

MOVILIZACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES A PARTIR DE CONTEXTOS EDUCATIVOS DE MODELADO MATEMÁTICO

Guillermo Ramírez Montes

Universidad de Costa Rica

Costa Rica

Guillermo.ramirez_m@ucr.ac.cr

Aprendizaje del álgebra lineal; educación universitaria; contextos de modelado matemático

Resumen.

Este estudio es parte de otro estudio investigativo más amplio, visa analizar la aplicación de tareas de modelado matemático en un curso de álgebra lineal de la Universidad de Costa Rica para el fomento de la aplicabilidad de los conceptos en contextos extra matemáticos y el desarrollo de competencias asociadas al proceso de modelación. Dos grupos de estudiantes universitarios trabajaron las tareas en diferentes semestres. En particular, este estudio se enfoca en análisis de resoluciones de una de las tareas, asociada al flujo de agua por tuberías y el flujo vehicular. Se sigue una metodología de investigación cualitativa e interpretativa.

Introducción

El estudio de conceptos y procesos de resolución asociados a la temática de sistemas de ecuaciones lineales constituye un conocimiento importante para el aprendizaje de otros conceptos del álgebra lineal y para el estudio de diversas situaciones reales que surgen en ciertos campos extra matemáticos (Costa & Rossignoli, 2017). A pesar de que las investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal han aumentado en las últimas décadas (Plaxco & Wawro, 2015), este crecimiento investigativo no es observable en el contexto de Costa Rica, donde existe la necesidad de más estudios relativos a esta área, incluyendo a nivel universitario. Considerando la abstracción asociada a algunos conceptos del álgebra lineal y los ambientes de modelación matemática como una alternativa para superar dicha abstracción y fomentar competencias de modelación en el estudiantado (Costa & Rossignoli, 2017), este estudio objetiva caracterizar los procesos de modelación desarrollados por dos grupos de estudiantes cuando trabajan una tarea envolviendo modelos basados en sistemas de ecuaciones lineales.

Marco teórico

Los fundamentos teóricos están basados en recomendaciones de grupos de investigación sobre cómo enseñar tópicos de álgebra lineal (Carlson et al. 1993); la modelación matemática desde una perspectiva educacional para consolidar conceptos y promover nuevos aprendizajes (Kaiser & Sriraman, 2006); y estudios previos desarrollados entorno al aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales con ambientes de modelación (Possani et al. 2010). En cuanto los dos primeros elementos fundamentan la importancia del contexto real, y de la modelación matemática como tal ambiente, para superar la abstracción asociada a conceptos de álgebra lineal; el tercer elemento hace referencia a uno de los escasos estudios que se pueden encontrar en la literatura enfocado en el aprendizaje de sistemas de ecuaciones lineales usando contextos reales, texto tomado como referencia para la construcción de las dos tareas trabajadas en este estudio.

Metodología

El estudio es de naturaleza cualitativa, con interpretaciones desarrolladas por el autor sobre las evidencias que presenta el estudiantado sobre el trabajo desarrollado. Los instrumentos de recolección fueron las resoluciones escritas de dos grupos de estudiantes, la mayoría de carreras asociadas a Ingenierías. Ambos grupos de estudiantes trabajaron la tarea de modelación en parejas, siendo el contexto real de la tarea diferente para cada grupo. El primer grupo cursó la materia MA1004 álgebra lineal de la Universidad de Costa Rica en el primer semestre del 2021, mientras que el segundo grupo cursó la misma materia en el segundo semestre del 2021. Ambos grupos con características académicas semejantes.

En cuanto a la tarea, se le presenta al estudiantado una situación de flujo de agua y flujo vehicular, respectivamente para cada grupo, donde deben encontrar los posibles valores de flujo de los trayectos desconocidos.

En la figura 1 y figura 2 se puede observar las situaciones de flujo presentadas a cada grupo. Mientras que en la figura 1 la información ya es suministrada en la figura, en la figura 2 la información suministrada debió ser colocada por el estudiantado a partir de información suministrada en el enunciado de la tarea, resultado de un análisis previo elaborado sobre la tarea 1 para mejorar la propuesta presentada en la tarea 2. Otras mejoras fueron también consideradas a fin de fomentar competencias de modelación.

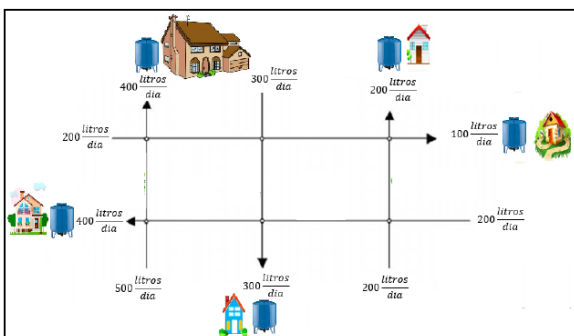


Figura 1. Situación planteada grupo 1

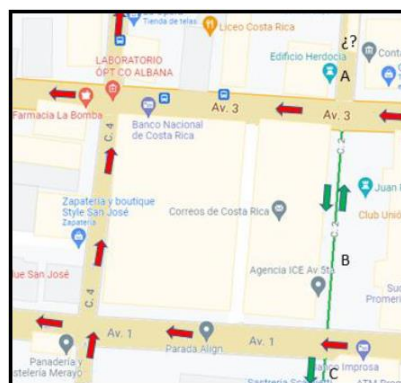


Figura 2. Situación planteada a grupo 2

Resultados

Los resultados evidencian que ambos grupos fueron capaces de obtener modelos matemáticos basados en sistemas de ecuaciones lineales para resolver la situación presentada y usar métodos matriciales para encontrar resultados matemáticos. Sin embargo, no todos los estudiantes fueron capaces de dar una correcta interpretación a los resultados matemáticos y en ninguno de los grupos se evidencia la tentativa por validar el modelo matemático definido. Aun así, el contexto presentado permitió al estudiantado ver la aplicabilidad de los sistemas de ecuaciones lineales, movilizar competencias de modelación e identificar otros contextos donde el modelo construido podría aplicarse.

Conclusiones

Los resultados permiten observar que la mayor parte de los estudiantes fueron capaces de hacer una transición de la situación real para la matemática al trabajar la tarea de modelación, no así la transición del mundo matemático al mundo real resulta más difícil para el estudiantado, lo cual está asociado a que la validación se vuelve uno de los procesos menos

observables en el estudiantado cuando no están acostumbrados a trabajar con contextos reales (Czocher, 2018).

Referencias Bibliográficas

- Carlson, D., Johnson, C., Lay, D., & Porter, A. (1993). The Linear Algebra curriculum study group recommendations for the first course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41–46.
- Costa, V. A., & Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del álgebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería*, 12(23), 49-55.
- Czocher, J. (2018). How does validating activity contribute to the modelling process?. *Educational Studies in Mathematics*, 99, 137–159.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 38 (3), 302–310.
- Plaxco, D., & Wawro, M. (2015). Analyzing student understanding in linear algebra through mathematical activity. *Journal of Mathematical Behavior*, 38, 87–100.
- Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2125–2140.

Clame

Comité Latinoamericano
de Matemática Educativa



MOVILIZACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES A PARTIR DE CONTEXTOS EDUCATIVOS DE MODELADO MATEMÁTICO

Guillermo Ramírez



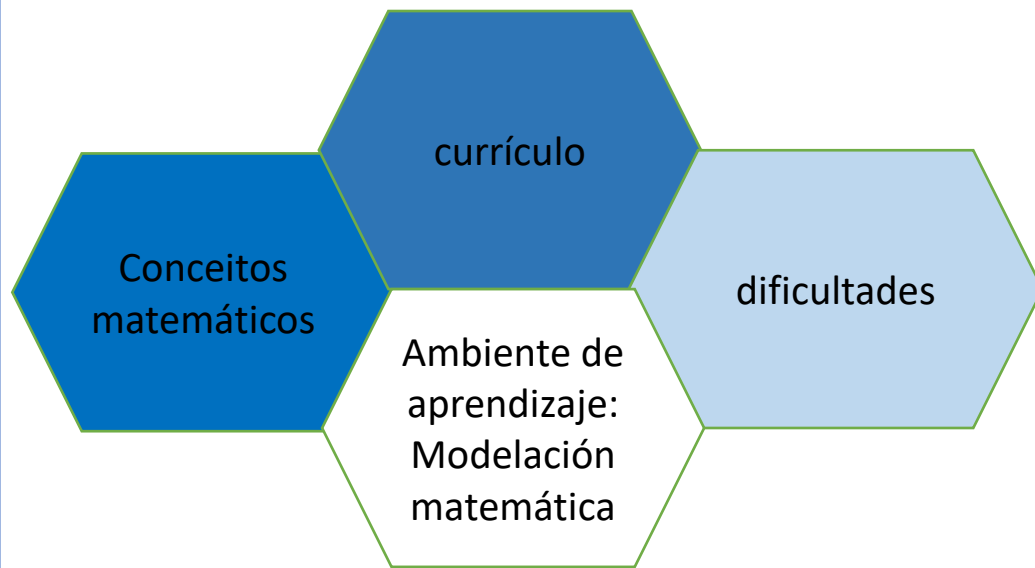
UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA



ESCUELA DE
MATEMÁTICA

Departamento de
Educación Matemática

Pertinencia y problemática



- ❑ Importancia del álgebra lineal en la enseñanza superior para enseñar otros tópicos de Matemática (Cárcamo et al., 2016).
- ❑ Sistemas de Ecuaciones lineales (SEL) como tópico fundamental del álgebra lineal, el cual permite hacer conexiones con la realidad (Costa & Rossignoli, 2017).
- ❑ Programa de Álgebra Lineal UCR: Contribuir al desarrollo del estudiantado, de su habilidad para interpretar y deducir analíticamente resultados del álgebra lineal y aplicar estos a su disciplina de estudio (Lacy, 2021).
- ❑ Dificultades: abstracción y formalismo asociada al álgebra lineal (Rach & Heinze, 2017);
- ❑ Modelación matemática para superar dificultades asociadas a las abstracción de los conceptos y fomentar competencias que NO se trabajan comúnmente en la clase de Matemática (Blum, 2015).

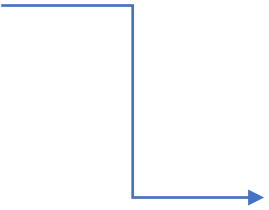
Objetivo y preguntas de investigación

Caracterizar los procesos de modelación desarrollados por dos grupos de estudiantes cuando trabajan una tarea envolviendo modelos basados en sistemas de ecuaciones lineales.

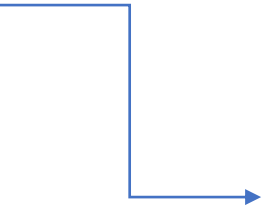
- 1) ¿Qué competencias de modelación evidencia mobilizar el estudiantado al trabajar un sistema de ecuaciones lineales en un contexto de modelación matemática?
- 2) ¿Qué dificultades son manifestadas o evidenciadas al resolver la tarea de modelación?

Enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal

- Recomendaciones para la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal (Carlson et al., 1993)

- 
1. Responder a las necesidades de otras disciplinas. —
 2. Responder a las necesidades del estudiantado. —
 3. Incorporar el recurso tecnológico. +

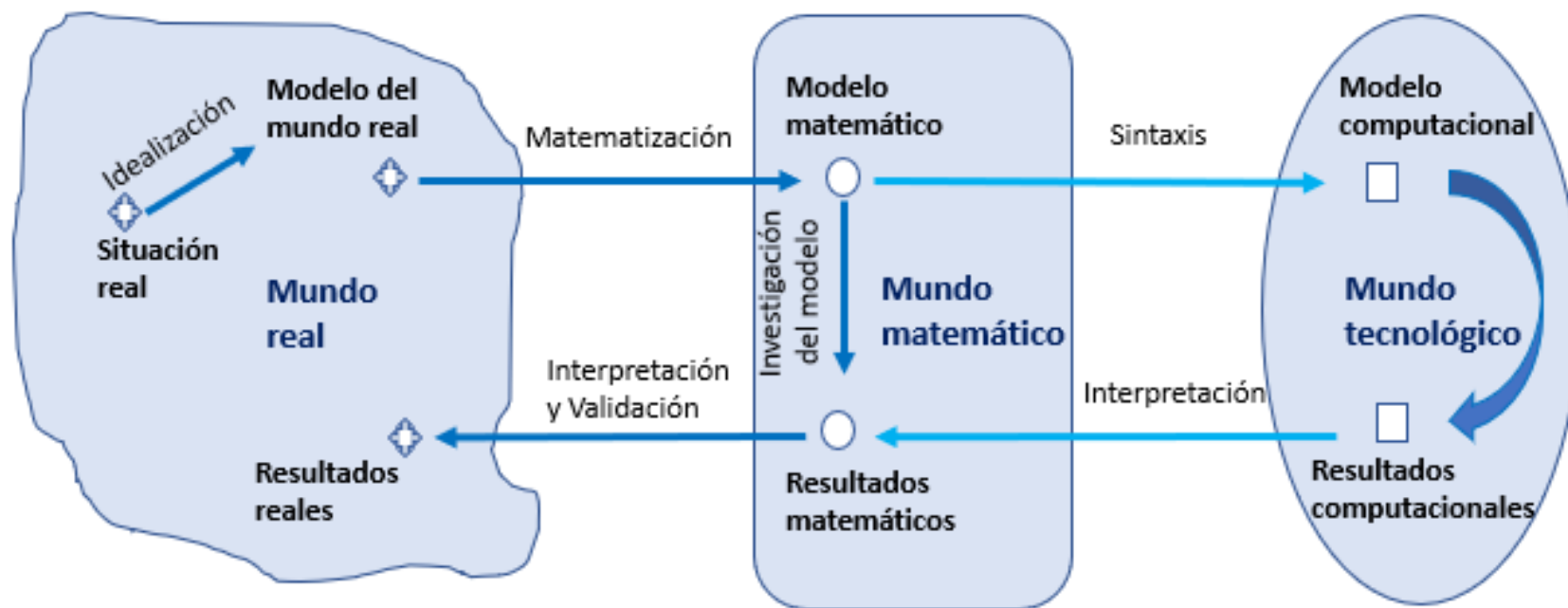
- Perspectiva educacional de modelación matemática (Kaiser & Sriraman, 2006)

- 
1. Modelación educacional didáctica: promover procesos de aprendizaje.
 2. Modelación educacional conceptual: consolidar conceptos.

Aprendizaje de SEL y modelación matemática

- ❑ Tareas contextualizados son significativas, permiten que el estudiantado reflexione sobre los conceptos asociados al trabajo de SEL (Possani et al., 2010).
- ❑ Estudiantes con experiencia en el trabajo de SEL presentan dificultad para comprender la tarea contextualizada (Trigueros & Possani, 2013).

Aprendizaje de SEL y modelación matemática



Extensión del ciclo de modelación desde perspectiva didáctica. (Borromeo Ferri, 2018)

- Dificultades comunes: comprender la situación problema, hacer suposiciones y verificar resultados (Blum, 2015; Sokolowski, 2015).

Competencias para desarrollar cada subproceso del ciclo de modelación (Maaß, 2006, p. 116-117)

Competencias de modelación	Competencias para...	Subprocesos cognitivos
Para comprender la situación problema real y establecer un modelo basado en la realidad	Hacer suposiciones sobre el problema y simplificar la situación; reconocer cantidades que influyen la situación, identificar variables clave; construir relaciones entre las variables; buscar informaciones disponibles y discernir entre información relevante e irrelevante.	(1) Comprender la tarea (2) Simplificar/estructurar la tarea (a) Idealización
Para crear un modelo matemático a partir del modelo real	Matematizar cantidades relevantes y sus relaciones; simplificar las cantidades relevantes y sus relaciones, si es necesario, y reducir su número y complejidad; elegir notaciones matemáticas y situaciones gráficas apropiadas.	(3) Matematizar el modelo (b) Matematización
Para resolver cuestiones matemáticas dentro de este modelo matemático	Utilizar estrategias heurísticas, como dividir la situación problema en problemas parciales, establecer relaciones con tareas similares, reformular la situación problema, visualizar el problema de otra manera, variar las cantidades o datos disponibles, etc; utilizar conocimientos matemáticos para resolver la situación problema.	(4) Trabajar matemáticamente el modelo (c) Investigación del modelo
Para interpretar resultados matemáticos en una situación real. Para validar la solución.	Interpretar resultados matemáticos en contextos extra matemáticos; generalizar las soluciones que se han desarrollado para una situación especial; visualizar soluciones a un problema usando un lenguaje matemático apropiado y / o para comunicar soluciones. Verificar críticamente y reflexionar sobre las soluciones encontradas; revisar algunas partes del modelo o volver a realizar el proceso de modelado si las soluciones no se ajustan a la situación; reflexionar sobre otras formas de resolver el problema o si las soluciones se pueden desarrollar de manera diferente; cuestionar el modelo.	(5) Interpretar resultados matemáticos (6) Validar resultados dentro de la situación real (d) Interpretación y validación

Aspectos metodológicos

- ❖ Estudio cualitativo e interpretativo (Cohen, Manion, & Mohinson, 2011).
- ❖ El estudio es parte de una investigación fundamentada en la aplicación de una secuencia de 6 tareas de modelación (TM), con posibilidad de apoyo tecnológico (*Excel, Wolfram Mathematica, GeoGebra*).
- ❖ *Participantes*: dos grupos de estudiantes de un curso de Álgebra Lineal (la mayoría de ingeniería), quienes llevan el curso en modalidad sincrónico virtual.
- ❖ *Investigador*: recoge las producciones del estudiantado.

Grupo 1

- Grupo de MA1004 (IC 2021, 12 estudiantes).
- 6 hombres y 6 mujeres.
- Tres tareas de modelación (**SEL**, Comb.Lineal, Transf.Lineales).
- **Objetivo**: Evaluar tareas aplicadas para mejorar aspectos considerados en futuras propuestas.

Grupo 2

- Grupo de MA1004 (IIC 2021, 10 estudiantes).
- 6 hombres y 4 mujeres.
- Tres tareas de modelación (Op.Matrices, Transf.Lineal, **SEL**).

Recolección y análisis de datos

Métodos e instrumentos	Forma de registro
Recolección documental	Resoluciones escritas de las TM.
Cuestionario	Formulario de google

Análisis

- Descriptiva e interpretativa (Wolcott, 2009). Investigador hace descripción de las resoluciones e interpreta datos o afirmaciones del estudiantado
- ❖ **Questões éticas:** Consentimiento informado, anonimato de los participantes, confiabilidad de los datos, participación no exigida.

Tareas de modelación

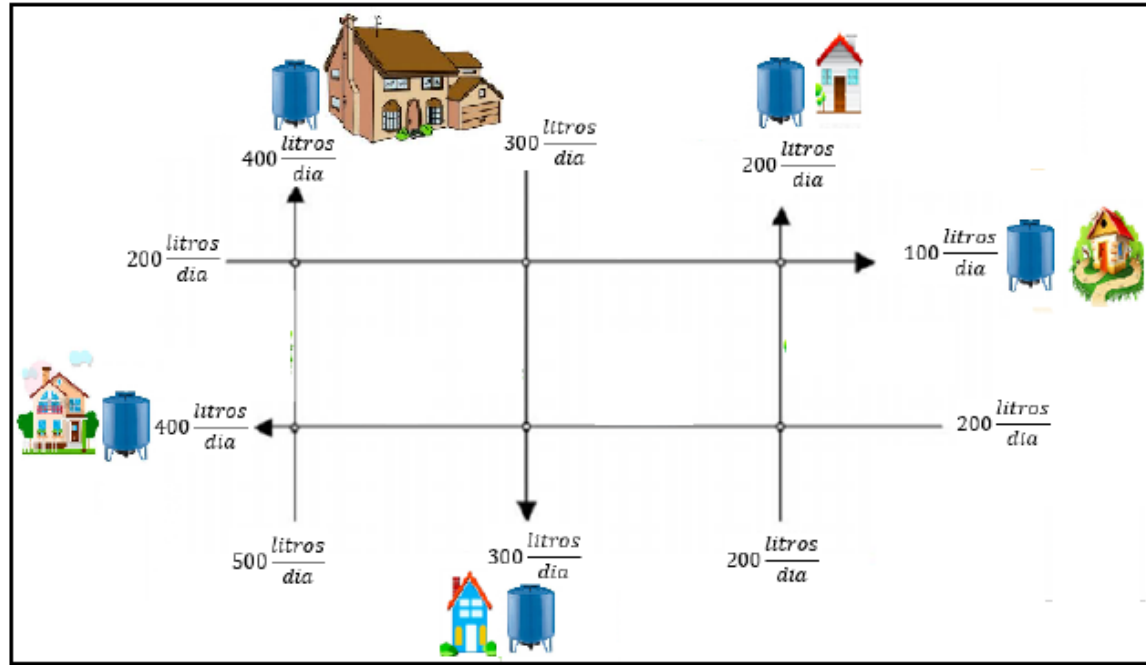


Figura 1. Situación planteada grupo 1



	Punto 1 (intersección calle 4 y avenida 3)	Punto 2 (intersección calle 2 y avenida 3)	Punto 3 (intersección calle 2 y avenida 1)	Punto 4 (intersección calle 4 y avenida 1)
Número de vehículos que fluyen por hora en el tramo indicado y sentido del flujo	1200 vehículos saliendo de la intersección, por calle 4	1100 vehículos entrando a la intersección, por avenida 3	1000 vehículos entrando a la intersección, por avenida 1	1300 vehículos entrando a la intersección, por calle 4
	1000 vehículos saliendo de la intersección, por avenida 3			900 vehículos saliendo de la intersección, por avenida 1

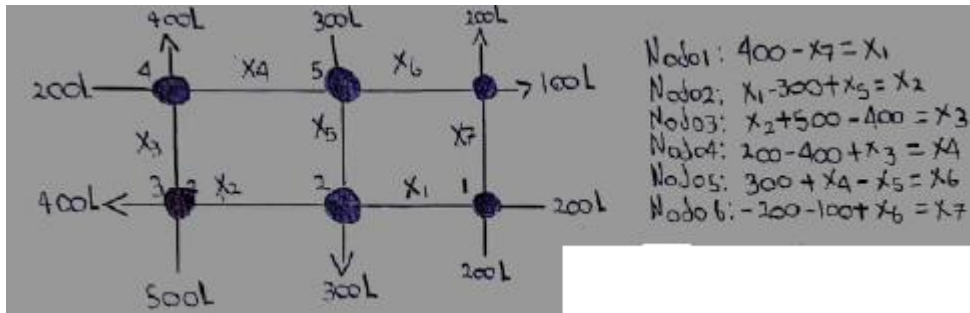
Figura 2. Situación planteada a grupo 2

Principales resultados

Competencias para comprender la situación problema, establecer un modelo real y matematizar el modelo son evidenciadas en ambos grupos de estudiantes. Sin embargo, en ambos grupos es manifestado en la mayor parte del estudiantado el haber tenido dificultad al principio para comprender la situación o matematizar el modelo real.

Se le nombró f_n a cada tubo cuyo flujo se desconocía y a cada nodo. De acuerdo con esto se realizaron ecuaciones que describen la entrada del flujo = desembocadura del flujo.

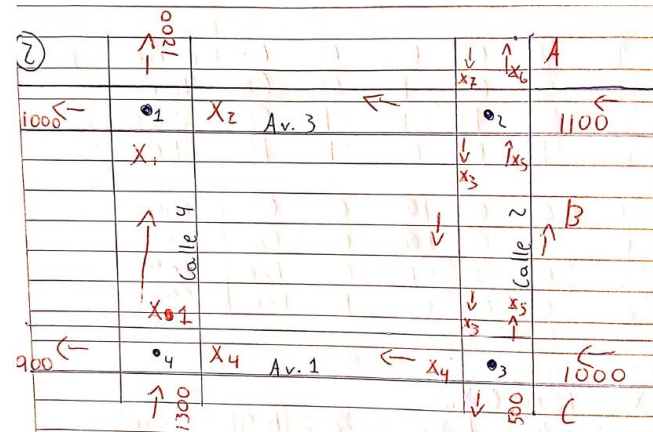
Idealización de Alexa y Pedro. Grupo 1



Idealización de Esteban y María. Grupo 1

Finalmente, el principal desafío enfrentado, fue generar una estrategia, es decir, formular un modelo matemático, como lo fue en este caso el sistema de ecuaciones.

Dificultades de Cinthia y Marco. Grupo 1



Idealización de Harry y Fernanda. Grupo 2

6- Al resolver la tarea la principal dificultad fue en comprender el funcionamiento de las calles y avenidas para poder traducir eso en ecuaciones que se puedan resolver en un sistema de ecuaciones.

Dificultades de Helena y Pablo. Grupo 2

Principales resultados

Competencias para trabajar el modelo matemático en ambos grupos de estudiantes. En pocos estudiantes del grupo 1 se evidencia el uso de software para trabajar el modelo matemático. En ambos grupos son identificadas malas interpretaciones de los resultados matemáticos y algunos estudiantes del grupo 1 no interpretan resultados. Ningún estudiante del grupo 1 valida resultados, no así un par de estudiantes del grupo 2 llega a validar resultados.

4) $\psi = 800 - 2z$

→ Esta ecuación indica que z debe ser menor que 300 para que el resultado sea positivo

Interpretación de resultados. Valery y Antonio. Grupo 1

En forma matricial $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -400 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 300 \end{pmatrix}$ Matriz semejante en la forma escalonada $A_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 400 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 200 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Uso de tecnología para trabajar el modelo con Wolfram.

Esteban y Julio. Grupo 1

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad 200 + x_6 = 400 + x_1 \\ (2) \quad x_1 + 300 = x_2 + x_7 \\ (3) \quad x_2 + x_3 = 200 + 100 \\ (4) \quad 200 + 200 = x_3 + x_4 \\ (5) \quad x_7 + x_4 = 150 + 300 \\ (6) \quad 500 + x_5 = 400 + x_6 \end{array} \right\} x_i \in \mathbb{Z}$$

Dificultades de Helen y Hector. Grupo 1

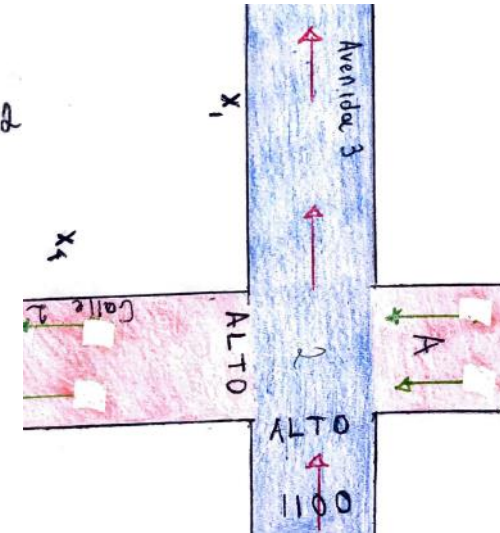
Prueba del modelo matemático. Si se quiere saber el flujo del punto 2 por ejemplo que $t = 2000$. Entonces:

$$x_1 = 3100 - t = 3100 - 2000 = 1100$$

$$x_2 = t - 900 = 2000 - 900 = 1100$$

$$x_3 = t - 500 = 2000 - 500 = 1500$$

$$x_4 = t = 2000$$



Validación de resultados. Helena y Pablo. Grupo 2

Por ejemplo, para el punto 1 de intersección deben de entrar $400 + x_4 + 1300 - x_4$ automoviles, es decir, 1700 autos, lo cual, podíamos ver desde el principio.

Dificultades de Harry y Fernanda. Grupo 2

Conclusiones

- Los procesos de modelación del estudiantado son caracterizados por modelos matemáticos comunmente correctos, lo que evidencia competencias para desplazarse del mundo real al mundo matemático, no así al contrario, existen dificultades para interpretar resultados y la mayor parte del estudiantado NO valida resultados (Blum, 2015; Sokolowski, 2015).
- Los contextos propuestos en las tareas y los conocimientos matemáticos previos influyen en el proceso de modelación del estudiantado (Borromeo Ferri, 2018): contextos relevantes y mayor conocimiento matemático de SEL permite mayor movilización de SEL, y desarrollo de competencias de modelación para desplazarse del mundo real al mundo matemático.
- Las dificultades evidenciadas tienden a ser resultado de la falta de constumbre del estudiantado, al no trabajar comunmente tareas en contextos extra-matemáticos; aunque también por errores de cálculo algebraico, lo que amerita que debe ser necesario trabajar más la integración de tareas de modelación con el tratamiento formal de los conceptos, visando consolidar competencias asociadas sobre todo a la interpretación y validación de resultados.

Referencias

- Blum, W. (2015). Quality Teaching of Mathematical Modelling: What Do We Know, What Can We Do? In: S. J. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education - Intellectual and Attitudinal Challenges* (pp. 73-96). New York: Springer.
- Cárcamo, A., Gómez, J., & Fortuny, J. (2016). Mathematical Modelling in Engineering: A Proposal to Introduce Linear Algebra Concepts. *Journal of Technology and Science Education (JOTSE)*, 6(1), 62-70.
- Carlson, D., Johnson, C., Lay, D., & Porter, A. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. *The College Mathematics Journal*, 24(1), 41-46.
- Cohen, L., Manion, L., & Mohinson, K. (2007). *Research methods in education (6th ed.)*. New York, NY: Routledge.
- Costa, V. A., & Rossignoli, R. (2017). Enseñanza del álgebra lineal en una facultad de ingeniería: Aspectos metodológicos y didácticos. *Revista Educación en Ingeniería*, 12(23), 49-55.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 38(3), 302–310.
- Lacy, A. (2019). *Carta al estudiante del curso MA1004: I semestre*. Universidad de Costa Rica.

Referencias

- Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2125–2140.
- Rach, S., & Heinze, A. (2017). The Transition from School to University in Mathematics: Which influence do school-related variables have? *International Journal of Science and Mathematics Education*, 15(7), 1343–1363.
- Sokolowski, A. (2015). The Effects of mathematical modelling on students' achievement-meta-analysis of research. *The IAFOR Journal of Education*, 3(1), 93–104.
- Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, 438(4), 1779–1792.
- Wolcott, H. (2009). *Writing up qualitative research* (3rd ed.). Oaks, CA: SAGE.

Clame

Comité Latinoamericano
de Matemática Educativa



MOVILIZACIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES A PARTIR DE CONTEXTOS EDUCATIVOS DE MODELADO MATEMÁTICO

Guillermo Ramírez

guillermo.ramirez_m@ucr.ac.cr



UNIVERSIDAD DE
COSTA RICA



ESCUELA DE
MATEMÁTICA

Departamento de
Educación Matemática