Ciencias Matemáticas 3(1): 5-18 (1992)

DISEÑO DE FÓRMULAS INTEGRALES. (*)

Winston Alarcón Athens
Escuela de Matemática, U. C. R.

Resumen. Presentamos una nueva metología de diseño de fórmulas integrales que no utiliza explícitamente sumas de Riemann ni procesos de límite. El método consiste en partir de un modelo elemental con solución conocida, e interpretar — en relación a la magnitud que se desea calcular y definir formalmente — un conjunto de propiedades que caracterizan a su respectiva forma integral. Cuando la interpretación muestra que se trata de propiedades conceptual o intuitivamente necesarias, la unicidad de su forma integral conduce a que ésta sea la fórmula general buscada. El método se basa en dos teoremas de caracterización del autor que también son útiles para discutir propiedades características asociadas a formas integrales dadas. Como otra aplicación, obtenemos un teorema general de cambio de variable sin hipótesis especiales de continuidad.

Abstract. In this paper I present a new methodology for the design of integral formulæ which do not explicitly utilize neither Riemann's sums nor processes of limit. This method consists of departing from an elementary model with a known solution and interpret — in relation to the magnitude which is desired to calculate and formally define — a set of features that characterize its corresponding integral form. When the interpretation shows that these features are, conceptually or intuitively, of necessity, the unicity of its integral form guides itself to be the general formula that has been persued. The method is based on two characterization theorems of the author, that also are useful to discuss characteristic features associated with a given integral form. As an other application, we obtain a general change of variable theorem without special hypothesis of continuity.

1. Introducción. La metología de diseño de fórmulas integrales que expondremos en tres ejemplos, consiste en los siguientes pasos:

i) *Escogencia de un modelo elemental con solución conocida*, en que la magnitud $\mu[a,b]$ a calcular queda dada por una fórmula de la forma:

$$\mu[a,b] = C\Big(\Phi(b) - \Phi(a)\Big),$$

donde C es constante en $[a,b]$ para el modelo elemental.

ii) *Dar forma integral* al lado derecho de la fórmula elemental

$$C\Big(\Phi(b) - \Phi(a)\Big) = \int_a^b C\varphi(u)\,du,$$

(*) Este trabajo forma parte del Proyecto Número 114–89–051 de la Vicerrectoría de Investigación, Universidad de Costa Rica.

deduciendo un conjunto de propiedades características inmediatas que especificaremos más adelante.

iii) *Interpretación* de las propiedades características de la forma integral en términos de la magnitud μ y decisión de *adopción o rechazo* de la forma integral.

En esta metodología no interviene ningún "cálculo aproximado" de una magnitud intuitivamente aceptada antes de todo cálculo (ver, por ejemplo, [1], cap. 7 y [2], cap. 6), sino que basta el conocimiento de la fórmula para el cálculo exacto en un modelo elemental. Tampoco es necesario un conocimiento apriori de "axiomas" que describan a la magnitud en estudio (ver, por ejemplo, [3], cap. 2), sino que es la propia forma integral de la fórmula elemental la que nos proporcionará una *propuesta* de posibles axiomas(**). Todo lo que tenemos que hacer es *discutir* la necesidad o la inconveniencia de esas propiedades, a la luz del concepto que tengamos acerca de la magnitud en estudio. Y cuando no tengamos completa claridad previa sobre tal concepto, esa discusión nos permitirá profundizar precisamente en él. Finalmente, cuando hayamos completado esa discusión y reconocido la necesidad conceptual de las propiedades que caracterizan a la forma integral encontrada, podremos *definir formalmente* la magnitud en estudio, no a través de una fórmula para su cálculo, sino por medio de esas propiedades características. Junto con la obtención de esa definición formal y como consecuencia natural (pero conceptualmente distinta) de ella, dispondremos de la fórmula general para calcular la magnitud así definida.

El método de diseño de fórmulas integrales que acabamos de reseñar se fundamenta en los teoremas que discutiremos en la próxima sección, después de la cual los aplicaremos a tres ejemplos típicos. En la última sección probaremos un teorema de cambio de variable que se deduce fácilmente del teorema C.

2. Bases teóricas del método de diseño propuesto. En todo lo que sigue, $J \subseteq \mathbb{R}$ denota un intervalo de la recta real. Para indicar que f es Riemann–integrable en los subintervalos compactos de J, escribiremos: $f \in \mathcal{R}_J$. Si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada en los subintervalos compactos de J, una *pre–primitiva* de f en J es una función $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada x, $y \in J$, con $x \neq y$, la razón de incrementos

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x}$$

queda comprendida entre cualquier par de cotas inferior y superior de f en el intervalo compacto de extremos x, y. En [5] discutimos en detalle la noción de pre–primitiva, cuya principal propiedad es el siguiente teorema de caracterización:

Teorema A. $f \in \mathcal{R}_J$ si y sólo si, dados a, $b \in J$, la diferencia $F(b) - F(a)$ no depende de cual sea la pre–primitiva F de f que escojamos para calcularla. Si $f \in \mathcal{R}_J$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

(**) No hay que perder de vista que las "fórmulas elementales" no provienen de una escogencia caprichosa convertida en tradición, sino que deben su existencia a las *propiedades que las caracterizan*, propiedades que subyacen a la fórmula pero que constituyen la médula conceptual de lo que con tal fórmula se calcula. Ver, por ejemplo, [4].

donde F es cualquier pre–primitiva de f en J.

Sea $(a,b) \mapsto \mu(a,b)$ una función real definida para todo $(a,b) \in J \times J$ tal que $a \leq b$. Se dice que μ es *aditiva con respecto a las particiones del intervalo*, o — más brevemente — *aditiva*, si para todos a, b, $c \in J$, con $a \leq b \leq c$, se verifica:

$$\mu(a,b) + \mu(b,c) = \mu(a,c)\,.$$

Por ejemplo, si $\Phi : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función real definida en J, la aplicación $\mu(a,b) \mapsto \Phi(b) - \Phi(a)$ es aditiva. En particular, si Φ es una pre–primitiva de φ en J, además de ser aditiva, μ tiene la siguiente *propiedad de acotación*: si a, $b \in J$ son tales que $a < b$, entonces se verifica

$$\inf_{x\in[a,b]} \varphi(x) \leq \frac{\mu(a,b)}{b-a} \leq \sup_{x\in[a,b]} \varphi(x)\,. \tag{1}$$

El teorema A recién citado se traduce en el siguiente

Teorema B. Dada $\kappa \in \mathcal{R}_J$, la forma integral

$$\mu_\kappa(a,b) = \int_a^b \kappa(x)\,dx$$

es la única aplicación aditiva tal que, para todo $(a,b) \in J \times J$ con $a < b$, se verifica la siguiente propiedad de acotación:

$$\inf_{x\in[a,b]} \kappa(x) \leq \frac{\mu(a,b)}{b-a} \leq \sup_{x\in[a,b]} \kappa(x)\,.$$

El teorema B tiene útiles aplicaciones en el diseño de fórmulas integrales sencillas, provenientes de fórmulas elementales del tipo $\mu(a,b) = C(b-a)$. Así ocurre, por ejemplo, con el área de las regiones de ordenadas de una función $f \in \mathcal{R}_J$: si f es una constante k, se trata de regiones rectangulares de área $|k|(b-a)$. La respectiva forma integral $\mu(a,b) = \int_a^b |f(x)|\,dx$ es una función aditiva que se caracteriza por la propiedad de acotación:

$$\inf_{x\in[a,b]} |f(x)|(b-a) \leq \mu(a,b) \leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|(b-a)\,,$$

lo cual se interpreta como la propiedad del área de la región de ordenadas de f en $[a,b]$, de quedar comprendida entre el área del rectángulo más grande que puede inscribirse dentro de ella y el área del rectángulo más pequeño que puede circunscribirse a ella. Como la aditividad y esta propiedad de acotación son necesarias a un concepto de área, se justifica definir el área de las regiones de ordenadas de $f \in \mathcal{R}_J$ como la magnitud integral μ caracterizada por esas dos propiedades, obteniéndose para su cálculo la fórmula: $\mu(a,b) = \int_a^b |f(x)|\,dx$.

Sin embargo, cuando se trata de fórmulas integrales que generalizan fórmulas elementales del tipo $C\int_a^b \varphi(x)\,dx$, o — equivalentemente - del tipo $C\big(\Phi(b) - \Phi(a)\big)$ (donde Φ es una pre–primitiva de φ), la mencionada propiedad de acotación de la correspondiente forma integral $\int_a^b \kappa(x)\varphi(x)\,dx$, esto es, la siguiente *propiedad de acotación I*:

$$\inf_{x\in[a,b]} \Big(\kappa(x)\varphi(x)\Big)(b-a) \leq \int_a^b \kappa(x)\varphi(x)\,dx \leq \sup_{x\in[a,b]} \Big(\kappa(x)\varphi(x)\Big)(b-a)\,,$$

tiene una interpretación *insuficientemente intuitiva* como para servir de justificación conceptual a una definición formal de la magnitud que se discuta. De ahí que sea conveniente contar con propiedades de acotación que — sin dejar de caracterizar a la forma integral $\int_a^b \kappa(x)\varphi(x)\,dx$ —, usen cotas más amplias, susceptibles de una más evidente interpretación. Esto es lo que lograremos en los dos teoremas que probaremos en esta sección.

Teorema C. Sean κ, $\varphi \in \mathcal{R}_J$, con $\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \in J$. Entonces la forma integral

$$\mu_{\kappa,\varphi}(a,b) = \int_a^b \kappa(x)\varphi(x)\,dx$$

es la única aplicación aditiva, definida para todos a, $b \in J$ tales que $a \leq b$, que goza de la siguiente *propiedad de acotación II*:

$$\inf_{x\in[a,b]} \kappa(x)\big(\Phi(b)-\Phi(a)\big) \leq \mu_{\kappa,\varphi}(a,b) \leq \sup_{x\in[a,b]} \kappa(x)\big(\Phi(b)-\Phi(a)\big)\,,$$

si a, $b \in J$ son tales que $a \leq b$.

PRUEBA. En primer lugar, tenemos que $\int_a^b \kappa(x)\varphi(x)\,dx$ es una aplicación aditiva que posee la propiedad de acotación II. Para comprobar esto último, basta notar que si a, $b \in J$ son tales que $a \leq b$, entonces para todo $t \in [a,b]$ se tiene:

$$\inf_{x\in[a,b]} \kappa(x) \leq \kappa(t) \leq \sup_{x\in[a,b]} \kappa(x)\,;$$

como $\varphi(t) \geq 0$, para todo $t \in [a,b]$ podemos escribir:

$$\inf_{x\in[a,b]} \kappa(x)\varphi(t) \leq \kappa(t)\varphi(t) \leq \sup_{x\in[a,b]} \kappa(x)\varphi(t)\,,$$

e integrando desde a hasta b:

$$\inf_{x\in[a,b]} \kappa(x)\big(\Phi(b)-\Phi(a)\big) \leq \int_a^b \kappa(t)\varphi(t)\,dt \leq \sup_{x\in[a,b]} \kappa(x)\varphi(t)\big(\Phi(b)-\Phi(a)\big)\,,$$

donde Φ es cualquier pre–primitiva de φ en J. En consecuencia, basta con probar el siguiente lema:

Lema. Si $\mu_{\kappa,\varphi}$ es una aplicación aditiva que goza de la propiedad de acotación II, entonces, para cada a, $b \in J$ con $a < b$, se verifica:

$$\mu_{\kappa,\varphi}(a,b) = \sup\Big\{ \sum_{K\in\mathcal{P}} \big(\inf_{x\in K} \kappa(x)\big)\Delta\Phi_K \;\Big|\; \mathcal{P} \quad \text{es una partición de } [a,b] \Big\}\,.$$

PRUEBA DEL LEMA.

Como $\kappa \in \mathcal{R}_J$, para cada $\epsilon > 0$ existe una partición $\mathcal{P}_\epsilon$ de $[a, b]$, tal que para toda partición $\mathcal{P}$ más fina que $\mathcal{P}_\epsilon$ se verifica:

$$0 \leq \sum_{K \in \mathcal{P}} \Big(\sup_{x \in K} \kappa(x) - \inf_{x \in K} \kappa(x)\Big) \Delta x_K < \frac{\epsilon}{L}, \tag{2}$$

donde $\Delta x_K = t - s$ si $K = [s, t]$ y $L = \text{máx}\{\,|\inf_{[a,b]} \varphi|, |\sup_{[a,b]} \varphi|\,\} > 0$ (si $L = 0$, φ es nula, Φ constante y no hay nada que probar).

Si $K = [s, t]$, escribiremos $\Delta\Phi_K = \Phi(t) - \Phi(s)$ y $\mu_{\kappa,\varphi}(K) = \mu_{\kappa,\varphi}(s, t)$. Por la propiedad de acotación II, para todo $K \in \mathcal{P}$ tenemos:

$$\big(\inf_{x \in K} \kappa(x)\big)\Delta\Phi_K \leq \mu_{\kappa,\varphi}(K) \leq \big(\sup_{x \in K} \kappa(x)\big)\Delta\Phi_K .$$

Usando ahora la propiedad de aditividad:

$$\sum_{K \in \mathcal{P}} \big(\inf_{x \in K} \kappa(x)\big)\Delta\Phi_K \leq \mu_{\kappa,\varphi}(a, b) \leq \sum_{K \in \mathcal{P}} \big(\sup_{x \in K} \kappa(x)\big)\Delta\Phi_K .$$

Por lo tanto:

$$0 \leq \mu_{\kappa,\varphi}(a, b) - \sum_{K \in \mathcal{P}} \big(\inf_{x \in K} \kappa(x)\big)\Delta\Phi_K \leq \sum_{K \in \mathcal{P}} \Big(\sup_{x \in K} \kappa(x) - \inf_{x \in K} \kappa(x)\Big)\Delta\Phi_K . \tag{3}$$

Por la positividad de φ y el hecho de ser Φ una pre–primitiva de φ en J, se tiene $\Delta\Phi_K \geq 0$ para todo $K \in \mathcal{P}$; usando (2) y la propiedad de acotación (1) de $\Delta\Phi_K$, tenemos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{K \in \mathcal{P}} \Big(\sup_{x \in K} \kappa(x) - \inf_{x \in K} \kappa(x)\Big)\Delta\Phi_K \\
&= \sum_{K \in \mathcal{P}} \Big(\sup_{x \in K} \kappa(x) - \inf_{x \in K} \kappa(x)\Big)\Delta x_K \Big(\frac{\Delta\Phi_K}{\Delta x_K}\Big) \\
&\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} \Big(\sup_{x \in K} \kappa(x) - \inf_{x \in K} \kappa(x)\Big)\Delta x_K\right) \text{máx}_{K \in \mathcal{P}} \Big(\frac{\Delta\Phi_K}{\Delta x_K}\Big) \\
&\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{P}} \Big(\sup_{x \in K} \kappa(x) - \inf_{x \in K} \kappa(x)\Big)\Delta x_K\right) L \\
&< \frac{\epsilon}{L} L = \epsilon .
\end{aligned}$$

Aplicando esta acotación a (3), obtenemos:

$$0 \leq \mu_{\kappa,\varphi}(a, b) - \sum_{K \in \mathcal{P}} \big(\inf_{x \in K} \kappa(x)\big)\Delta\Phi_K < \epsilon \quad \blacksquare$$

Teorema D. Sean κ, $\varphi \in \mathcal{R}_J$, con $\kappa(x) \geq 0$ y $\varphi(x) \geq 0$ para todo $x \in J$. Entonces, la forma integral

$$\mu_{\kappa,\varphi}(a, b) = \int_a^b \kappa(x)\varphi(x)\, dx$$

es la única aplicación aditiva, definida para todos a, $b \in J$ tales que $a \leq b$, que goza de la siguiente *propiedad de acotación III*:

$$\inf_{x\in[a,b]} \kappa(x) \inf_{x\in[a,b]} \varphi(x) \leq \frac{\mu_{\kappa,\varphi}(a,b)}{b-a} \leq \sup_{x\in[a,b]} \kappa(x) \sup_{x\in[a,b]} \varphi(x),$$

si a, $b \in J$ son tales que $a < b$.

PRUEBA. En primer lugar, tenemos que $\int_a^b \kappa(x)\varphi(x)\,dx$ es una aplicación aditiva que posee la propiedad de acotación III. Para comprobar esto último, basta notar que si a, $b \in J$ son tales que $a < b$, entonces para todo $t \in [a,b]$ se tiene:

$$0 \leq \inf_{x\in[a,b]} \kappa(x) \leq \kappa(t) \leq \sup_{x\in[a,b]} \kappa(x)$$

$$0 \leq \inf_{x\in[a,b]} \varphi(x) \leq \varphi(t) \leq \sup_{x\in[a,b]} \varphi(x)$$

Luego:

$$\inf_{x\in[a,b]} \kappa(x) \inf_{x\in[a,b]} \varphi(x) \leq \kappa(t)\varphi(t) \leq \sup_{x\in[a,b]} \kappa(x) \sup_{x\in[a,b]} \varphi(x),$$

e integrando desde a hasta b:

$$\inf_{x\in[a,b]} \kappa(x) \inf_{x\in[a,b]} \varphi(x)(b-a) \leq \int_a^b \kappa(t)\varphi(t) \leq \sup_{x\in[a,b]} \kappa(x) \sup_{x\in[a,b]} \varphi(x)(b-a).$$

Por otra parte, si una aplicación aditiva $\mu_{\kappa,\varphi}$, con $\varphi \geq 0$ y $\kappa \geq 0$ en J, goza de la propiedad de acotación III, entonces para todo subintervalo K de cualquier partición $\mathcal{P}$ del intervalo $[a,b] \subseteq J$, debido a esa propiedad de acotación, podemos escribir (con las mismas convenciones de escritura del teorema C):

$$(\inf_K \kappa)(\inf_K \varphi)\Delta x_K \leq \mu_{\kappa,\varphi}(K) \leq (\sup_K \kappa)(\sup_K \varphi)\Delta x_K$$

Sumando miembro a miembro sobre todos los subintervalos de $\mathcal{P}$ y usando la aditividad obtenemos:

$$\sum_{K\in\mathcal{P}} (\inf_K \kappa)(\inf_K \varphi)\Delta x_K \leq \mu_{\kappa,\varphi}(a,b) \leq \sum_{K\in\mathcal{P}} (\sup_K \kappa)(\sup_K \varphi)\Delta x_K$$

y luego, debido a la positividad de φ:

$$\sum_{K\in\mathcal{P}} (\inf_{[a,b]} \kappa)(\inf_K \varphi)\Delta x_K \leq \mu_{\kappa,\varphi}(a,b) \leq \sum_{K\in\mathcal{P}} (\sup_{[a,b]} \kappa)(\sup_K \varphi)\Delta x_K.$$

Resulta entonces que $\mu_{\kappa,\varphi}(a,b)$ es una cota superior de todas las sumas inferiores en $[a,b]$ de la función $(\inf_{[a,b]} \kappa)\varphi$ y a la vez es una cota inferior de todas las sumas superiores en $[a,b]$ de la función $(\sup_{[a,b]} \kappa)\varphi$. Como $\varphi \in \mathcal{R}_J$, esto nos permite escribir:

$$(\inf_{[a,b]} \kappa)(\Phi(b)-\Phi(a)) \leq \mu_{\kappa,\varphi}(a,b) \leq (\sup_{[a,b]} \kappa)(\Phi(b)-\Phi(a)),$$

donde Φ es cualquier pre–primitiva de φ en J. Esto muestra que $\mu_{\kappa,\varphi}$ tiene la propiedad de acotación II. Por teorema C, concluimos que $\mu_{\kappa,\varphi}(a,b) = \int_a^b \kappa(x)\varphi(x)\,dx$ ■

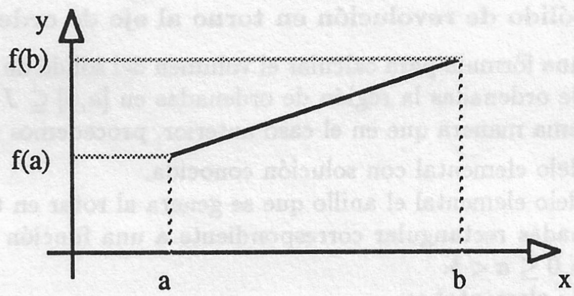
3. Ejemplos de diseño de fórmulas integrales. A manera de ejemplo, examinaremos los diseños de fórmulas integrales en tres problemas típicos del Cálculo Integral: la longitud de arco de una curva $y = f(x)$, el volumen de un sólido de revolución en torno al eje de ordenadas y el área de un manto de revolución en torno al eje de abscisas.

3.1. Longitud de arco de una curva $y = f(x)$.

Se trata de diseñar una fórmula para calcular la longitud de arco de una curva $y = f(x)$. De acuerdo a la metodología reseñada, procedemos como sigue:

i) Seleccionamos un modelo elemental con solución conocida.

Tomemos como modelo elemental un segmento rectilíneo de pendiente m en un intervalo $[a,b]$, esto es, el gráfico de una función f *de derivada* $f'(x) = m$ *constante.*



La longitud de arco de nuestro modelo elemental es:

$$\begin{aligned} \text{Longitud arco rectilíneo} &= \sqrt{\big(b-a\big)^2 + \big(f(b)-f(a)\big)^2} \\ &= \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,(b-a) \\ &= \kappa(x)\big(\Phi(b)-\Phi(a)\big)\,, \end{aligned}$$

donde $\kappa(x) = \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}$ y $\Phi(x) = x$.

ii) Notando que $\Phi(x) = x$ es una primitiva de $\varphi(x) = 1 > 0$ en $[a,b]$, el teorema B afirma que la forma integral

$$\int_a^b \sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx \tag{4}$$

está unívocamente determinada por las propiedades de aditividad y de acotación (1) que pasamos a discutir, interpretando provisionalmente la forma integral (4) como la longitud de arco del gráfico de f en $[a,b]$:

— La propiedad de aditividad nos dice que si se divide un arco en dos subarcos, la suma de las longitudes de éstos es igual a la de aquel;

— La propiedad de acotación (1) establece que si a, $b \in J$ son tales que $a < b$, la longitud del arco $y = f(x)$ en $[a, b]$ está comprendida entre las longitudes en $[a, b]$ de los segmentos de las tangentes a f, de inclinaciones minimal y maximal, respectivamente.

Como las dos propiedades comentadas son necesarias a un concepto de longitud de un arco, se justifica definir formalmente tal concepto como la magnitud que está caracterizada por esas propiedades. Junto con esto queda establecida la siguiente fórmula general para el cálculo de la longitud de arco de f en $[a, b]$:

$$\boxed{\text{Longitud de arco de } f \text{ en } [a,b] = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\, dx}$$

donde se supone que $f' \in \mathcal{R}_J$.

Nota: En el ejemplo que acabamos de examinar, debido a que $\varphi(x) = 1$ para todo x, los cuatro tipos de acotación (1), I, II y III coinciden.

3.2. Volumen de un sólido de revolución en torno al eje de ordenadas.

Se trata de diseñar una fórmula para calcular el volumen del sólido de revolución generado al rotar en torno al eje de ordenadas la región de ordenadas en $[a, b] \subseteq J$ (con $0 \leq a < b$), de una función f. De la misma manera que en el caso anterior, procedemos como sigue:

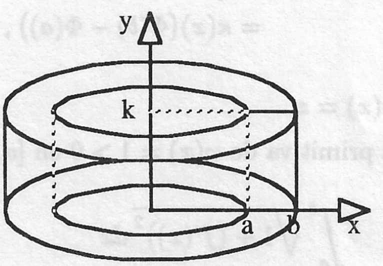
i) Seleccionamos un modelo elemental con solución conocida.

Tomemos como modelo elemental el anillo que se genera al rotar en torno al eje de ordenadas la región de ordenadas rectangular correspondiente a una función constante $f(x) = k$ en un intervalo $[a, b]$, con $0 \leq a < b$.

El volumen del sólido elemental es:

$$\begin{aligned} \text{Volumen sólido elemental} &= \pi|k|(b^2 - a^2) \\ &= \kappa(x)\big(\Phi(b) - \Phi(a)\big)\,, \end{aligned} \tag{5}$$

donde $\kappa(x) = \pi\big|f(x)\big|$ y $\Phi(x) = x^2$.



ii) Notando que $\Phi(x) = x^2$ es una primitiva de $\varphi(x) = 2x \geq 0$ en $[a, b]$, los teoremas de la sección 2 afirman que la forma integral

$$2\pi \int_a^b \big|f(x)\big|\, x\, dx\,, \quad \text{con} \quad f \in \mathcal{R}_J \tag{6}$$

está unívocamente determinada por la propiedad de aditividad y por cualquiera de las versiones I, II o III de la propiedad de acotación.

— La propiedad de aditividad nos dice que si se corta un sólido de revolución alrededor del eje y mediante un manto cilíndrico en torno al eje y, la suma de los volúmenes de los dos sólidos de revolución resultantes es igual al de aquel.

— La propiedad de acotación II, afirma que si a, $b \in J$ son tales que $0 \leq a < b$, el volumen del sólido de revolución $\mathcal{S}$ generado al rotar en torno al eje y la región de ordenadas de f en $[a,b]$ está comprendido entre el volumen del anillo de revolución más grande que cabe dentro de $\mathcal{S}$ y el volumen del anillo de revolución más pequeño que contiene a $\mathcal{S}$.

Estas dos propiedades de (6) resultan *necesarias* a una noción de volumen. De acuerdo con el Teorema C, la forma integral (6) es la única que goza de estas dos propiedades. Esto justifica *definir* el volumen del sólido de revolución $\mathcal{S}$, como la magnitud que está caracterizada por las propiedades de aditividad y de acotación II recién discutidas. Al adoptar esta definición, automáticamente queda establecida la fórmula general para el *cálculo* de dicho volumen:

$$\boxed{\text{Volumen del sólido correspondiente a } f \text{ en } [a,b] = 2\pi \int_a^b \left|f(x)\right| x\, dx}$$

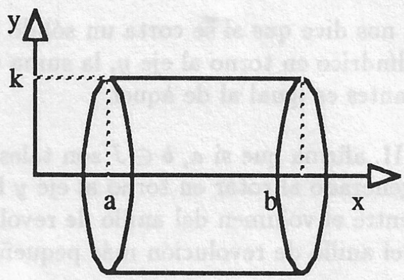
donde se supone que $f \in \mathcal{R}_J$ y $0 \leq a < b$.

Nota: En el ejemplo que acabamos de examinar, la propiedad de acotación I no es suficientemente intuitiva como para justificar una definición del volumen de revolución en torno al eje y en base a ella. Por otra parte, también se puede usar aquí el teorema D, ya que $\varphi(x) = x \geq 0$ en $J \subseteq [0, \infty[$ y $\kappa(x) = \pi\left|f(x)\right| \geq 0$. Sin embargo, si bien la propiedad de acotación III es claramente necesaria desde un punto de vista conceptual, resulta más natural basar la definición e... propiedad de acotación II.

3.3. Area de un manto de revolución en torno al eje de abscisas.

En este último ejemplo pondremos a prueba la metodología propuesta con el diseño de una fórmula para calcular el área del manto de revolución generado al rotar en torno al eje de abscisas una curva $y = f(x)$. Esta aplicación de la integral definida tiene ciertas dificultades de tratamiento con el método tradicional de cortes infinitesimales, lo que explica que algunos autores ([3]) la omitan (dejando el problema para ser resuelto mediante integrales de superficie), mientras que otros se ven en la necesidad de incluir un teorema ad–hoc (ver [2], por ejemplo) y otros simplemente guardan silencio frente a la dificultad ([1]).

Como en los casos anteriores, procedemos a seleccionar un modelo elemental con solución conocida. El modelo elemental más sencillo es el manto cilíndrico que se genera al rotar en torno al eje de abscisas el gráfico correspondiente a una función constante $f(x) = k > 0$.

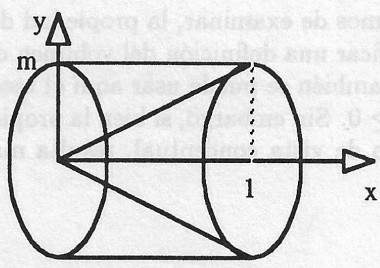


Su área en el intervalo $[a, b]$ es $2\pi k(b-a)$, que tiene la forma $\kappa(x)(\Phi(b) - \Phi(a))$, con $\kappa(x) = 2\pi f(x)$ y $\Phi(x) = x$, obteniéndose la forma integral

$$\int_a^b 2\pi f(x)\, dx \tag{7}$$

Debido a que $\varphi(x) = 1$, los tres tipos de acotación coinciden y dicen lo siguiente: el área del manto de revolución correspondiente a f en $[a, b]$ está comprendida entre el área del mayor cilindro inscribible al manto desde adentro y el área del menor cilindro circunscribible a dicho manto por afuera.

La siguiente situación, en que un manto cónico está rodeado externamente por un manto cilíndrico, pondrá en evidencia que esa propiedad de acotación es inaceptable:



El área de un manto cónico puede calcularse cortando el cono a lo largo de una generatriz y extendiéndolo sobre un plano. Si el radio de la base del cono es r y la longitud de sus generatrices es l, el manto se transforma en un sector circular de radio l y cuyo arco mide $2\pi r$; admitiendo que esta transformación no modifica el área, obtenemos la siguiente fórmula para el área de un manto cónico:

$$\text{Area manto cónico} = \pi r l \tag{8}$$

Aplicando esta fórmula al caso del manto cónico de la figura, para el cual $r = m$ y $l = \sqrt{1+m^2}$, tenemos:

$$\text{Area manto cónico} = \pi m \sqrt{1+m^2} \tag{9}$$

Por su parte, el área del manto cilíndrico de la figura queda dada por

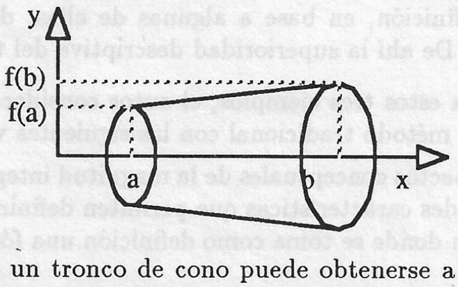
$$\text{Area manto cilíndrico} = 2\pi m \times 1 .$$

Si la propiedad de acotación asociada a la forma integral (7) rigiera para el área de los dos mantos que estamos considerando, la siguiente desigualdad debería ser válida para todo $m > 0$:

$$\text{Area manto cónico} \leq \text{Area manto cilíndrico},$$

es decir, la desigualdad $\pi m\sqrt{1+m^2} \leq 2\pi m$ debería ser cierta para todo $m > 0$. Pero, esta desigualdad equivale a $1+m^2 \leq 4$, lo cual es falso cuando $m > \sqrt{3}$. Esto muestra que propiedad de acotación asociada a la forma integral (7) es **inaceptable** como propiedad del área de los mantos de revolución y, por ello, la forma integral (7) originada en el modelo cilíndrico no representa en general al área de los mantos de revolución alrededor del eje x.

Esta discusión pone de manifiesto la importancia del análisis e interpretación de las propiedades características de la forma integral que se obtiene a partir de un modelo elemental, ya que permite decidir su aceptación o rechazo. Como hemos visto, el modelo de manto cilíndrico produce una fórmula inaceptable, pero en el curso de su análisis ha aparecido de manera natural un modelo elemental más general que el del manto cilíndrico: el modelo cónico. Esto nos sugiere rehacer el trabajo, partiendo ahora de un modelo de este último tipo como nuevo modelo elemental.



El área del manto de un tronco de cono puede obtenerse a partir de (9), resultando la fórmula elemental:

$$\begin{aligned}\text{Area tronco de cono} &= 2\pi f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)\sqrt{(b-a)^2+\big(f(b)-f(a)\big)^2}\\ &= 2\pi\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\, f\Big(\frac{a+b}{2}\Big)(b-a) \qquad (10)\end{aligned}$$

Ahora, debido a que f es un polinomio de grado no mayor que 1, su valor en el punto medio del intervalo $[a,b]$ es igual a su *valor medio* en dicho intervalo, es decir:

$$f\Big(\frac{a+b}{2}\Big) = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\text{Area tronco de cono} &= 2\pi\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\int_a^b f(x)\,dx\\ &= \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+\big(f'(x)\big)^2}\,dx \qquad (11)\end{aligned}$$

Poniendo $\kappa(x) = 2\pi\sqrt{1+(f'(x))^2} \geq 0$ y $\varphi(x) = f(x) \geq 0$, el teorema D afirma que la forma integral (11) está caracterizada por las siguientes propiedades:

— La propiedad de aditividad nos dice que si se divide un manto de revolución en dos submantos, la suma de las áreas de éstos es igual a la de aquel;

— La propiedad de acotación tipo III afirma que el área del manto correspondiente a $f \geq 0$ en $[a, b]$, está comprendida entre el área del tronco de cono de radio medio minimal y longitud minimal de generatrices en $[a, b]$, y el área del tronco de cono de radio medio maximal y longitud maximal de generatrices en $[a, b]$.

Estas propiedades y el hecho que, según el teorema D, ellas determinan unívocamente a (11) justifican *definir* el área del manto de revolución generado al rotar el gráfico de $f \geq 0$ alrededor del eje x, como la magnitud caracterizada por las dos propiedades que acabamos de discutir. Junto con esta definición, queda establecida la siguiente fórmula general par *cálculo* de dicha área:

$$\boxed{\text{Area manto de revolución en torno al eje } x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\, dx}$$

donde se supone que f es positiva y que posee derivada $f' \in \mathcal{R}_J$.

Nota: En este ejemplo, las propiedades de acotación I y II no son suficientemente intuitivas como para justificar una definición, en base a algunas de ellas, del área de los mantos de revolución en torno al eje x. De ahí la superioridad descriptiva del teorema D en este caso.

Como comentario final a estos tres ejemplos, el autor considera que el método expuesto constituye una alternativa al método tradicional con las siguientes ventajas:

i) Se hace énfasis en los aspectos conceptuales de la magnitud integral a calcular, obteniendo un conjunto de propiedades características que permiten definirla. Esto, en contraste con el método tradicional, en donde se toma como definición una fórmula plausible o se parte de axiomas dados.

ii) Cada diseño con el método expuesto es más sistemático y generalmente más breve qu l correspondiente al método usual. Esto permite acortar los tiempos lectivos de exposición y abarcar más aplicaciones.

iii) Queda claro que las fórmulas de cálculo general son generalizaciones integrales de fórmulas de cálculo elemental que comparten con aquellas ciertas propiedades características. Dichas propiedades son precisamente las que permiten distinguir entre dos o más posibles modelos elementales, cuál es el que contiene suficientes atributos de generalidad.

4. Otra aplicación del Teorema C.

Teorema E. (Un teorema general de cambio de variable). Sea $g \in \mathcal{R}_J$ tal que $g(x) \geq 0$ para todo $x \in J$. Sea G cualquier pre–primitiva de g en J. Sea $\phi : G(J) \longrightarrow \mathbb{R}$ Riemann–integrable en los subintervalos compactos del intervalo $G(J)$. Entonces:

$$\int_a^b \phi(G(x))\, g(x)\, dx = \int_{G(a)}^{G(b)} \phi(y)\, dy\,. \tag{12}$$

PRUEBA. Sea $f = \phi \circ G$. Consideremos la forma integral aditiva, definida para todos A, $B \in G(J)$, mediante:

$$\nu(a, b) = \int_A^B \phi(y)\, dy\,.$$

Tenemos que ν satisface la propiedad de acotación (1), por lo que si $L = [s, t]$ (con $s < t$) es cualquier subintervalo compacto de $G(J)$, se verifica:

$$\inf_{y \in L} \phi \le \frac{\nu(s, t)}{t - s} \le \sup_{y \in L} \phi\,.$$

Debido a que G es creciente en J, se tiene: $G^{-1}(G(K)) \subseteq K$ para todo subintervalo K de J. Por esto: $\inf_{x \in K} f(x) \le \inf_{y \in G(K)} \phi$ y $\sup_{y \in G(K)} \phi \le \sup_{x \in K} f(x)$ para cualquier subintervalo compacto K de J. Como G es continua, $L = G(K)$ es un subintervalo compacto $[s, t]$ de $G(J)$ y toda vez que $t - s \neq 0$, podemos escribir:

$$\inf_{x \in K} f(x) \le \frac{\nu(s, t)}{t - s} \le \sup_{x \in K} f(x)\,. \tag{13}$$

Si $K = [a, b]$ con $a < b$, para $L = G(K) = [s, t]$ tenemos $s = G(a)$ y $t = G(b)$, por lo que la desigualdad (13) se escribe

$$\inf_{x \in [a,b]} f(x) \le \frac{\nu(s, t)}{G(b) - G(a)} \le \sup_{x \in [a,b]} f(x)\,,$$

y el teorema C conduce a $\int_a^b f(x) g(x)\, dx = \int_{G(a)}^{G(b)} \phi(y)\, dy$, es decir:

$$\int_a^b \phi(G(x)) g(x)\, dx = \int_{G(a)}^{G(b)} \phi(y)\, dy \quad \blacksquare$$

Observación. Esta es una fórmula general de cambio de variable en términos de la noción de pre–primitiva. Para obtener la fórmula habitual en términos de la noción de derivada, basta agregar la hipótesis de continuidad para g y aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, tendremos: $g = G'$; en este contexto (12) se reduce a la fórmula habitual de cambio de variable:

$$\int_a^b \phi(G(x)) G'(x)\, dx = \int_{G(a)}^{G(b)} \phi(y)\, dy\,.$$

En relación con la continuidad, en (12) sólo se pide que g y ϕ sean Riemann–integrables en los subintervalos compactos de J y de $G(J)$ respectivamente. Esto se compara favorablemente con las hipótesis más fuertes de continuidad en los teoremas habituales de cambio de variable del Análisis Real para la integral de Riemann (ver [6], por ejemplo).

5. Referencias.

[1] LARSON, R. E. y HOSTETLER, R. P.: *Cálculo y Geometría Analítica.* McGraw–Hill, Segunda edición, México, 1986.

[2] EDWARDS, C. H. y PENNEY, D. E.: *Cálculo y Geometría Analítica.* Prentice Hall, Segunda edición en español, México, 1987.

[3] APOSTOL, TOM: *Calculus*, v. 1. Reverté, Segunda edición en español, España, 1986.

[4] ALARCÓN A., WINSTON: *Area y multiplicación.* Las Matemáticas y su Enseñanza, v. 2, No. 3, San José, Costa Rica, 1990.

[5] ALARCÓN A., WINSTON: *Integral y Primitivas de Riemann.* Ciencias Matemáticas, v. 2, No. 2, U. C. R., San José, Costa Rica, 1991.

[6] APOSTOL, TOM: *Análisis Matemático.* Reverté, Segunda edición en español, España, 1977.