Variables aleatorias múltiples

Definición y funciones y sus propiedades

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

9

Tema III

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

En muchos experimentos, las observaciones no son una sola cantidad, sino un grupo o familia de cantidades. Por tanto, se construyen **vectores** de variables aleatorias, llamados *vectores aleatorios*.

Por ejemplo, para el estudio de una población se pueden obtener los datos de la edad, el peso, la estatura y otros tantos parámetros. Si todos ellos conforman una métrica **X**, se puede expresar de la forma vectorial $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

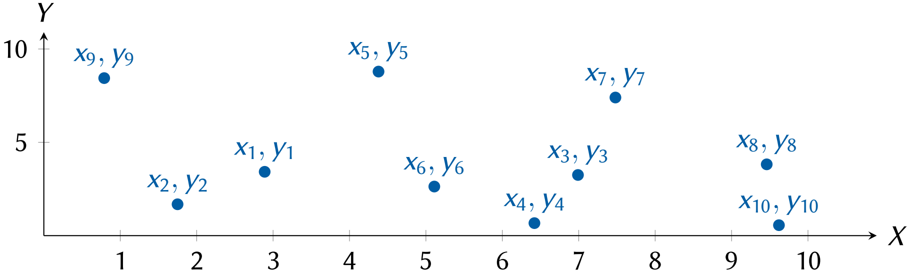
Variables aleatorias múltiples

- Las **variables aleatorias múltiples** pasan de un espacio de probabilidades $(S \to \mathbb{R}^1, P)$, llamado "ordinario" o "marginal", a otro $(S \to \mathbb{R}^n, P)$, llamado también "conjunto" o "multidimensional". Por ejemplo:

X	P
6.13	0.047
4.23	0.099
7.81	0.343
9.71	0.038
3.72	0.134
1.89	0.339
Total	1.000

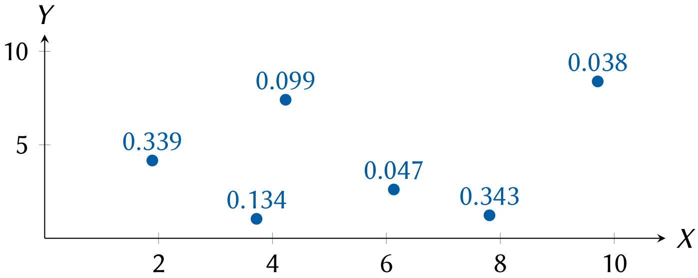
X	Y	Z	P
6.13	2.61	0.02	0.216
4.23	7.41	3.64	0.160
7.81	1.23	4.23	0.028
9.71	8.39	9.93	0.191
3.72	1.04	7.86	0.198
1.89	4.16	2.97	0.207
		Total	1.000

- Supóngase que dos variables aleatorias X y Y están definidas sobre un espacio S de muestras. Cualquier par ordenado de números (x, y) puede considerarse un punto aleatorio en el plano XY y es un valor específico de un **vector aleatorio** $[X, Y]$.

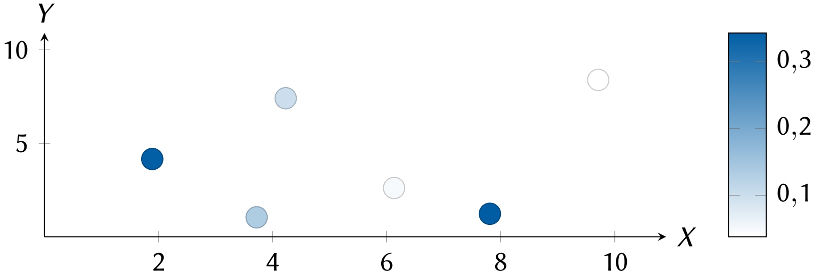


- Cuando hay un número discreto de pares ordenados, cada uno tiene asociada una probabilidad de ocurrencia no nula $P(x_m, y_n) = p_{m,n}$. Es necesario que

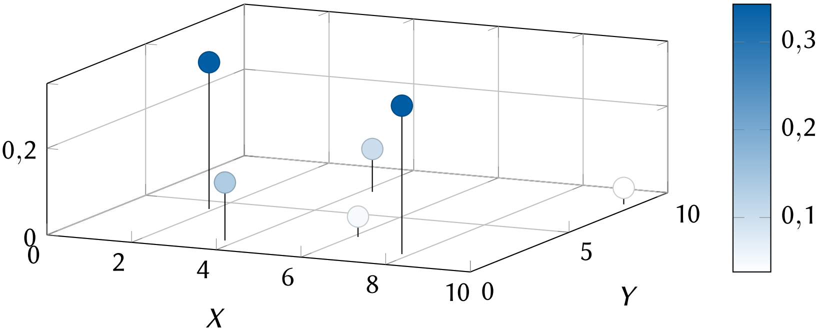
$$\sum_{m}^{M} \sum_{n}^{N} p_{m,n} = 1$$



- Una representación posible para la magnitud de la probabilidad es la de un gráfico bidimensional con un código de colores según la escala mostrada.

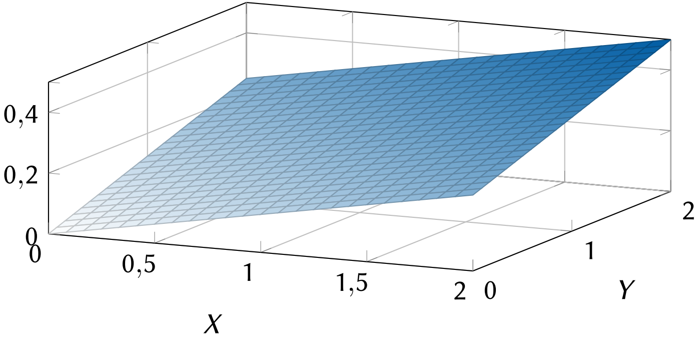


- Otra representación usual es la de una gráfica tridimensional con el eje z siendo la probabilidad para todo (x_i, y_i). La mostrada es una función de probabilidad de *masa* conjunta, donde el marcador además tiene un color asociado con su magnitud.



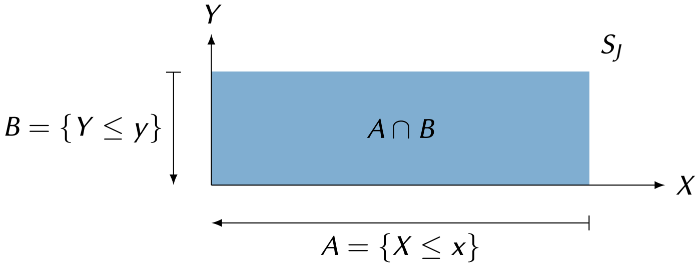
- Cuando X y Y son continuos, existe una función de densidad de probabilidad $f_{X,Y}(x, y)$ definida para todo x y y, y la gráfica tridimensional es una superficie.

$$f_{X,Y}(x, y) = 1/8\,(x + y) \qquad 0 \leq x, y \leq 2$$



Función acumulativa conjunta

Similar al caso de una variable aleatoria ordinaria, defínanse los eventos A y B como



El evento $A \cap B$ definido en S corresponde al evento conjunto $\{X \leq x \;\wedge\; Y \leq y\}$ o $\{X \leq x,\, Y \leq y\}$, definido en S_J, donde S_J es el espacio de muestras en xy, o también *espacio producto bidimensional.*

Función de probabilidad acumulativa conjunta continua

La probabilidad del evento conjunto $\{X \leq x, Y \leq y\}$ es una **función acumulativa conjunta** denotada por

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) \tag{1}$$

donde $P(X \leq x, Y \leq y) = P(A \cap B)$.

Función de probabilidad acumulativa conjunta discreta

La función acumulativa conjunta para dos variables aleatorias discretas X (con N posibles valores x_n) y Y (con M posibles valores y_m), es

$$F_{X,Y}(x, y) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} P(x_n, y_m) u(x - x_n) u(y - y_m) \tag{2}$$

donde $P(x_n, y_m)$ es la probabilidad del evento conjunto $\{X = x_n, Y = y_m\}$ y $u(\cdot)$ es la función escalón unitario.

Generalización de la función de probabilidad acumulativa para N VA

Para N variables aleatorias X_n, $n = 1, 2, \ldots, N$ la generalización es directa:

$$F_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = P\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_N \leq x_N\} \tag{3}$$

Propiedades de la función acumulativa conjunta

1. La probabilidad de estar por debajo de $-\infty$ es cero

$$F_{X,Y}(-\infty,-\infty)=0 \quad F_{X,Y}(-\infty,y)=0 \quad F_{X,Y}(x,-\infty)=0 \tag{4}$$

2. La probabilidad de estar por debajo de $+\infty$ es uno

$$F_{X,Y}(\infty,\infty)=1 \tag{5}$$

3. La función acumulativa conjunta es una probabilidad

$$0 \leq F_{X,Y}(x,y) \leq 1 \tag{6}$$

4. $F_{X,Y}(x,y)$ es una función no decreciente tanto de X como de Y

5. La probabilidad en una región $\mathcal{R} = \{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\}$ es

$$
\begin{aligned}
&P\{x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2\} \\
&\qquad = F_{X,Y}(x_2, y_2) + F_{X,Y}(x_1, y_1) - F_{X,Y}(x_1, y_2) - F_{X,Y}(x_2, y_1) \geqslant 0 \qquad (7)
\end{aligned}
$$

6. Funciones acumulativas marginales
   - 6a Función acumulativa marginal de X

$$F_{X,Y}(x, \infty) = F_X(x) \qquad (8)$$

   - 6b Función acumulativa marginal de Y

$$F_{X,Y}(\infty, y) = F_Y(y) \qquad (9)$$

Nota sobre la propiedad 6

Obsérvese que

$$F_{X,Y}(x,y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = P(A \cap B)$$

Si se hace que $y = \infty$, esto equivale a hacer $B = \{Y \leq y\}$ el evento seguro; es decir, $B = \{Y \leq \infty\} = S$. Además, dado que $A \cap B = A \cap S = A$, entonces se tiene

$$\boxed{F_{X,Y}(x,\infty) = P(A \cap S) = P(A) = P\{X \leq x\} = F_X(x)}$$

Una prueba similar puede establecerse para $F_Y(y)$.

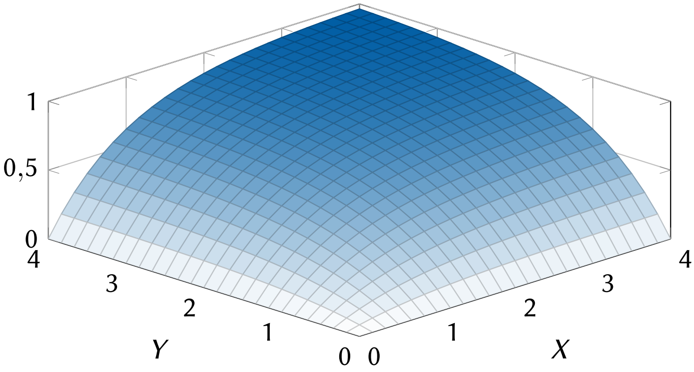
Generalización de las distribuciones marginales

De una función de distribución conjunta N-dimensional se puede obtener una función de distribución marginal K-dimensional, para cualquier grupo escogido de K de las N variables aleatorias, con fijar los valores de las otras $N - K$ variables aleatorias a infinito. Aquí K puede ser cualquier entero $1, 2, 3, \ldots, N - 1$.

Por ejemplo, si existe $F_{W,X,Y,Z}(w, x, y, z)$ y nos interesa la función acumulativa marginal para W y X, hay que hacer:

$$F_{W,X}(w, x) = F_{W,X,Y,Z}(w, x, \infty, \infty)$$

$$F_{X,Y}(x,y) = (1 - e^{-x})(1 - e^{-y})\, u(x)u(y)$$



Función de densidad probabilística conjunta

Función de densidad probabilística conjunta bivariada continua

Para dos variables aleatorias X y Y, la función de densidad probabilística conjunta, $f_{X,Y}(x, y)$, está definida por la segunda derivada de la función de distribución conjunta (dondequiera que esta exista),

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} \tag{10}$$

Función de densidad probabilística conjunta bivariada discreta

La función de densidad conjunta para dos VA discretas está dada por:

$$f_{X,Y}(x, y) = \sum_{n=1}^{N} \sum_{m=1}^{M} P(x_n, y_m)\delta(x - x_n)\delta(y - y_m) \tag{11}$$

Ejemplo de una función de densidad bivariada discreta I

Cuadro: Valores de probabilidad para la combinación de una VA X con otra Y. Por ejemplo, los valores de X podrían representar **intervalos** de la estatura de una población, y Y de su peso.

$P(x_n, y_m)$	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7
x_1	0.00164	0.00572	0.01211	0.01555	0.01211	0.00572	0.00164
x_2	0.00735	0.02564	0.05427	0.06969	0.05427	0.02564	0.00735
x_3	0.01211	0.04227	0.08948	0.11490	0.08948	0.04227	0.01211
x_4	0.00735	0.02564	0.05427	0.06969	0.05427	0.02564	0.00735
x_5	0.00164	0.00572	0.01211	0.01555	0.01211	0.00572	0.00164

$$f_{X,Y}(x,y) = \sum_{n=1}^{5}\sum_{m=1}^{7} P(x_n, y_m)\delta(x - x_n)\delta(y - y_m)$$

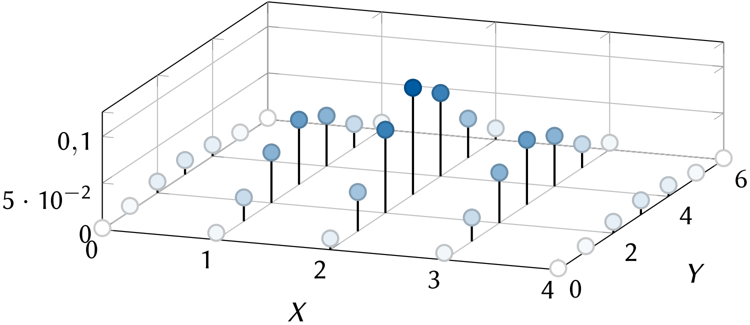


Figura: Este comportamiento es doblemente normal

Cuando N variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_N$ están involucradas, la función de densidad conjunta se convierte en la N-ésima derivada parcial de la función de distribución N-dimensional

$$f_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N) = \frac{\partial^N F_{X_1,X_2,\ldots,X_N}(x_1, x_2, \ldots, x_N)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_N} \tag{12}$$

Por integración directa este resultado es equivalente a:

$$F_{X_1,\ldots,X_N}(x_1, \ldots, x_N) = \int_{-\infty}^{x_N} \cdots \int_{-\infty}^{x_1} f_{X_1,\ldots,X_N}(v_1, \ldots, v_N)\, \mathrm{d}v_1 \cdots \mathrm{d}v_N$$

Propiedades de la función de densidad conjunta

1. La función de densidad es siempre positiva

$$f_{X,Y}(x, y) \geq 0 \tag{13}$$

2. El volumen bajo la superficie en todo el plano XY es unitario

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = 1 \tag{14}$$

3. La probabilidad en una región $\mathcal{R}$ es el volumen bajo la superficie en $\mathcal{R}$

$$P(x_1 < X \leq x_2, y_1 < Y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f_{X,Y}(x, y) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{15}$$

4. La función acumulativa conjunta es el volumen bajo la superficie de la región $\{X \leq x, Y \leq y\}$ de la función de densidad

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(v_1, v_2)\, \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2 \tag{16}$$

5. Funciones acumulativas marginales
   - 5a Función acumulativa marginal de X

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(v_1, v_2)\, \mathrm{d}v_2\, \mathrm{d}v_1 \tag{17}$$

   - 5b Función acumulativa marginal de Y

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(v_1, v_2)\, \mathrm{d}v_1\, \mathrm{d}v_2 \tag{18}$$

6. Funciones de densidad marginales
   - 6a Función de densidad marginal de X

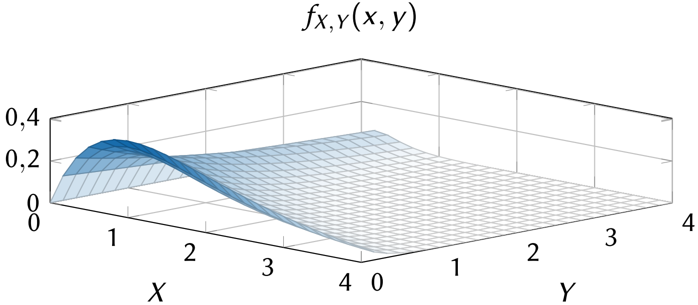
$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_X(x) \tag{19}$$

   - 6b Función de densidad marginal de Y

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} F_Y(y) \tag{20}$$

Encuentre $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ cuando la función de densidad conjunta es

$$f_{X,Y}(x,y) = x\, e^{-x(y+1)}\, u(x)u(y)$$



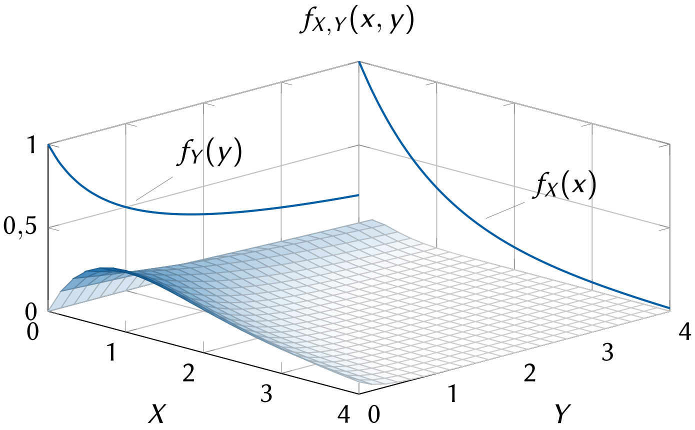
Para la solución, se debe tomar la función de densidad conjunta e integrar primero sobre todo el ámbito de valores de la variable aleatoria Y, para obtener la densidad de X.

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x)u(y)xe^{-x(y+1)}\,\mathrm{d}y \\
&= u(x)xe^{-x}\int_{0}^{\infty} e^{-xy}\,\mathrm{d}y \\
&= xe^{-x}u(x)\left(\frac{e^{-xy}}{-x}\right)\Big|_0^{\infty} \\
f_X(x) &= e^{-x}u(x)
\end{aligned}
$$

Luego, se toma la función de densidad conjunta y se integra sobre todo el ámbito de valores de la variable aleatoria X, para obtener la función de densidad de Y.

$$
\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(x)u(y)xe^{-x(y+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= u(y)\int_{0}^{\infty} xe^{-x(y+1)}\,\mathrm{d}x \\
&= u(y)\left[\left(\frac{-xe^{-x(y+1)}}{y+1}\right)\Bigg|_0^{\infty} - \left(\frac{e^{-x(y+1)}}{(y+1)^2}\right)\Bigg|_0^{\infty}\right] \\
f_Y(y) &= \frac{1}{(y+1)^2}u(y)
\end{aligned}
$$

En este cálculo se utilizó la técnica de la integración por partes.


$f_{X,Y}(x,y)$
$f_Y(y)$
$f_X(x)$
1
0,5
0
0
1
2
3
4
X
0
1
2
3
4
Y

Independencia estadística

Independencia estadística de variables aleatorias múltiples

Dos variables aleatorias son estadísticamente independientes si y solo si

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\}P\{Y \leq y\} \tag{21}$$

Lo anterior implica que

$$F_{X,Y}(x, y) = F_X(x)F_Y(y) \tag{22}$$

y

$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y) \tag{23}$$

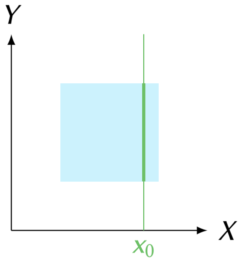
Si X, Y son estadísticamente independientes

$$\begin{aligned} F_X(x|Y \leq y) &= \frac{P\{X \leq x, Y \leq y\}}{P\{Y \leq y\}} \\ &= \frac{F_{X,Y}(x,y)}{F_Y(y)} \\ &= F_X(x) \end{aligned} \tag{24}$$

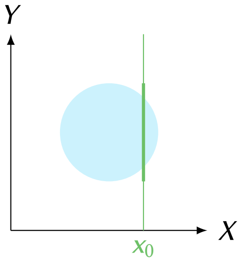
Lo mismo sucede con $F_Y(y|X \leq x)$. Además, si se mantiene la misma condición de independencia estadística para X, Y:

$$\begin{aligned} f_X(x|Y \leq y) = f_X(x) \\ f_Y(y|X \leq x) = f_Y(y) \end{aligned} \tag{25}$$

- Una densidad conjunta bivariada *uniforme* **cuadrada**



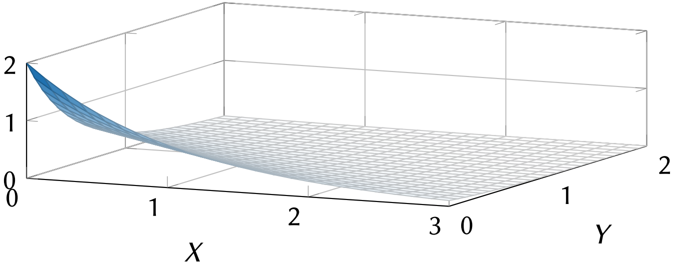
- Una densidad conjunta bivariada *uniforme* **circular**



Ejemplo de la variable aleatoria conjunta doblemente exponencial I

Para la función de densidad de (X, Y) dada, ¿son X y Y independientes?

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2e^{-(x+2y)} & x \geq 0, y \geq 0 \\ 0 & \text{en otra parte} \end{cases}$$



La densidades marginales se encuentran con las ecuaciones (19) y (20):

Densidad marginal de X

$$f_X(x) = 2e^{-x} \int_0^{\infty} e^{-2y}\, \mathrm{d}y = \boxed{e^{-x}} \quad \text{para} \quad x \geq 0$$

Densidad marginal de Y

$$f_Y(y) = 2e^{-2y} \int_0^{\infty} e^{-x}\, \mathrm{d}x = \boxed{2e^{-2y}} \quad \text{para} \quad y \geq 0$$

La independencia se evalúa con la ecuación (23):

$$f_X(x) f_Y(y) = (e^{-x})(2e^{-2y}) = 2e^{-(x+2y)} = f_{X,Y}(x, y) \quad \text{para} \quad x, y \geq 0$$