Transformaciones de una variable aleatoria

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

8

Tema I

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

Transformaciones de una variable aleatoria

Las transformaciones permiten determinar la función de densidad probabilística de una variable aleatoria Y a partir del conocimiento de otra VA X, relacionadas por la **función** $Y = T(X) = g(X)$. Es común en situaciones donde el resultado de un proceso o la salida de un sistema depende de una entrada aleatoria.

Problema a resolver

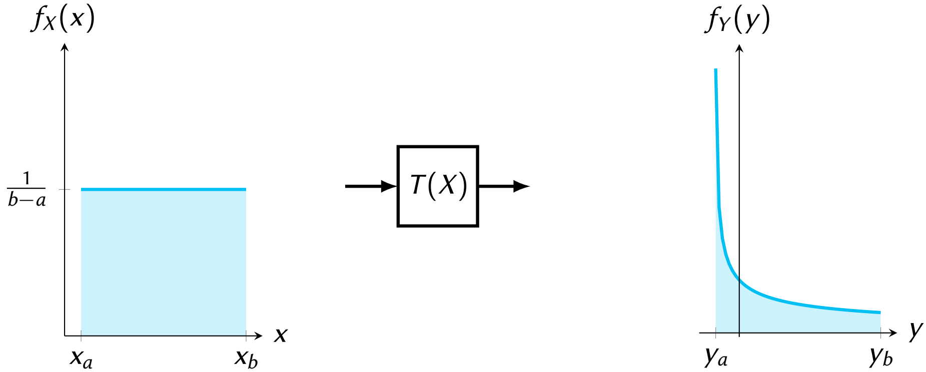
En ocasiones se desea transformar una variable aleatoria X en una nueva variable aleatoria Y mediante una transformación (o función)

$$Y = T(X) \tag{1}$$

Las funciones de densidad $f_X(x)$ o acumulativa $F_X(x)$ son conocidas.

El problema consiste en determinar $F_Y(y)$ y $f_Y(y)$.

Transformaciones de una variable aleatoria II



X (la "entrada") puede ser discreta, continua o mixta.

T (la transformación) puede ser lineal, no lineal, segmentada, monotónica, no monotónica…

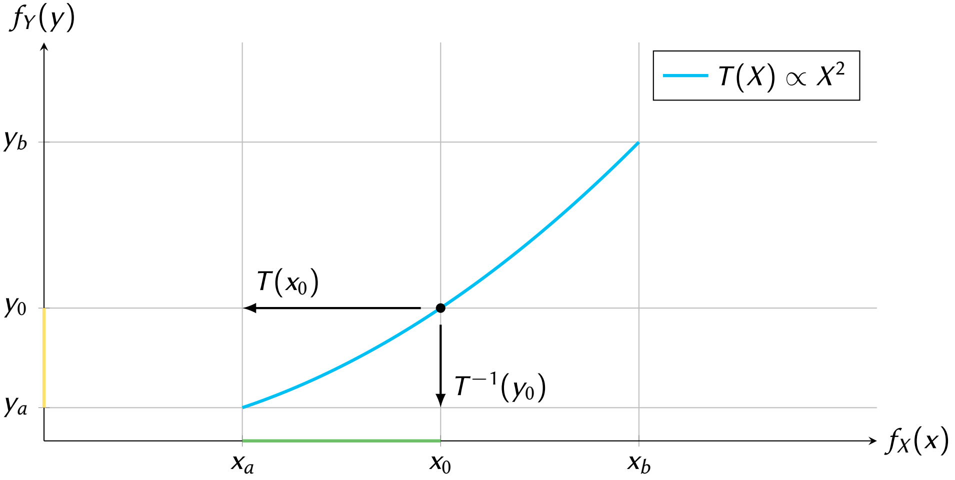
Hay muchas combinaciones pero se considerará tres casos:

(a) X continua y T continua y monotónica

(b) X continua y T continua pero no monotónica

(c) X discreta y T continua

(a) Transformaciones monotónicas de una VA continua



$f_Y(y)$
y_b
y_0
y_a
$T(X) \propto X^2$
$T(x_0)$
$T^{-1}(y_0)$
x_a
x_0
x_b
$f_X(x)$

Una transformación o función T es *monotónicamente creciente* en un intervalo si

$$T(x_1) < T(x_2) \quad \text{para cualquier} \quad x_1 < x_2$$

Transformación creciente

Supóngase que T es continua y diferenciable en todo valor de x para el que $f_X(x) \neq 0$ (es decir, donde X tiene *soporte*). Se cumple que

$$y_0 = T(x_0) \qquad \text{y} \qquad x_0 = T^{-1}(y_0)$$

donde T^{-1} representa el inverso de la transformación T.

Premisa (el método CDF)

La probabilidad del evento $\{Y \leq y_0\}$ debe igualar la probabilidad del evento $\{X \leq x_0\}$ debido a la correspondencia entre X e Y.

Así entonces, debe cumplirse que

$$F_Y(y_0) = P\{Y \leq y_0\} = P\{X \leq x_0\} = F_X(x_0)$$

y mediante la definición de la CDF a partir de la PDF

$$\int_{-\infty}^{y_0} f_Y(y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{x_0 = T^{-1}(y_0)} f_X(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

por lo que resta despejar para $f_Y(y)$, que es la función de interés.

Si $H(x, u)$ es continua en las variables x y u, y además

$$G(u) = \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} H(x, u)\, \mathrm{d}x$$

entonces la derivada de la integral respecto al parámetro u es:

$$\begin{multline} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} G(u) = H\left[\beta(u), u\right] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \beta(u) \\ - H\left[\alpha(u), u\right] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \alpha(u) + \int_{\alpha(u)}^{\beta(u)} \frac{\partial H(x, u)}{\partial u}\, \mathrm{d}x \tag{3} \end{multline}$$

En nuestro escenario, y considerando que el límite inferior de $f_X(x)$ es $T^{-1}(y_a)$ y que es una constante (posiblemente $-\infty$), aplica que

$$
\begin{aligned}
f_Y(y_0) = f_X\left[T^{-1}(y_0), y_0\right] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_0} T^{-1}(y_0) \\
- f_X\left[T^{-1}(y_a), y_0\right] \cancelto{0}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} T^{-1}(y_a)} + \int_{T^{-1}(y_a)}^{T^{-1}(y_0)} \cancelto{0}{\frac{\partial f_X(x)}{\partial y}} \,\mathrm{d}x \qquad (4)
\end{aligned}
$$

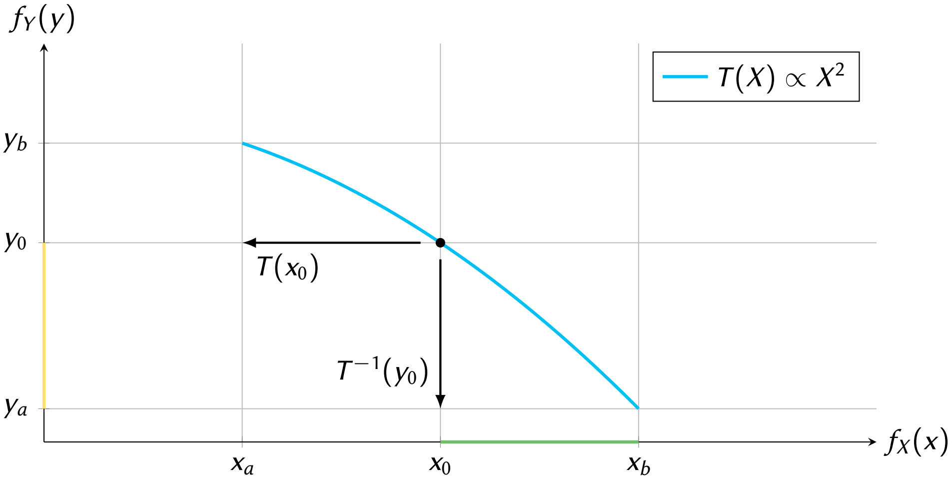
Con base en la regla de Leibniz, evaluada anteriormente se obtiene

$$f_Y(y_0) = f_X\left[T^{-1}(y_0)\right] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_0} T^{-1}(y_0) \tag{5}$$

pero como la ecuación anterior aplica para cualquier y_0, se puede eliminar el subíndice y reescribir

$$\boxed{f_Y(y) = f_X\left[T^{-1}(y)\right] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} T^{-1}(y)} \tag{6}$$

que es la función de densidad buscada de Y, en términos de la transformación (inversa) aplicada a X, para T monotónicamente creciente.


$f_Y(y)$
$T(X) \propto X^2$
y_b
y_0
y_a
$T(x_0)$
$T^{-1}(y_0)$
$f_X(x)$
x_a
x_0
x_b

Transformación decreciente

Una transformación o función T es *monotónicamente decreciente* en un intervalo si

$$T(x_1) > T(x_2) \quad \text{para cualquier} \quad x_1 < x_2$$

Si se considera el caso de la transformación decreciente, se escribe:

$$F_Y(y_0) = P\{Y \leq y_0\} = P\{X \geq x_0\} = 1 - F_X(x_0)$$

Siguiendo el mismo razonamiento usado para obtener la ecuación (6), se obtendrá

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= -f_X\left(T^{-1}(y)\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}T^{-1}(y) \\ &= -f_X(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}x \end{aligned} \tag{7}$$

Dado que la pendiente de $T^{-1}(y)$ es negativa pues la función es decreciente, se concluye que para cualquier tipo de transformación monotónica:

Teorema de transformación monotónica

$$f_Y(y) = f_X\left[T^{-1}(y)\right]\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}T^{-1}(y)\right| \tag{8}$$

Recordatorio: Es importante notar que la "monotonicidad" se evalúa en la función $g(X)$ (la transformación $T(X)$) y no tiene que ver con la función de densidad $f_X(x)$ (error de análisis común).

Notación alternativa del teorema de transformación

En ocasiones se utiliza la notación $Y = g(X)$ para la transformación, y $X = h(Y)$ como la transformación inversa. El teorema se enuncia entonces como

$$f_Y(y) = f_X\left[h(y)\right]\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}h(y)\right| \tag{9}$$

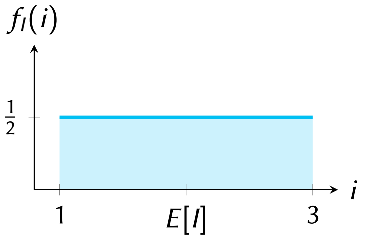
Sea I una VA que denota la corriente en un resistor R de valor 1 Ω. I tiene una distribución uniforme en el intervalo de 1 a 3 A, es decir:

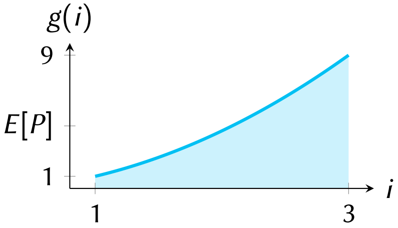
$$f_I(i) = \begin{cases} 1/2 & 1 < i < 3 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

¿Cuál es el promedio de la corriente I? ¿Cuál es el promedio de la potencia disipada en R, $P = g(I) = I^2 R$?

$$
\begin{aligned}
E[I] &= \int_{-\infty}^{\infty} i\, f_I(i)\, \mathrm{d}i \\
&= \int_{1}^{3} i\, \frac{1}{2}\, \mathrm{d}i \\
&= 2\,\mathrm{A}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E[P] &= \int_{-\infty}^{\infty} g(i)\, f_I(i)\, \mathrm{d}i \\
&= \int_{1}^{3} i^2(1)\, \frac{1}{2}\, \mathrm{d}i \\
&= 13/3 \approx \boxed{4.33\,\mathrm{W}}
\end{aligned}
$$





Es posible obtener $E[P]$ desde $f_P(p)$ por medio de la transformación $g(I) = P = I^2 R$, con $h(P) = I = \sqrt{P/R}$, y con los límites $1 < i < 3$ y $1 < p < 9$. Aplicando el teorema:

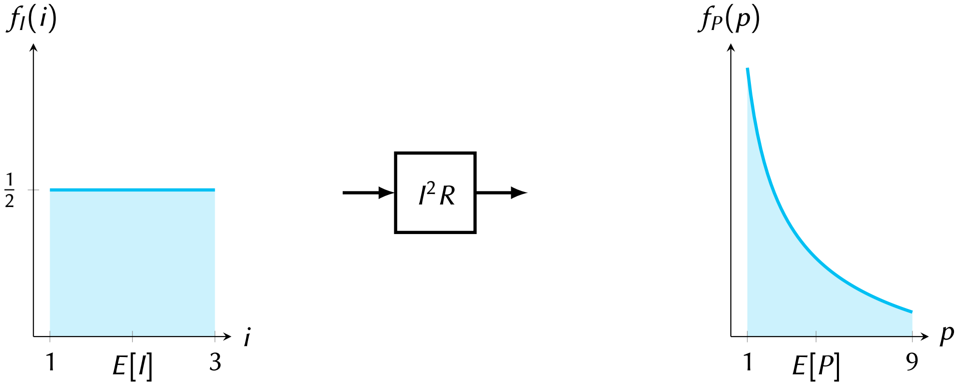
$$\begin{aligned} f_P(p) &= f_I\left[h(p)\right]\left|h'(p)\right| \\ &= f_I\left[\sqrt{p/R}\right]\left|(p/R)^{-1/2}/2\right| \end{aligned}$$

$$\boxed{f_P(p) = \frac{1}{4\sqrt{p}} \quad \text{para} \quad 1 < p < 9}$$

Y su promedio es

$$\begin{aligned} E[P] &= \int_{-\infty}^{\infty} p\, f_P(p)\, \mathrm{d}p = \int_1^9 p\, \frac{1}{4\sqrt{p}}\, \mathrm{d}p = \frac{1}{4}\int_1^9 \sqrt{p}\, \mathrm{d}p \\ &= \frac{1}{4}\left.\frac{2p^{3/2}}{3}\right|_1^9 = \frac{13}{3} \approx \boxed{4.33\,\mathrm{W}} \end{aligned}$$

Ejemplo de la disipación de potencia en un resistor IV

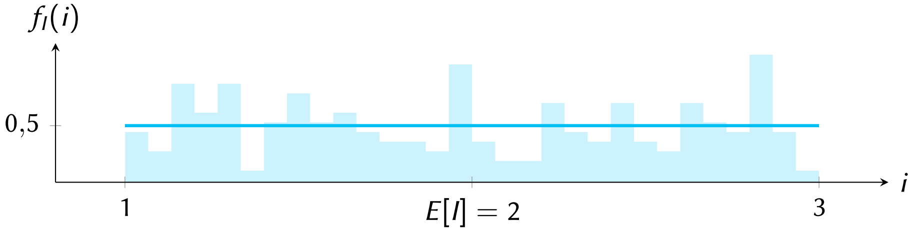


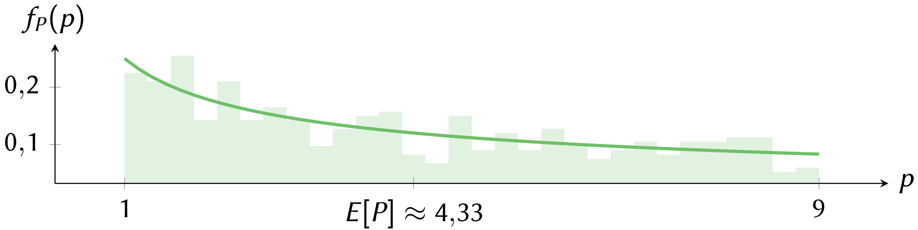
```python
import numpy as np
from scipy import stats

# Inicialización de vectores
N = 500
Irvs = [0]*N
P = [0]*N
```

```python
# Distribución de la corriente
I = stats.uniform(1,2)

# Simulación
for i in range(N):
    Irvs[i] = I.rvs()
    P[i] = Irvs[i]**2
```


$f_I(i)$
0,5
i
1
$E[I] = 2$
3


$f_P(p)$
0,2
0,1
p
1
$E[P] \approx 4{,}33$
9

Sea $X \sim \mathrm{unif}(0, 1)$ (es decir, $f_X(x) = 1$ en $0 \leq x \leq 1$). Se define una nueva variable $Y = 2\sqrt{X}$. Encuentre $f_Y(y)$.

La función $g(X) = 2\sqrt{X}$ es monotónica en $[0, 1]$ y tiene una inversa $h(y) = y^2/4$.
Se aplica el teorema:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = f_X(h(y)) \left| h'(y) \right| &= (1) \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} y^2/4 \right| \\
&= \frac{2y}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{f_Y(y) = \frac{y}{2} \quad \text{en} \quad y \in [0, 2]}
$$

La variación en cierta fuente de corriente eléctrica X (en miliampere) puede ser modelada por el PDF

$$f_X(x) = \begin{cases} 1{,}25 - 0{,}25x & 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

Si esta corriente pasa por un resistor de $220\,\Omega$, la potencia disipada es dada por la expresión $Y = 220X^2$. ¿Cuál es la función de densidad de Y?

La función $y = g(x) = 220x^2$ es monotónicamente creciente en el rango de X, $[2, 4]$, y tiene una función inversa $x = h(y) = g^{-1}(y) = \sqrt{y/220}$.

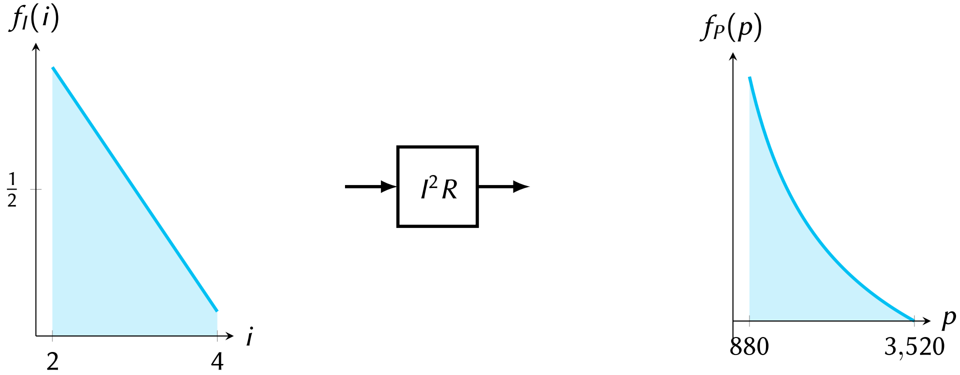
Aplicando el teorema de transformación, entonces,

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= f_X(h(y))|h'(y)| \\ &= f_X\left(\sqrt{y/220}\right)\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sqrt{y/220}\right| \\ &= \left(1{,}25 - 0{,}25\sqrt{y/220}\right)\frac{1}{2\sqrt{220y}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{220y}} - \frac{1}{1760} \end{aligned}$$

Y por tanto,

$$\boxed{\mathrm{f}_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{220y}} - \frac{1}{1760} & 880 \leq y \leq 3520 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}}$$

Otro ejemplo de la disipación de potencia en un resistor III



Hay una variable aleatoria T distribuida uniformemente en el intervalo $[1, 7]$. Sobre ella se aplica una transformación

$$U = T^2 - T - 6$$

1. Encontrar $f_U(u)$, la función de densidad probabilística de la VA U.
2. Calcular $P\{-4 < U \leq 14\}$.

Parte 1: *Encontrar $f_U(u)$, la función de densidad probabilística de la variable aleatoria U.*

La variable aleatoria T dada es

$$f_T(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} & 1 \leq t \leq 7 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$

La transformación $U = g(T)$ es monotónicamente creciente en el intervalo $[1, 7]$, por tanto es posible utilizar la fórmula

$$f_U(u) = f_T(h(u)) \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} h(u) \right|$$

donde $h(u)$ es la función inversa.
Se obtiene $h(u)$ de la forma

$$\begin{aligned} u &= t^2 - t - 6 \\ 0 &= t^2 - t - (u + 6) \\ t &= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-u - 6)}}{2} \qquad \text{(fórmula general)} \\ &= 1/2 \left(1 \pm \sqrt{4u + 25}\right) \end{aligned}$$

Se elige la solución positiva y queda

$$h(u) = 1/2\left(1 + \sqrt{4u + 25}\right)$$

Ahora, para derivar la función inversa, se utiliza regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}h(u) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left[1/2\left(1 + \sqrt{4u + 25}\right)\right] \\ &= 1/2\frac{4}{2\sqrt{4u + 25}} = \frac{1}{\sqrt{4u + 25}}\end{aligned}$$

Y entonces, se evalúa

$$f_U(u) = f_T(h(u)) \left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} h(u) \right| = \frac{1}{6} \frac{1}{\sqrt{4u + 25}}$$

y evaluando también los límites de T en la transformación $g(T)$, la función de densidad buscada es

$$\boxed{f_U(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{6\sqrt{4u+25}} & -6 \leq u \leq 36 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}}$$

Parte 2: *Calcular* $P\{-4 < U \leq 14\}$.

La probabilidad $P\{-4 < U \leq 14\}$ requiere la integración de $f_U(u)$ en ese intervalo. Esta integral puede ser más o menos difícil de evaluar, pero es posible calcularla numéricamente con las calculadoras científicas comunes, resultando:

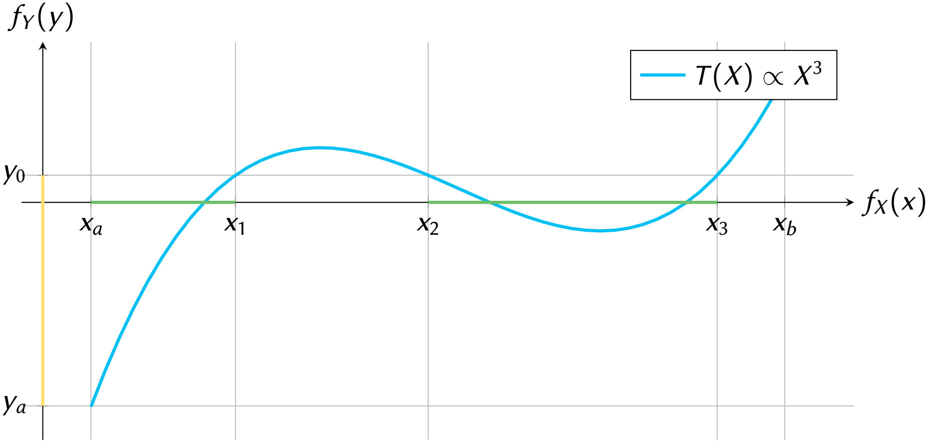
$$P\{-4 < U \leq 14\} = \int_{-4}^{14} \frac{1}{6\sqrt{4u+25}}\, \mathrm{d}u = \boxed{0{,}5}$$

En todo caso, la integral (a partir de una tabla de integrales) es

$$\int \frac{1}{6\sqrt{4u+25}}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{12}\sqrt{4u+25}$$

y la evaluación en $[-4, 14]$ da en efecto igual a 0,5.

(b) Transformaciones no monotónicas de una VA continua



$f_Y(y)$
$T(X) \propto X^3$
y_0
y_a
$f_X(x)$
x_a
x_1
x_2
x_3
x_b

En general, puede ser que haya más de un intervalo de valores de X que correspondan al evento $\{Y \leq y_0\}$. Por ejemplo, puede darse el caso que, para un dado y_0, el evento $\{Y \leq y_0\}$ corresponde al evento $\{X \leq x_1, x_2 \leq X < x_3\}$.

Premisa

La probabilidad del evento $\{Y \leq y_0\}$ iguala la probabilidad del evento $\{\text{valores de } x \text{ que dan } Y \leq y_0\}$ que se escribirá como $\{x : Y \leq y_0\}$. En otras palabras,

$$\begin{aligned} F_Y(y_0) &= P\{Y \leq y_0\} \\ &= P\{x : Y \leq y_0\} = \int_{\{x:Y\leq y_0\}} f_X(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Se puede derivar formalmente el resultado anterior para obtener la densidad de Y

$$f_Y(y_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y_0} \int_{\{x: Y \leq y_0\}} f_X(x)\, \mathrm{d}x \tag{10}$$

Y la función de densidad está dada por (sin demostración)

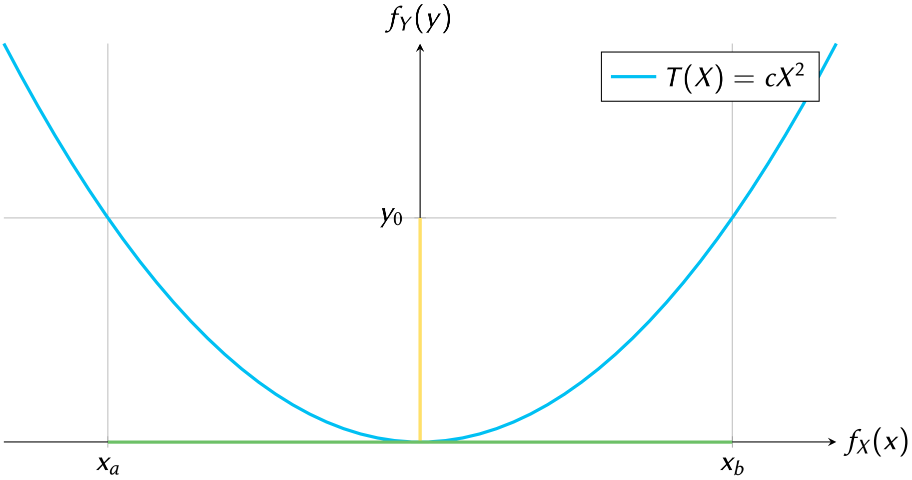
Teorema de transformación no monotónica

$$f_Y(y) = \sum_n \frac{f_X(x_n)}{\left| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} T(x)\big|_{x=x_n} \right|} \tag{11}$$

donde la suma incluye las raíces x_n, $n = 1, 2, \ldots,$ que son las soluciones reales de la ecuación $y = T(x)$. Si $y = T(x)$ no tiene raíces reales para un valor dado de y, entonces $f_Y(y) = 0$.

Hallar $f_Y(y)$ para la transformación de ley cuadrada $Y = T(X) = cX^2$, donde $c > 0 \in \mathbb{R}$.

No hay más información sobre X pero se asumirá que tiene soporte en todo $\mathbb{R}$ o que al menos tiene valores positivos y negativos. Por el tipo de transformación $Y = cX^2$, el dominio de Y es $y > 0$.


$f_Y(y)$
$T(X) = cX^2$
y_0
$f_X(x)$
x_a
x_b

Para la solución se utilizará dos métodos.

Método 1: *El método CDF* — El evento $\{Y \leq y\}$ ocurre cuando $\{-\sqrt{y/c} \leq x \leq \sqrt{y/c}\} = \{x : Y \leq y\}$, con lo que

$$F_Y(y) = \int_{-\sqrt{y/c}}^{\sqrt{y/c}} f_X(x)\,\mathrm{d}x$$

$$f_Y(y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} \int_{-\sqrt{y/c}}^{\sqrt{y/c}} f_X(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{CDF} \Rightarrow \text{PDF}$$

Se aplica ahora la regla de Leibniz:

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) = f_X(\sqrt{y/c}) &\left(\frac{1}{\sqrt{c}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right) \\
&- f_X(-\sqrt{y/c})\left(-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{y}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{f_Y(y) = \frac{f_X(\sqrt{y/c}) + f_X(-\sqrt{y/c})}{2\sqrt{yc}} \quad \text{para} \quad y > 0}
$$

Método 2: *Por el teorema de transformación* — Si se despeja X de la ecuación $Y = cX^2$ se encuentra:

$$Y/c = X^2$$
$$X = \pm\sqrt{Y/c}$$

de modo que las soluciones son $x_1 = -\sqrt{y/c}$, y $x_2 = \sqrt{y/c}$. Además, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T(x) = 2xc$,

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T(x)\right|_{x=x_1} = 2c\left[-\sqrt{\frac{y}{c}}\right] = -2\sqrt{yc}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T(x)\right|_{x=x_2} = 2c\left[\sqrt{\frac{y}{c}}\right] = 2\sqrt{yc}$$

Finalmente, se evalúa en la ecuación (11)

$$f_Y(y) = \sum_n \frac{f_X(x_n)}{\left|\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,T(x)\big|_{x=x_n}\right|}$$

y se obtiene

$$f_Y(y) = \frac{f_X(-\sqrt{y/c})}{|-2\sqrt{cy}|} + \frac{f_X(\sqrt{y/c})}{|2\sqrt{yc}|}$$

$$\boxed{f_Y(y) = \frac{f_X(-\sqrt{y/c}) + f_X(\sqrt{y/c})}{2\sqrt{yc}} \quad \text{para} \quad y \geq 0}$$

confirmando el resultado.

(c) Transformaciones de una VA discreta

Transformación de una variable aleatoria discreta

Si X es una variable aleatoria discreta mientras que $Y = T(X)$ es una transformación continua, el problema de encontrar la nueva función de densidad es más simple de resolver. Se puede escribir que,

$$f_X(x) = \sum_n P(x_n)\delta(x - x_n) \tag{12}$$

$$F_X(x) = \sum_n P(x_n)u(x - x_n) \tag{13}$$

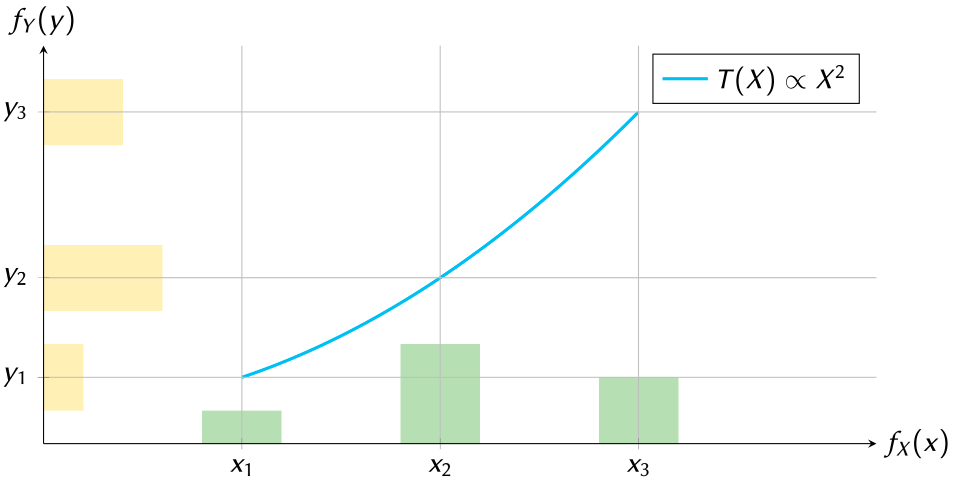
donde la suma se aplica sobre todos los valores posibles x_n, $n = 1, 2, \dots,$ de X.

Si la transformación es monótona, hay una correspondencia una-a-una entre X y Y de modo que un conjunto $\{y_n\}$ corresponde al conjunto $\{x_n\}$ mediante la ecuación $y_n = T(x_n)$. La probabilidad $P(y_n)$ iguala $P(x_n)$. Así,

$$f_Y(y) = \sum_n P(y_n)\delta(y - y_n) = \sum_n P(x_n)\delta(y - T(x_n)) \tag{14}$$

$$F_Y(y) = \sum_n P(y_n)u(y - y_n) = \sum_n P(x_n)u(y - T(x_n)) \tag{15}$$

donde $y_n = T(x_n)$, $P(y_n) = P(x_n)$.



$f_Y(y)$
y_3
y_2
y_1
$T(X) \propto X^2$
x_1
x_2
x_3
$f_X(x)$

Si T no es monótona, el procedimiento anterior mantiene su validez con la excepción de que existe la posibilidad de que más de un valor x_n corresponde a un valor y_n. En este caso, $P(y_n)$ igualará la suma de las probabilidades de los diversos x_n para los que $y_n = T(x_n)$.

- **Functions of a Random Variable Example Worked Out at a Whiteboard**
  Rose-Hulman Online, https://youtu.be/H00rv6jVwrI
- **Another Function of a Random Variable Example Worked out at a Whiteboard**
  Rose-Hulman Online, https://youtu.be/P1d0DbOsRcw