CB-596

UNA PRUEBA DEL CASO 0/0 DE LA REGLA DE L'HÔPITAL A PARTIR DE UNA REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Helen Alfaro Víquez he.tati.07@hotmail.com
Guillermo Ramírez Montes grm1905@gmail.com
Universidad de Costa Rica

Núcleo temático: Enseñanza y aprendizaje de la Matemática en las diferentes modalidades y niveles educativos.
Modalidad: CB
Nivel educativo: Universitario.
Palabras clave: Regla de L'Hôpital, prueba, representación gráfica, diseño de clase.

Resumen

Lograr un balance pertinente entre la teoría y la práctica es uno de los principales retos de la educación matemática superior. Algunos cursos priorizan lo procedimental, generando una ausencia de herramientas teóricas a partir de las cuales se justifican los procedimientos. Con la intención de atender esta problemática, en el proyecto ED-2927 IREM de la Universidad de Costa Rica, se diseñó una lección para introducir la Regla de L'Hôpital en un curso de "Cálculo en una variable". El diseño plantea el uso de una representación gráfica y una serie de preguntas que orientan la deducción de la regla de L'Hôpital para la forma indeterminada 0/0. A la vez involucra conocimientos previos como: operaciones algebraicas, el cálculo de la pendiente de una recta, la noción de límite, la ecuación de la recta tangente en un punto y la interpretación geométrica de la derivada. La implementación evidenció concepciones erróneas de los estudiantes con respecto a conocimientos previos que se convirtieron en obstáculos para resolver las tareas. Sin embargo, con una mediación pertinente del profesor los estudiantes lograron deducir la regla, y manifestaron interés en desarrollar su aprendizaje a partir de experiencias de esta naturaleza.

Introducción

El estudio del análisis matemático o cálculo en secundaria y en los primeros años de universidad ha demostrado ser difícil para los estudiantes (Roberts y Speer, 2001). En la mayoría de los casos, los aprendizajes de los estudiantes se limitan a la reproducción de procedimientos algorítmicos desarrollando poca comprensión de los conceptos matemáticos. Con respecto a lo anterior, Artigue (1995) menciona que la enseñanza del cálculo en las universidades

> tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Este fenómeno se convierte en

ISBN 978-84-945722-3-4

> un círculo vicioso: para obtener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial ya que es lo que se evalúa. (p.97)

En la mayoría de los cursos de cálculo en la Universidad de Costa Rica dirigidos a estudiantes de Ingenierías, Economía o Ciencias de la Salud, encontramos el panorama anterior. La mayoría de las clases para dichos cursos se desarrollan con una dinámica de enseñanza tradicional: el docente explica los contenidos, desarrolla unos cuantos ejemplos y luego asigna una lista de ejercicios, que en el mejor de los casos se comenta la siguiente clase. Según Salinas y Alanís (2009), este modelo de enseñanza trae como consecuencia "elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas" (p.359).

Con la intención de involucrar al estudiante en el desarrollo de la lección y abordar un método de enseñanza no tradicional, se plantea este diseño dirigido a que el estudiante conozca las justificaciones de las reglas que aplica para resolver los cálculos algebraicos. El objetivo de la actividad es que los estudiantes puedan intuir la demostración geométrica del caso 0/0 de la regla de L'Hôpital, con la ayuda de una guía de preguntas y apoyo gráfico, así como presentar una conexión del objeto matemático desde la parte algebraica y la parte gráfica simultáneamente.

A continuación, se presentan algunos aportes teóricos que fundamentan el diseño, los pasos que se llevaron a cabo para la construcción, el diseño como tal y algunos resultados de la aplicación.

Marco Teórico

La historia de la matemática permite constatar que el cálculo, al igual que otras ramas de la matemática han sufrido cambios en cuanto a su enseñanza y aprendizaje; pasando por reformas que propusieron una enseñanza del cálculo formal en los años 70´s, a una reforma de enseñanza orientada a promover un enfoque constructivista con más participación del estudiante en los 80´s, haciendo uso de exploraciones gráficas y numéricas enfocadas a reforzar la noción intuitiva de cálculo, pero dejando de lado la parte formal (Artigue, 1995). Con la intención de entender este fenómeno, en los últimos años se han realizado diversos estudios enfocados en mejorar *cómo enseñar* o *qué enseñar* en los cursos de cálculo (Artigue,

ISBN 978-84-945722-3-4

1995; Robert y Speer, 2001; Salinas y Alanís, 2009), evidenciando que la matemática ofrecida en los cursos orientados a carreras, donde el objetivo es disponer fundamentalmente de herramientas matemáticas, no logra que el estudiante comprenda los niveles mínimos de teoría de los conceptos matemáticos abordados. Esto se traduce en dificultades para entender y manipular los conceptos matemáticos en sus respectivas áreas de estudio. En particular, Artigue (1995) ha señalado en diferentes trabajos la situación preocupante con respecto a la enseñanza del cálculo, manifestando que no ha habido grandes cambios, y apuntando que si bien es cierto el manejo algorítmico permite a los estudiantes resolver algunos problemas, no es suficiente para la comprensión de los conceptos y alcanzar las formas de pensamiento deseadas.

Según Artigue (1995), esta enseñanza del cálculo ha llevado al surgimiento de dificultades; las cuales pueden clasificarse en tres grandes grupos: aquellas asociadas a la conceptualización y a la formalización de la noción de límite; las relacionadas con los modos de pensamiento erróneos puramente algebraicos y a las especificidades del trabajo técnico en el cálculo; y las que se refieren a la complejidad de los objetos básicos del cálculo (números reales, sucesiones, funciones) y a la conceptualización de estos.

En particular, en cuanto a la regla de L'Hôpital, su demostración y enseñanza han evolucionado y han sido objeto de estudio hasta el día de hoy dada su utilidad para trabajar límites, cuya resolución va más allá de procesos algebraicos (Palma, Gonzáles, 2013). Así por ejemplo, Cantoral, Soto y Silva (2009) en su estudio hacen un análisis histórico/epistemológico de la demostración geométrica de la Regla de L'Hôpital, destacando que la naturaleza de donde emerge el problema es gráfica, distinto a la forma en que se maneja en el discurso escolar, y manifestando a su vez que está idea gráfica proviene de mucho antes de L'Hôpital, específicamente, del tratamiento leibniziano de trabajar los diferenciales bajo el "análisis gráfico de curvas que se aproximan al valor nulo" (p.1). A partir de este análisis Cantoral et al. (2009) hacen un diseño de aula orientado a "promover una mejor aproximación al teorema de L'Hôpital" (p.4), utilizando representaciones gráficas. Para Palma et al. (2013) la idea geométrica de la regla de L'Hôpital se ha perdido en los libros de texto, a pesar de su forma sencilla y visual de aprendizaje evidenciada en la primera demostración a la regla propuesta por Jean Bernoulli (1667-1748).

ISBN 978-84-945722-3-4

Según Farmaki y Paschos (2007), estas ideas de donde surgen los problemas del pasado deben ser usadas en la actualidad en las aulas, como medio para proponer actividades de enseñanza diferentes que promuevan el conocimiento matemático.

Por su lado Kaput (1992), destaca que los registros numérico y gráfico se convierten en abordajes importantes para introducir el objeto matemático, buscando una primera aproximación gráfica o numérica, dinámica e interactiva al cálculo, para luego introducir la parte algebraica. Para lo anterior se requiere previamente de una propuesta adecuada de tareas que lleven a un aprovechamiento del aprendizaje del estudiante. Ponte (2005), propone que las tareas de exploración cobran gran importancia en este contexto de búsqueda de una primera aproximación con el objeto matemático, pues son tareas abiertas y de duración media, pudiendo incluir ambientes de aprendizaje, tanto propios de la matemática pura, como también ambiente de realidad y semi-realidad (Skovsmose, 2002). Además, estas tareas permiten ambientes de alto nivel cognitivo y involucran procedimientos significativos que se conectan con varios conceptos al mismo tiempo (NCTM, 2014). Al mismo tiempo propician la construcción por parte del estudiante de su propio conocimiento (Skovsmose, 2002).

Metodología

El presente diseño de clase fue realizado dentro del marco del proyecto ED-2927 IREM-SJ-UCR: Investigación y Formación Continua en Enseñanza de la Matemática de la UCR, por dos profesores universitarios de matemática y un estudiante de la carrera de Enseñanza de la Matemática. El proceso del diseño se inspira en las orientaciones de la Japanese Lesson Study y se llevó a cabo siguiendo cinco etapas.

En la primera etapa se eligieron el contenido, el objetivo y las habilidades a involucrar en el diseño, además se identificaron los conocimientos previos requeridos y los conocimientos futuros relacionados con el contenido seleccionado. Posteriormente, en la segunda etapa se realizó una búsqueda bibliográfica sobre diferentes maneras en que se ha abordado la enseñanza de la Regla de L'Hôpital, con el objetivo de identificar ideas que contribuyan al diseño. La tercera etapa consistió en analizar e identificar las principales dificultades y errores presentados por los estudiantes de cálculo al estudiar la Regla de L'Hôpital, a partir de la experiencia de los profesores proponentes. En la cuarta etapa los docentes realizaron propuestas para estudiar el contenido considerando los resultados de las etapas anteriores,

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

seleccionando una en la que los estudiantes, utilizando sus conocimientos previos sobre el cálculo de límites y las definiciones de la derivada, pudieran intuir una prueba de la regla de L'Hôpital. En la quinta etapa se realiza el diseño de la lección, especificando los roles de cada participante y diseñando la ayuda visual y la guía de preguntas.

Descripción del Diseño

El diseño está conformado por cuatro episodios. Además, considerando los posibles errores y estructura de la actividad, se diseñó una tarea previa para que los estudiantes se familiarizaran con la construcción de la ecuación de la recta, esto a partir del método punto pendiente, ya que era el más conveniente para resolver la guía de preguntas. Los episodios se describen a continuación.

Episodio 1: En el primer episodio el docente organiza grupos de trabajo y entrega a los estudiantes la Guía I (ver anexo 1). Es importante señalar que, como la intención de esta actividad es introducir la regla de L'Hôpital, los estudiantes aun no la conocen, por lo que deben responder las preguntas utilizando sus conocimientos previos. En la guía se presentan las gráficas de las funciones f y g, las cuales se intersecan en *(a, 0)*. Partiendo de la gráfica se propone que los estudiantes determinen el par ordenado donde se intersecan dichas gráficas, y a continuación encuentren la pendiente de la recta tangente a cada curva empleando el concepto de derivada y el par ordenado de intersección de ambas curvas. Cuando ya tienen construidas las ecuaciones de las rectas tangentes, se les muestra una secuencia de imágenes de las gráficas de f y g y sus respectivas rectas tangentes. Cada imagen representa un acercamiento a estas gráficas alrededor del punto de tangencia (a, *0)*, de manera que los participantes puedan estudiar el comportamiento de la gráfica de la función y su respectiva recta tangente en un vecindario de $x = a$ (Anexo 2). El objetivo es que los estudiantes identifiquen que alrededor de $x = a$ la gráfica de f y su recta tangente tienden a ser la misma recta, sucediendo lo mismo con g y su recta tangente en $x = a$; de manera que, si las gráficas tienden a ser las mismas, entonces en el límite se pueden intercambiar los criterios.

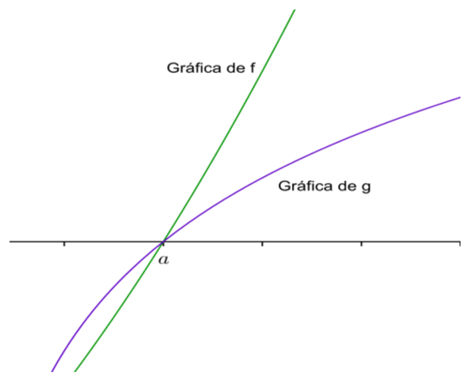


Figura 1: Gráfica Guía I.

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Posteriormente se les solicita que escriban el $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ utilizando la relación encontrada en el paso anterior, del cual deberían obtener $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)(x-a)}{g'(x)(x-a)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. A partir de este paso, el alumno podría conjeturar la forma de la regla de L'Hôpital. Sin embargo, para enfatizar las condiciones de la misma se les solicita que determinen la forma indeterminada del $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Durante este episodio el docente debe pasar por los diferentes grupos y monitorear el trabajo que están realizando; así mismo, realizar preguntas generadoras que ayuden a los estudiantes a avanzar.

Episodio 2: Luego de completar la Guía I se realiza una puesta en común, en la que los grupos de trabajo comparten sus respuestas y los principales resultados de sus discusiones. Durante la plenaria el profesor debe promover que los estudiantes evidencien las conexiones entre los diferentes pasos y recalcar la importancia de las condiciones necesarias para aplicar el resultado $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Episodio 3: En el tercer episodio los estudiantes trabajan con una guía muy similar a la primera, excepto que las funciones f y g se intersecan en el punto $(a,k), k \neq 0$. Por lo tanto, se espera que los estudiantes identifiquen que la igualdad que encontraron en el primer episodio $\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ no se cumple en este caso, ya que el límite no posee una forma indeterminada.

Episodio 4: Este episodio es similar al episodio 2. Los estudiantes, con el profesor como mediador, exponen las respuestas obtenidas. El docente pide a los estudiantes que justifiquen sus respuestas y aclara las dificultades evidenciadas. El docente debe resaltar las diferencias entre las guías trabajadas y procurar que los estudiantes reconozcan las implicaciones de esas diferencias.

Luego de la puesta en común, y por tanto de acabada la propuesta, el docente realiza la institucionalización, presentando la regla de L'Hôpital formalizada, es decir; con las respectivas condiciones (hipótesis) y proceso de aplicación.

Algunos resultados a partir de la implementación

La implementación del diseño se llevó a cabo con un grupo de estudiantes de Ingeniería Eléctrica durante el primer semestre del año 2015, quienes como parte de su programa de estudio deben llevar el curso Cálculo I (límites, derivación e integración en una variable) durante el primer año de estudios. La implementación fue videograbada, para poder realizar el análisis posterior.

ISBN 978-84-945722-3-4

Uno de los principales aspectos identificado en la implementación fue el conflicto que algunos estudiantes poseen con respecto a la interpretación de la derivada, pues se observó que cometen el error de relacionar la derivada directamente con la ecuación de la recta tangente, en lugar de relacionarla con la pendiente de la recta tangente en un punto según la definición. Otro problema vinculado con la derivada es que los estudiantes no tenían claro cuál notación usar para referirse a la derivada en un punto. Algunos simplemente la representaron con $f'(x)$, mientras que otros utilizaron $f'(x)(a, 0)$.

Ahora bien, a pesar de los obstáculos mencionados, la mayoría de los estudiantes lograron llegar a la conclusión esperada utilizando la ecuación de la recta tangente, observándose que las representaciones gráficas fueron de gran utilidad para que los estudiantes identificaran lo que sucedía con las gráficas alrededor de $x = a$. Esto se evidenció en la respuesta a la pregunta cuatro de la Guía I, relativa a relación de las rectas tangentes con las gráficas de las funciones f y g, conforme observado en uno de los momentos de discusión:

Profesor:	*(…) Que se puede decir del comportamiento de las gráficas f y g y sus respectivas tangentes alrededor de $x = a$?*
Estudiante:	*Llegamos a la conclusión de que las tangentes llegan a coincidir con las rectas f y g alrededor de $x = a$, porque a menor intervalo que va agarrando llegan a coincidir en este punto… en este vecindario las tangentes con las rectas.*

Así por ejemplo, un estudiante, buscando la manera de utilizar la ecuación de la recta tangente, despeja la derivada de la expresión $\left(\frac{y-0}{x-a} = f'(x)\right)$ para poder sustituirla en el límite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ y obtener $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Es importante mencionar que en la puesta en común de los episodios 3 y 4, el profesor tuvo que participar más de lo esperado, para ordenar las ideas de los estudiantes y aclarar los errores cometidos en los primeros episodios.

Durante la plenaria del episodio 4, los estudiantes fueron capaces de expresar claramente, de forma verbal y simbólica, el por qué la regla se cumple en el primer caso y en el otro no, considerando la forma de los pares ordenados de la intersección.

Estudiante	*Profe, pero es que así no se puede. Porque digamos si usted ve la recta tangente a* $\boldsymbol{f}$ *…digamos en ese caso sí se puede porque usted tiene que la* $\boldsymbol{y}$ *sub cero es cero, pero en este caso usted tiene que la* $\boldsymbol{y}$ *sub cero es* $\boldsymbol{k}$*, entonces si usted pasa al otro lado, pasa a sumar y como es una suma no se puede cancelar.*

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Por su parte, al final de la discusión, cuando el docente pregunta por la forma del límite (indeterminada o no indeterminada), que en el segundo caso no era indeterminada, un estudiante considerando el límite en el que utilizaban las derivadas argumentó:

Estudiante	*Bueno nosotros no sabemos si se indetermina, porque al ser una pendiente la pendiente siempre va a ser cero cuando sea una recta horizontal.*

A pesar de que el estudiante estaba confundiendo la idea de forma indeterminada de un límite con la idea de que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función sea cero, es importante rescatar que su comentario está relacionado con una de las condiciones de la regla de L'Hôpital, la cual indica que la derivada del denominador evaluada en el punto debe ser distinta de cero.

Conclusiones y Recomendaciones

Al notar las confusiones de los estudiantes sobre los conceptos de derivadas, consideramos necesario asignar una tarea previa enfocada a este tema, que si bien es cierto es un conocimiento previamente estudiado en el curso, se identificó durante la propuesta que los estudiantes no logran aplicar el concepto en diferentes contextos. Otra posible modificación al diseño sería cambiar el orden de las preguntas de la Guía I, ya que consideramos que averiguar la indeterminación que posee el límite como punto dos, podría dar más sentido a la búsqueda de una forma alternativa. Además, es necesario solicitar al estudiante que realice un resumen o esquema en donde conecte lo que se realizó en cada paso.

Por su parte, el diseño y la implementación evidenciaron que la representación gráfica ayudó a que el estudiante hiciera conexiones entre el criterio implícito de la función y el criterio de las rectas tangentes respectivas, permitiendo un acercamiento intuitivo a la deducción de regla de L'Hôpital a través de un registro gráfico.

Con respecto a la práctica del docente, consideramos necesario para posteriores aplicaciones que este plantee más preguntas generadoras, con el fin de promover la participación del estudiante en la construcción de su propio conocimiento.

ISBN 978-84-945722-3-4

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Burghes, D., y Robinson, D. (2009). Lesson Study: Enhancing Mathematics Teaching and Learning. Berkshire: CFBT Education Trust.

Cantoral, R., Soto, D., & Silva, H. (2009). Reconstrucción del Significado Matemático Germinal del Teorema de L'Hôpital: Prácticas de un Seminario. *6^to^ Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, CIBEM*. Puerto Montt, Chile.

Farmaki, V., & Paschos, T. (2007). Employing genetic 'moments' in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics* 66, 83-106.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In Grouws, D. (Ed.) *Handbook on research in mathematics teaching and learning*. 515-556. New York: Macmillan.

Ortega, G. M. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 3(2), 131-170.

Palma, E., & González, F. A. (2013). Enseñanza de un objeto matemático: una primera aproximación a la evolución histórica de la regla de L'Hôpital. Universidad Politécnica de Madrid.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento curricular (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Robert, A., & Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of calculus/elementary analysis. In The teaching and learning of mathematics at university level (pp. 283-299). Springer Netherlands.

Salinas, Patricia, & Alanís, Juan Antonio. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 12(3), 355-382.

Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.

ISBN 978-84-945722-3-4

Anexos

Anexo 1

Guía I

A continuación, se presenta la gráfica de las funciones f y g alrededor de $x = a$.

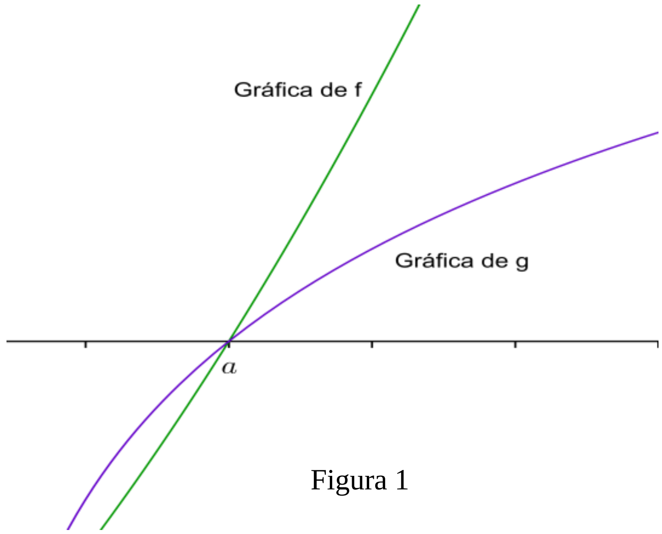


Figura 1

Considerando la figura anterior responda las siguientes preguntas.

1. Determine las coordenadas del punto de intersección de f y g.

2. ¿Qué nombre recibe la pendiente de la recta tangente de la gráfica de f y g respectivamente en el punto de intersección?

3. Determine la ecuación de las rectas tangentes a f y g en el punto de intersección.

4. En el *anexo I* se presenta una secuencia de las gráficas de f y g y sus respectivas rectas tangentes en $x = a$. En cada imagen se observan estas gráficas en un intervalo cada vez más pequeño que contiene a $x = a$ (un acercamiento a la Figura 1). Considerando el *anexo I*, ¿qué se puede decir del comportamiento de las gráficas de f y g y sus respectivas rectas tangentes alrededor de $x = a$? Discútalo con sus compañeros.

5. Utilizando la información de las gráficas y lo discutido en el punto 4, exprese el límite $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ de una forma alternativa que vincule los criterios de las gráficas de las funciones con los criterios de sus respectivas rectas tangentes.

6. ¿Qué tipo de indeterminación presenta $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 2

Anexo I

Imagen 1	**Imagen 2**

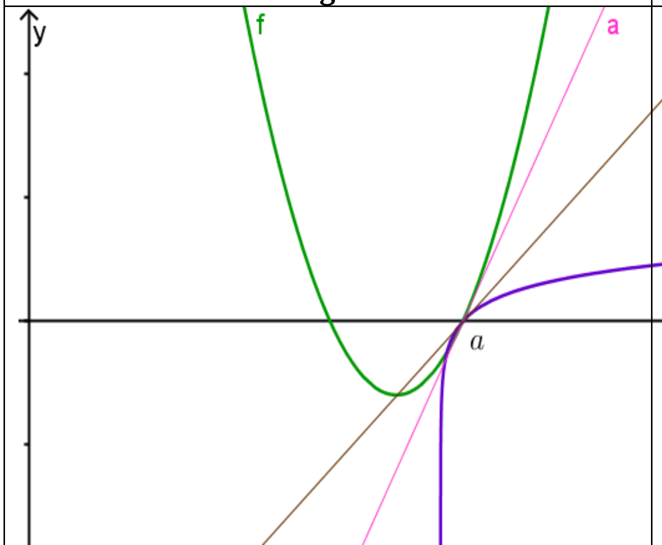
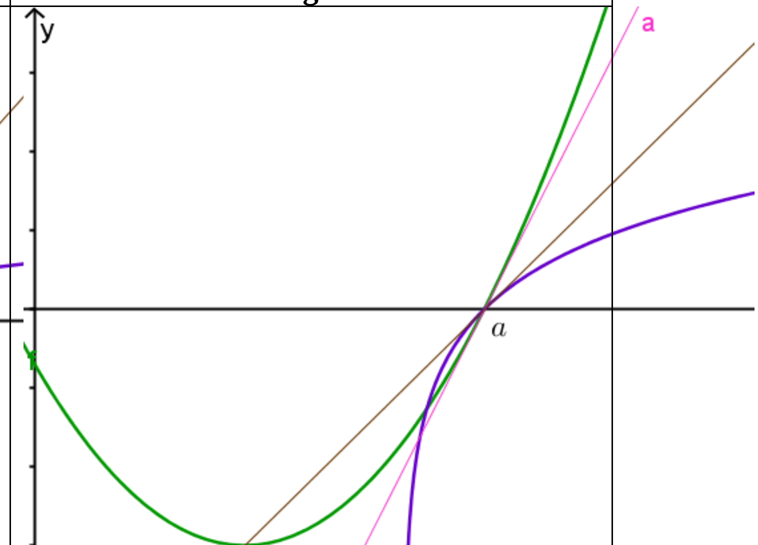
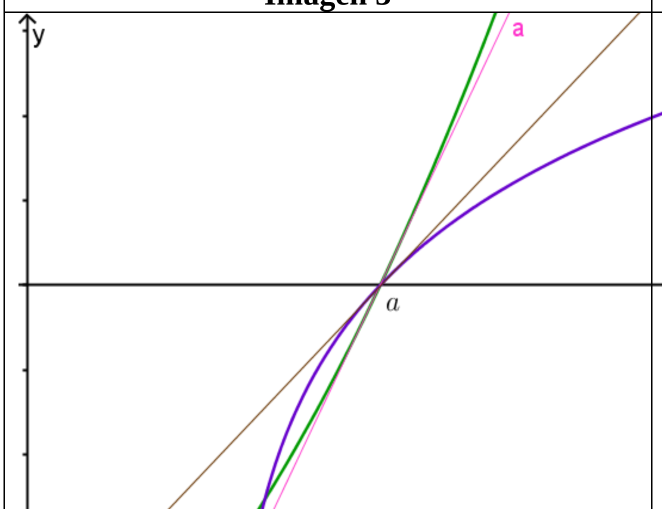
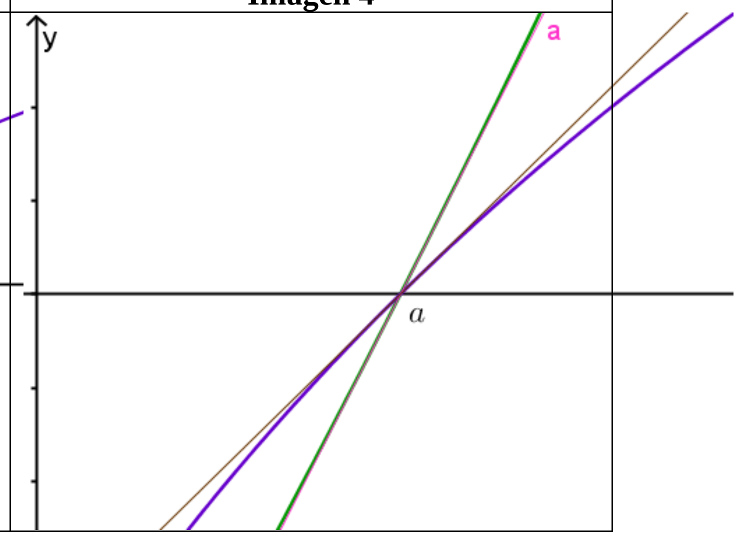

	

Imagen 3	**Imagen 4**
	

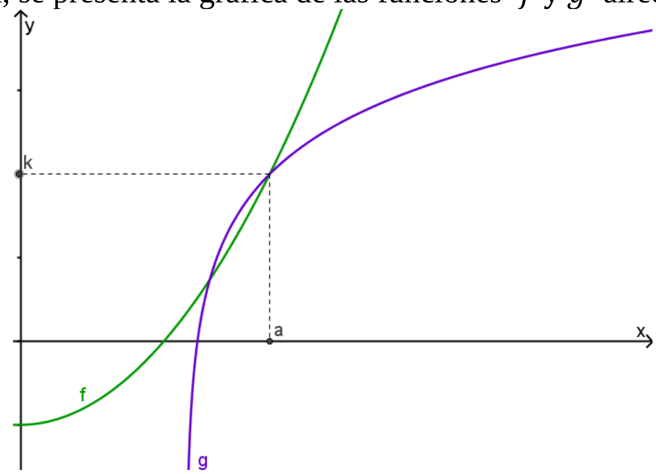
Verde: Gráfica de f
Rosado: Recta tangente a f en $x = a$
Morado: Gráfica de g
Negro: Recta tangente a g en $x = a$

ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 3

Guía II

A continuación, se presenta la gráfica de las funciones f y g alrededor de $x = a$.



Responda lo que se le solicita.

1. Determine las coordenadas del punto de intersección de f y g.

2. ¿Qué es la pendiente de la recta tangente de la gráfica de f y g respectivamente en el punto de intersección?

3. Determine la ecuación de las rectas tangentes a f y g en el punto de intersección.

4. En el *anexo II se* presenta una secuencia de las gráficas de f y g y sus respectivas rectas tangentes en $x = a$. En cada imagen se observan estas gráficas en un intervalo cada vez más pequeño que contiene a $x = a$ (un acercamiento a la imagen 1). Considerando el *anexo II*, ¿qué se puede decir del comportamiento de las gráficas de f y g y sus respectivas rectas tangentes alrededor de $x = a$? Discútalo con sus compañeros.

5. Utilizando la información de las gráficas y lo discutido en el punto 4, exprese el límite $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ de una forma alternativa que vincule los criterios de las gráficas de las funciones con los criterios de sus respectivas rectas tangentes.

6. La estrategia utilizada en la guía anterior comprobó que $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ es igual a calcular $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. Basándose en el punto anterior, ¿se puede concluir lo mismo, es decir; $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$? ¿Por qué? ¿Qué tipo de indeterminación presenta $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$?

VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS.
ISBN 978-84-945722-3-4

Anexo 4

Anexo II

Imagen 1

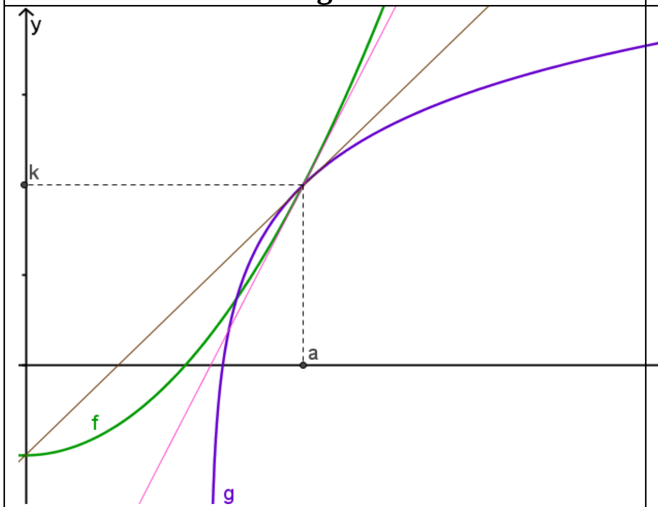


Imagen 2

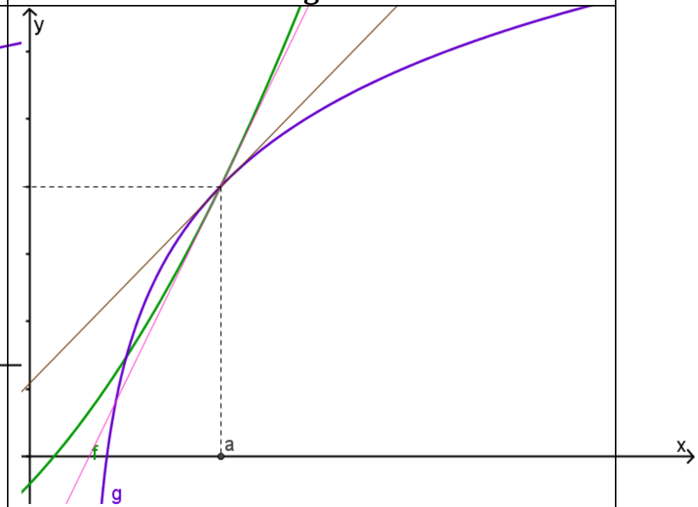


Imagen 3

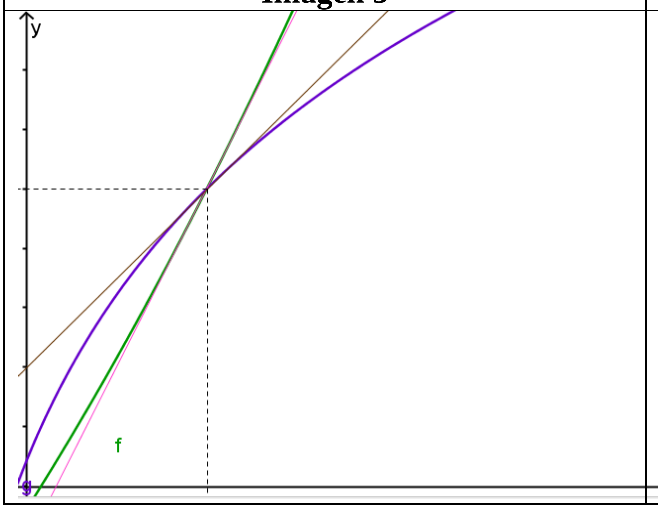
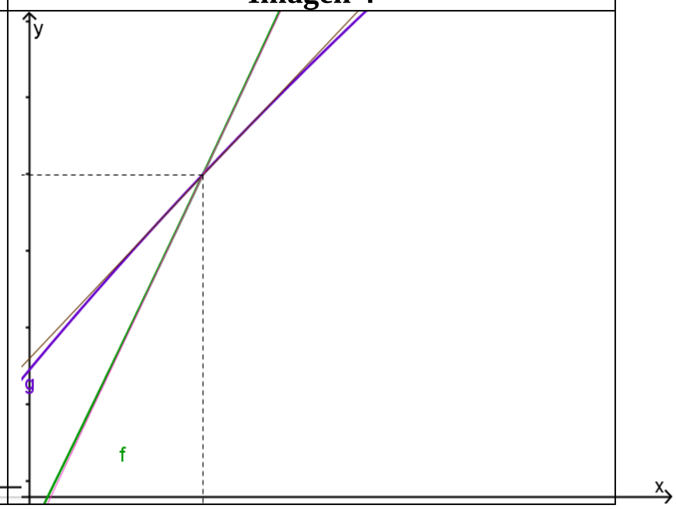


Imagen 4



Verde: Gráfica de f
Rosado: Recta tangente a f en $x = a$
Morado: Gráfica de g
Negro: Recta tangente a g en $x = a$

ISBN 978-84-945722-3-4