end{aligned}$$

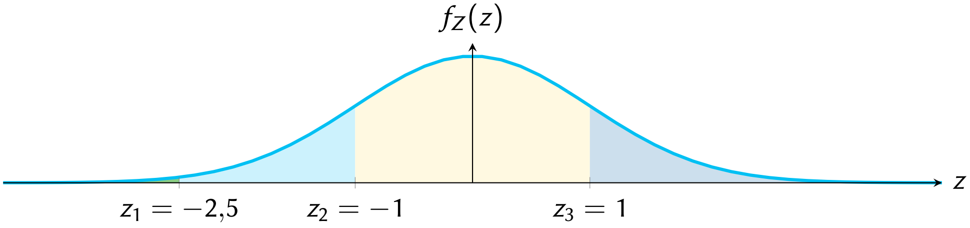
donde X es una variable aleatoria gaussiana de media 50 y desviación estándar $\sigma = 10$, con $x_1 = 25$; $x_2 = 40$ y $x_3 = 60$.

1. Graficar $f_Y(y)$ utilizando los valores de probabilidades.
2. Calcular la función característica de la VA Y.
3. Calcular $E[Y^2]$ y la varianza.

Parte 1: *Graficar $f_Y(y)$ utilizando los valores correspondientes de probabilidades.*

Para darle valores a la función de densidad $f_Y(y)$ es necesario normalizar Z y calcular (con tabla o programa de cómputo):

$$Z = \frac{X - 50}{10}$$



- $P\{X \leq 25\} = F_X(25) = F_Z(-2{,}50) = 1 - F_Z(2{,}50) = 1 - 0{,}9938 = \mathbf{0{,}0062}$
- $P\{25 < X \leq 40\} = F_X(40) - F_X(25) = F_Z(-1{,}00) - F_Z(-2{,}50) =$
  $(1 - F_Z(1{,}00)) - (1 - F_Z(2{,}50)) = 0{,}1587 - 0{,}0062 = \mathbf{0{,}1525}$
- $P\{40 < X \leq 60\} = F_X(60) - F_X(40) = F_Z(1{,}00) - F_Z(-1{,}00) =$
  $F_Z(1{,}00) - (1 - F_Z(-1{,}00)) = 0{,}8413 - 0{,}1587 = \mathbf{0{,}6826}$
- $P\{60 < X < \infty\} = F_X(\infty) - F_X(60) = 1 - F_Z(1{,}00) = 1 - 0{,}8413 = \mathbf{0{,}1587}$

Observar que $0{,}0062 + 0{,}1525 + 0{,}6826 + 0{,}1587 = 1$. Así entonces, la función de densidad discreta (PMF) de Y se reescribe como:

$$\begin{aligned} f_Y(y) =& 0{,}0062\,\delta(y-1) \\ &+ 0{,}1525\,\delta(y-2) \\ &+ 0{,}6826\,\delta(y-3) \\ &+ 0{,}1587\,\delta(y-4) \end{aligned}$$

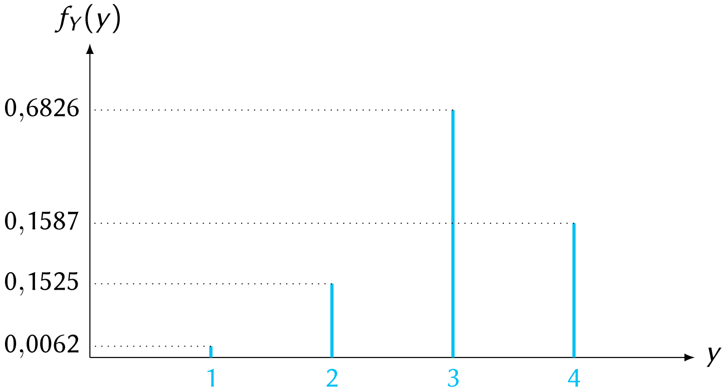


Figura: Función de densidad discreta (PMF) de la VA Y (no está a escala).

Parte 2: *Calcular la función característica de la variable aleatoria Y.*

Por definición, la función característica es:

$$\begin{aligned}\Phi_X(\omega) &= E\left[e^{j\omega X}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) e^{j\omega x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Aplicando a la variable aleatoria Y resulta:

$$\begin{aligned}\Phi_Y(\omega) &= E\left[e^{j\omega Y}\right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y) e^{j\omega y}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [0{,}0062\,\delta(y-1) + 0{,}1525\,\delta(y-2) \\ &\qquad +0{,}6826\,\delta(y-3) + 0{,}1587\,\delta(y-4)]\, e^{j\omega y}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Recordatorio sobre la función impulso

La función impulso o delta de Dirac está definida como:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} +\infty & x = x_0 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

Y su integral es

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\, \mathrm{d}x = 1$$

pero más en general

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f(x)\, \mathrm{d}x = f(x_0)}$$

Ejemplo de determinación de la función característica VII

Continuando, se determina entonces

$$\Phi_Y(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [0{,}0062\ \delta(y-1) + 0{,}1525\ \delta(y-2) \\ +0{,}6826\ \delta(y-3) + 0{,}1587\ \delta(y-4)]\ e^{j\omega y}\ \mathrm{d}y$$

$$\boxed{\Phi_Y(\omega) = 0{,}0062\ e^{j\omega 1} + 0{,}1525\ e^{j\omega 2} + 0{,}6826\ e^{j\omega 3} + 0{,}1587\ e^{j\omega 4}}$$

que es la función característica de Y.

Parte 3: *Calcular $E[Y^2]$.*

Es posible encontrar el segundo momento ordinario $E[Y^2]$ haciendo la segunda derivada de la función característica y evaluando en cero, a partir de

$$m_n = (-j)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\omega^n} \Phi_Y(\omega)\Big|_{\omega=0} \tag{10}$$

Y se procede a evaluar de la forma:

$$
\begin{aligned}
m_2 &= (-j)^2 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2} \Phi_Y(\omega)\Big|_{\omega=0} \\
&= -1 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\omega^2} \big[0{,}0062\ e^{j\omega 1} + 0{,}1525\ e^{j\omega 2} \\
&\qquad +0{,}6826\ e^{j\omega 3} + 0{,}1587\ e^{j\omega 4}\big]_{\omega=0} \\
&= -1 \big[j \cdot j \cdot 0{,}0062\ e^{j\omega 1} + 2j \cdot 2j \cdot 0{,}1525\ e^{j\omega 2} \\
&\qquad +3j \cdot 3j \cdot 0{,}6826\ e^{j\omega 3} \\
&\qquad +4j \cdot 4j \cdot 0{,}1587\ e^{j\omega 4}\big]_{\omega=0} \\
&= -1 \big[(-0{,}0062) e^{j\omega 1} + (-0{,}6100) e^{j\omega 2} \\
&\qquad +(-6{,}1434) e^{j\omega 3} + (-2{,}5392) e^{j\omega 4}\big]_{\omega=0}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{m_2 = 9{,}2988}$$

Si se hiciera el segundo momento ordinario por definición, daría:

$$
\begin{aligned}
E(Y^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 \,[0{,}0062\,\delta(y-1) \\
&\qquad + 0,1525\,\delta(y-2) + 0{,}6826\,\delta(y-3) \\
&\qquad +0,1587\,\delta(y-4)]\;\mathrm{d}y \\
&= 0{,}0062\cdot 1 + 0,1525\cdot 4 \\
&\qquad + 0{,}6826\cdot 9 + 0,1587\cdot 16
\end{aligned}
$$

$$\boxed{E(Y^2) = 9{,}2988}$$

Confirmando el resultado anterior.

Se puede deducir la varianza sabiendo que: $\sigma_Y^2 = E(Y^2) - (E(Y))^2$, donde

$$\begin{aligned}
E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f_Y(y)\, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} y\, [0{,}0062\, \delta(y-1) + \cdots \\
&\qquad + 0{,}1525\, \delta(y-2) + 0{,}6826\, \delta(y-3) \\
&\qquad + 0{,}1587\, \delta(y-4)]\ \mathrm{d}y \\
&= 0{,}0062 \cdot 1 + 0{,}1525 \cdot 2 \\
&\qquad + 0{,}6826 \cdot 3 + 0{,}1587 \cdot 4
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(Y) = 2{,}9938}$$

El resultado $E(Y) = 2{,}9938$ tiene sentido porque es muy cercano a 3, donde está concentrada la mayor probabilidad según $f_Y(y)$. Y así entonces

$$\begin{aligned}\sigma_Y^2 &= E(Y^2) - (E(Y))^2 \\ &= 9{,}2988 - (2{,}9938)^2 \\ \boxed{\sigma_Y^2} & \boxed{= 0{,}3360}\end{aligned}$$

Y la desviación estándar es $\sigma_Y = \sqrt{\sigma_Y^2} = \sqrt{0{,}3360} = 0{,}5796$, que puede interpretarse como una dispersión baja, en función de la gran concentración de valores alrededor de 3.