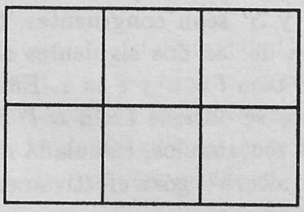
Las Matemáticas y su Enseñanza. 3(2): 15–18. 1990.

ÁREA Y MULTIPLICACIÓN

Prof. Winston Alarcón Athens
Escuela de Matemática, UCR

Una de las primeras aplicaciones de la multiplicación es el cálculo del área de un rectángulo. Este conocimiento lo adquirimos en los primeros años de estudio, época en la cual la manipulación aritmética se circunscribe a los enteros positivos. En este contexto, un rápido examen visual a un rectángulo $\mathcal{R}$ cuya base y altura tengan longitudes enteras, digamos de 3 y 2 cm respectivamente, nos convencerá que $\mathcal{R}$ puede descomponerse en $3+3 = 2 \times 3 = 6$ cuadrados de 1 cm de lado cada uno. De aquí es que aceptemos como algo completamente natural decir que el área del rectángulo $\mathcal{R}$ es 6 veces el área del cuadrado de 1 cm de lado, o más brevemente, 6 "centímetros cuadrados":



A medida que nuestro universo numérico se amplía y llegamos a familiarizarnos con las razones de enteros, el cálculo del área de un rectángulo $\mathcal{R}$ cuya base y altura tengan medidas racionales, resulta de consideraciones similares a las del caso en que los lados son enteros.

Para reducir el caso del rectángulo de lados racionales al contexto del rectángulo de lados enteros, podemos expresar las medidas racionales de los lados de $\mathcal{R}$ como fracciones con el mismo denominador.

Por ejemplo, si la base y la altura de $\mathcal{R}$ miden 3/2 cm y 4/5 cm respectivamente, podemos expresar ambas longitudes en términos de la décima parte del centímetro y decir que la base mide 15/10 cm, es decir 15 mm, mientras que la altura mide 8/10 cm, esto es, 8 mm. A continuación aplicamos nuestro conocimiento acerca del área de un rectángulo de lados enteros y concluímos que el área de $\mathcal{R}$ es $15 \times 8 = 120$ "milímetros cuadrados". Para expresar este resultado en "centímetros cuadrados", notamos que el cuadrado de 1 cm de lado tiene un área de $10 \times 10 = 100$ "milímetros cuadrados", por lo que deducimos que el área del cuadrado de 1 mm de lado es la centésima parte del área del cuadrado de 1 cm de lado.

De aquí concluimos que el área de $\mathcal{R}$, expresada en "centímetros cuadrados", es la centésima parte de su área expresada en "milímetros cuadrados". Como $120/100 = 6/5 = 3/2 \times 4/5$, este resultado y las conclusiones generales que fluyen de él (cuya demostración puede formalizarse por inducción matemática), nos convencen que la fórmula "base $\times$ altura" expresa correctamente el área de cualquier rectángulo de lados racionales en términos del área del cuadrado de lado unitario.

Pero, a medida que avanzamos en el conocimiento de los números, inevitablemente llega el momento en que nos encontramos con magnitudes "irracionales" como la expresada por el número decimal no periódico

$$1,0100100010000100000 1\ldots$$

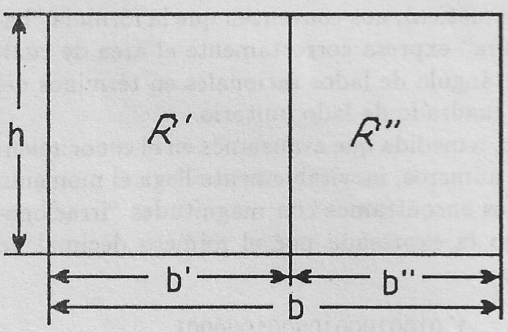
En este mundo numérico mucho más rico que el de los racionales, puede surgir la necesidad de calcular el área de un rectángulo de lados irracionales. Por ejemplo, ¿cuál es el área del manto un cilindro circular recto cuyo diámetro basal mida 1 m y en el que la distancia desde cualquier punto de una de las circunferencias basales al centro del cilindro sea de 1 m? La respuesta $\pi \times \sqrt{3}$ "metros cuadrados", si bién es plausible como generalización de los conocimientos en el contexto racional, ya no puede justificarse rigurosamente basándose sólo en las consideraciones anteriores, ya que los números π y $\sqrt{3}$ no son magnitudes conmensurables con ninguna fracción de la unidad.

¿Cuál es entonces la justificación general de la fórmula "base × altura" para expresar el área de cualquier rectángulo en términos del área del cuadrado de lado unitario?

Una parte de la respuesta es clara: "porque esa fórmula es *adecuada* para calcular el área de los rectángulos."

Y si se nos pregunta qué entendemos por *"adecuada"*, seguramente bastará un momento de reflexión para comenzar a precisar la idea: la fórmula "base × altura" para expresar el área de los rectángulos en términos del área del cuadrado de lado unitario es *"adecuada"* porque al expresar todas las longitudes en la misma unidad de distancia, se tiene:

(A) Si dos rectángulos $\mathcal{R}'$ y $\mathcal{R}''$ de igual altura h y de bases b' y b'' se yuxtaponen para formar un nuevo rectángulo $\mathcal{R}$ de altura h y base $b = b' + b''$, la suma de las áreas de las partes debería ser igual al área del todo (propiedad de *aditividad*),

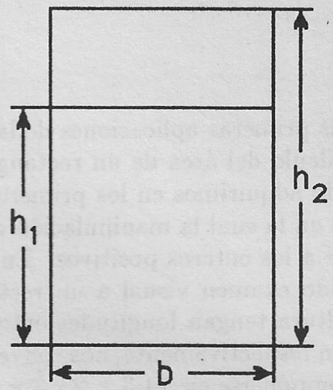


lo cual así resulta al emplear la fórmula "base × altura":

$$b' \times h + b'' \times h = (b' + b'') \times h = b \times h$$

(B) Si dos rectángulos $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ se levantan sobre la misma base de longitud b, con alturas h_1 y h_2 respectivamente, de manera que el rectángulo $\mathcal{R}_1$ quede contenido en el rectángulo $\mathcal{R}_2$, necesitamos que *el área de la parte resulte ser menor o igual que el área del todo* (propiedad de *monotonicidad*).

Como en este caso las respectivas alturas deberán satisfacer la desigualdad $h_1 \leq h_2$, al multiplicar ambos miembros de esta desigualdad por el número positivo b ciertamente obtenemos $b \times h_1 \leq b \times h_2$.



(C) Si dos rectángulos $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son tales que mediante traslaciones y/o rotaciones puede hacerse coincidir $\mathcal{S}$ con $\mathcal{S}'$ (es decir, $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ son congruentes), requerimos que ambos rectángulos tengan la misma área. Si las bases de $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ tienen longitudes l y l' y las alturas miden a y a' respectivamente, es claro que para que $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$ sean congruentes, tendrá que cumplirse alguna de las dos siguientes situaciones: $l = l'$ y $a = a'$, o bien $l = a'$ y $l' = a$. En cualquiera de estos dos casos se obtiene $l \times a = l' \times a'$, es decir el área de los rectángulos, calculada mediante la fórmula "base × altura", goza efectivamente de esta propiedad de *invarianza*.

El considerar *adecuadas* las propiedades (A), (B) y (C) de la fórmula "base × altura" para expresar el área de los rectángulos en términos del área del cuadrado de lado unitario, es cuestión de conveniencia para la civilización humana: si fallara cualquiera de estas propiedades, el "área" dejaría de sernos útil al intentar comparar, por ejemplo, los méritos relativos de dos fincas de forma rectangular, en cuanto a su potencial productivo. Completamos las condiciones para el área de los rectángulos estableciendo la unidad de medida; como estamos expresando dichas áreas en términos del área del cuadrado de lado unitario, convenimos en:

(D) La unidad de área es el área del cuadrado de lado unitario* (condición que la fórmula "base × altura" obviamente satisface).

* Al cambiar de unidad de distancia, por ejemplo de cm a pulgadas, la unidad de área cambiará de "1 cm cuadrado" a 1 "pulgada cuadrada". Naturalmente, el área de una figura depende de la unidad de área.

Las consideraciones anteriores muestran que la fórmula "base × altura" para expresar el área de los rectángulos en términos del área del cuadrado de lado unitario se justifica por sus propiedades. Pero si bién este aspecto es necesario, no es una justificación suficiente. En efecto, no hemos descartado la posibilidad de la existencia de otras fórmulas alternativas que, sin ser equivalentes en resultados a la fórmula "base × altura", expresen el área de los rectángulos en términos del área del cuadrado unitario y compartan con ella las propiedades (A), (B), (C) y (D).

La justificación quedará completa si mostramos que la fórmula "base × altura" es la *única* fórmula "adecuada" —en el sentido de las propiedades (A), (B), (C) y (D)— para expresar el área de los rectángulos, salvo, naturalmente, fórmulas equivalentes que den los mismos resultados, como por ejemplo:

$$\text{(área rectángulo de perímetro } p \text{ y diagonal } d) = (p^2 - 4d^2)/8$$

Para investigar esta "unicidad", observemos que la condición (C) de invarianza, implica que, una vez que hayamos fijado la unidad de distancia en la que expresemos las longitudes, el área de un rectángulo de base b y altura h, expresada en términos del área del cuadrado de lado unitario, debe quedar determinada unívocamente por b y h; en otras palabras, el área de los rectángulos es una *función* (real) $y = \mathcal{A}(b,h)$ de las dos variables b y h. Aquí $\mathcal{A}(b,h)$ representa el área de cualquier rectángulo de base b y altura h, *expresada en términos del área del cuadrado de lado unitario.*

Abandonando cualquier idea preconcebida acerca de una fórmula para calcular esta función, mostraremos que al exigirse que satisfaga las propiedades (A), (B), (C) y (D), ello conduce *inevitablemente* a la fórmula $\mathcal{A}(b,h) = b \times h$.

Démosnos entonces un rectángulo $\mathcal{R}$ cuyas base y altura midan b y h respectivamente (ambas medidas en la misma unidad de longitud). Si n es cualquier entero positivo dado, consideremos un rectángulo $\mathcal{R}_n$ cuyas base y altura midan nb y nh respectivamente. Como $\mathcal{R}_n$ se puede descomponer en $n \times n = n^2$ rectángulos congruentes a $\mathcal{R}$, aplicando la propiedad (A) de aditividad, tenemos que el área de $\mathcal{R}_n$ debe ser n^2 veces el área de $\mathcal{R}$, esto es:

$$\mathcal{A}(nb,nh) = n^2\mathcal{A}(b,h) \tag{1}$$

Invocando la propiedad arquimediana del orden del conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, deben existir números naturales p, q tales que $nb < p$ y $nh < q$. La propiedad de buen orden de $\leq$ en $\mathbb{N}$ nos permite tomar los enteros p, q más pequeños que satisfagan estas desigualdades. Denotando p_n y q_n a esos enteros más pequeños, podemos escribir:

$$\begin{aligned} p_n - 1 &\leq nb < p_n \\ q_n - 1 &\leq nh < q_n \end{aligned} \tag{2}$$

Las desigualdades (2) nos informan que el rectángulo $\mathcal{R}_n$ contiene un rectángulo $\mathcal{R}'$ de base entera $p_n - 1$ y altura entera $q_n - 1$ y que, además $\mathcal{R}_n$ está contenido en un rectángulo $\mathcal{R}''$ de base entera p_n y altura entera q_n. Usando la propiedad (B) de monotonicidad, podemos escribir:

$$\mathcal{A}(p_n - 1, q_n - 1) \leq \mathcal{A}(nb,nh) \leq \mathcal{A}(p_n,q_n) \tag{3}$$

Como el rectángulo $\mathcal{R}'$ se descompone en un número igual a $(p_n - 1) \times (q_n - 1)$ cuadrados de lado unitario, usando nuevamente la propiedad (A) de aditividad y la condición (D) para la unidad de área, tenemos que el área de $\mathcal{R}'$ debe ser:

$$\mathcal{A}(p_n - 1, q_n - 1) = (p_n - 1)(q_n - 1) \tag{4}$$

Similarmente, como el rectángulo $\mathcal{R}''$ se descompone en un número igual a $p_n \times q_n$ cuadrados de lado unitario, el área de $\mathcal{R}''$ debe ser:

$$\mathcal{A}(p_n,q_n) = p_n q_n \tag{5}$$

Sustituyendo (1), (4) y (5) en (3), llegamos a la siguiente desigualdad:

$$(p_n - 1)(q_n - 1) \leq n^2\mathcal{A}(b,h) < p_n q_n \tag{6}$$

Dividiendo los tres miembros de (6) por el número positivo n^2, se obtiene:

$$\left(\frac{p_n}{n} - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{q_n}{n} - \frac{1}{n}\right) \leq \mathcal{A}(b,h) < \frac{p_n}{n} \cdot \frac{q_n}{n} \tag{7}$$

Para cada entero positivo n tenemos una desigualdad como (7). A fin de tomar límite cuando $n \to \infty$, averigüemos el comportamiento de p_n/n y de q_n/n cuando $n \to \infty$. Para esto, observemos que las desigualdades (2) pueden escribirse en la forma:

$$0 < \frac{p_n}{n} - b \leq \frac{1}{n}$$
$$0 < \frac{q_n}{n} - h \leq \frac{1}{n}$$

Por el teorema del límite encajonado, cuando $n \to \infty$ las expresiones de los centros de estas desigualdades deben tender a 0, con lo cual se deduce que

$$\frac{p_n}{n} \to b \qquad \text{y} \qquad \frac{q_n}{n} \to h \qquad \text{cuando } n \to \infty$$

Este resultado y (7) nos llevan a concluir (nuevamente, por el teorema del límite encajonado) que

$$\mathcal{A}(b,h) = b \times h\,,$$

lo que muestra que la fórmula "base × altura" es la *única* fórmula (salvo fórmulas que proporcionen los mismos resultados) que permite expresar el área de los rectángulos en términos del área del cuadrado de lado unitario reuniendo las propiedades (A), (B), (C) y (D).

Terminamos este artículo con un breve comentario: hemos visto que la operación de multiplicación permite resolver el problema de disponer de una fórmula "adecuada" para el área de un rectángulo y que tal problema tiene una sola manera de ser resuelto.

La metodología que hemos empleado intenta ir desde lo conceptual hacia lo operacional, poniendo énfasis en el análisis del concepto, entendido éste en su naturaleza cultural: el concepto "área", como cualquier otro concepto, es un resultado del desenvolvimiento de la civilización humana; sus propiedades no son "axiomas" de misterioso origen sino que constituyen la razón ser que le dio origen. La fórmula vinculada al concepto es una consecuencia de sus propiedades; es más: puede decirse que la operación de multiplicación de números reales que está en el corazón de esa fórmula, surge como operación algebraica importante debido a la necesidad de implementar operacionalmente el problema del área.

En efecto. Históricamente la noción de área de figuras simples como los rectángulos, correspondió a la noción de "magnitud" de tales figuras. Como las operaciones aritméticas se referían a los enteros positivos y a las fracciones formadas con tales números, las operaciones con "magnitudes" constituían un álgebra geométrica que —en la medida que abarcaba la manipulación de magnitudes "inconmensurables"— no se reducía a la aritmética ordinaria. La multiplicación, en tanto operación entre magnitudes, surge a traves del problema del área de los rectángulos. No fue el área del rectángulo la que se definió apriorísticamente como el producto "base × altura", sino al revés: fue el producto bh el que quedó definido como la "magnitud" de la figura rectangular de base b y altura h, "magnitud" que se manipulaba mediante las reglas o principios (A), (B), (C) y (D), aunque no siempre de manera explícita.

En el orden del desarrollo de las ideas importantes, lo concreto siempre ha precedido y dado origen a lo abstracto, aunque —por desgracia— esta verdad histórica y psicológica no siempre sea suficientemente tomada en cuenta en la enseñanza.

Referencias.

1. George D. Birkhoff y Ralph Beatley, *Basic Geometry*, third ed., Chelsea Pub. Co., N. Y., 1959.

2. Thomas Heath, *A History of Greek Mathematics*, vol. II, Dover Pub. Inc., N. Y., 1981.

3. David Hilbert, *Foundations of Geometry*, trad. al inglés de la 7a. edición en alemán por Leo Unger; 10a. ed. revisada y aumentada por Paul Bernays, Open Court, La Salle, Illinois, 1971.