UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SEDE DE OCCIDENTE
COORDINACION DE ACCION SOCIAL
COORDINACION DE INVESTIGACION

Laboratorio de Matemáticas

FASCICULO Nº1
Proyecto de T.C.U.

Lic. Analive Rodríguez Alfaro

UNIVESIDAD DE COSTA RICA.

SEDE DE OCCIDENTE.

COORDINACIÓN DE ACCIÓN SOCIAL.

COORDINACIÓN DE INVESTIGACIÓN.

LABORATORIO DE MATEMÁTICA

FASCÍCULO #1.

PROYECTO DE T.C.U.

Lic. Analive Rodríguez Alfaro

1992.

Publicaciones de la
Sede de Occidente.
Serie Cátedra Universitaria.

510
R696-1 Rodríguez Alfaro, Analive.
Laboratorio de matemáticas : fascículo No. 1 / Analive Rodríguez Alfaro. -- /San José, C.R./ : Oficina de Publicaciones de la Universidad de Costa Rica ; /San Ramón, Alajuela/ : Sede de Occidente, Coordinación de Investigación, 1992.
p. ; 28 cm. -- (Serie Cátedra Universitaria)
A la cabeza de la portada : Coordinación de Acción Social, Proyecto T.C.U.

ISBN 9977-15-023-0

1. MATEMATICA. I. Título. II. Serie.

INDICE GENERAL

0-0 Agradecimiento, 7

0-1 Presentación, 9

0-2 Introducción, 11

Capítulo I: Conjuntos numéricos.

1-1 Dominó matemático, 15

1-2 Nomograma, 19

1-3 Tablero para números enteros, 20

1-4 Crucigrama #1 para la operatoria con números enteros, 24

1-5 Crucigrama #2 para la operatoria con números enteros, 26

1-6 Otros modelos para el repaso de la operatoria con números enteros, 28

1-7 Máximos y mínimos con números naturales, 30

1-8 Congruencias y clases residuales, 33

1-9 Rompecabezas (aplicado al concepto de fracción), 36

1-10 Modelo para la enseñanza de fracciones, 38

1-11 Modelo rectangular para el reforzamiento de la operatoria en el conjunto de números racionales, 45

1-12 Formando frase, 46

1-13 Reforzamiento en grupos (aplicado a la operatoria en Q), 48

Capítulo II: Algebra.

2-1 Introducción a las expresiones algebraicas, 52

2-2 Algo más sobre expresiones algebraicas, 59

2-3 Una introducción a la operatoria con polinomios, 68

2-4 Modelo "estrella", 72

2-5 Multiplicación sintética de polinomios, 75

2-6 Modelo "ejercicio-respuesta", 79

2-7 Una introducción a las ecuaciones lineales, 81

2-8 La báscula y su uso en la solución de algunos tipos de ecuaciones, 85

2-9 Crucigrama sobre ecuaciones lineales, 89

Capítulo III: Geometría.

3-1 Introducción a la geometría euclideana, 93

3-2 El geoplano y su uso en geometría, 104

3-3 Ficha para el laboratorio de geometría, 105

3-4 Laboratorio #2 de geometría, 113

3-5 Paralelismo y segmentos proporcionales, 115

3-6 Tangrama, 119

3-7 Mosaico matemático, 126

Bibliografía, 131

AGRADECIMIENTO

Agradezco profundamente a las coordinadoras de Acción Social e Investigación Lic. Yolanda Dachner y Lic. Saray Córdoba; por hacer posible esta publicación.

Muy particularmente mi agradecimiento a la Lic. Hannia Franceschi quien con su espíritu de lucha estimuló e impulsó el proyecto "Laboratorio de Matemática".

Mi reconocimiento también a los distinguidos miembros de la Comisión de Libros de Texto, Lic. Gerardo Mora Burgos, M.sc Rodolfo Ortíz, M.sc Cecilia Vega, Lic. Cecilia Aguilar, por su aporte en la revisión del fascículo.

Agradezco también a los estudiantes que han trabajado en este proyecto de T.C.U.

Dedico este trabajo a mis hijas Andrea Mireya y Analiz, a quienes debo gran parte de mis esfuerzos.

A todos infinitas gracias.

Lic. Analive Rodríguez Alfaro.

PRESENTACION

Presentamos el fascículo N° 1 de la serie que publicará el proyecto de Trabajo Comunal Universitario (TCU) LABORATORIO DE MATEMATICA; proyecto de acción social promovido por la Sección de Matemática del Departamento de Ciencias Naturales de la Sede de Occidente de lA Universidad de Costa Rica.

Este primer fascículo consiste en una serie de guías para utilizar los modelos didácticos correspondientes a diversos conceptos matemáticos incluidos en los programas de los cursos de la enseñanza primaria y secundaria.

Este es el resultado de un arduo y sistemático esfuerzo de los miembros del proyecto de T.C.U (la profesora coordinadora y los estudiantes) por producir materiales didácticos que puedan ser empleados tanto por maestros encargados de los I y II ciclo, como por profesores del III ciclo (de enseñanza media).

La producción de este fascículo incluye diversos trabajos previos como son la identificación de las áreas del quehacer matemático, la selección, la elaboración y adaptación de modelos útiles para el desarrollo de los temas estudiados en los programas de los cursos.

Este material cumplirá su cometido, cuando los maestros y profesores lo empleen como material de apoyo en la enseñanza de diversos contenidos de los cursos y comprueben su contribución en el logro de una mayor motivación del estudiante en el proceso de enseñanza aprendizaje. Para la Sección de Trabajo Comunal de la Sede de Occidente es muy grato presentar este fascículo N° 1; primera producción escrita del proyecto de TCU LABORATORIO DE MATEMATICA. Con trabajos como éste, profesores y estudiantes de la Universidad, seleccionan parte de sus conocimientos y lo organizan para compartirlo con otros sectores sociales del país, que realizan funciones importantes en la sociedad.

Este efecto multiplicador materializa uno de los objetivos del trabajo Comunal Universitario, que a la letra dice así: artículo 3, inciso b; **"Retribuir parcialmente con servicio a la sociedad, el aporte que directa o indirectamente ha contribuido a la formación del estudiante de educación superior"**.

Lic. Hannia Franceschi B.
Encargada Sección de TCU
Sede de Occidente
Universidad de Costa Rica

INTRODUCCION

Estamos convencidos de que el docente de Matemática goza de muy buenas ideas para emprender su labor educativa; no obstante, el tiempo y los recursos metodológicos son factores que interfieren mucho en su trabajo directo con los educandos.

Concordamos también, en que algunos procedimientos pedagógicos no estén generando resultados muy satisfactorios y que nuestros estudiantes requieren de mayor participación en la clase.

La necesidad de lograr una mayor motivación, hacia el quehacer matemático es evidente. Por supuesto, tal labor no es nada fácil y nos exige un cambio de actitud en el desarrollo de los programas.

Nuestra experiencia en la Práctica Docente nos ha enseñado, que la disciplina, la concentración y el trabajo del alumno interactúan muy estrechamente, cuando se aplican juegos individuales o competitivos para reforzar los temas.

Existen algunos modelos dignos de utilizarse en el desarrollo de algunos temas. Tales modelos permiten que el alumno comprenda, los conceptos antes de reducirlos a mecanismos.

Por todo lo anterior surgió el proyecto de T.C.U " laboratorio de matemática", con el deseo de colaborar en el mejoramiento de la enseñanza de esta disciplina.

El presente fascículo ofrece ideas para desarrollar diferentes áreas del quehacer matemático; algunas de las cuales han surgido de la consulta de diversa bibliografía especializada (anotada al final); y otras han sido generadas por el proyecto, sin embargo, para un mejor aprovechamiento en la enseñanza de la matemática en la educación secundaria, las ideas han sido adaptadas al público destinatario.

Esperamos que el texto sea acogido por Usted, estimado colega profesor, y que le sea útil en su trabajo con los estudiantes.

Quien tenga interés en el material que se realiza en el mencionado proyecto y que trabaje en enseñanza media o en primaria, está coordialmente invitado a visitarnos.

Lic. Analive Rodríguez Alfaro
Coordinadora del proyecto de T.C.U
" Laboratorio de Matemática "
Universidad de Costa Rica
Sede de Occidente.
Apartado N° 4250-111
San Ramón de Alajuela

Capítulo I

Conjuntos Numéricos

DOMINO MATEMATICO

Materiales: Cartón o cartulina; "pilot".

Construcción: Se cortan varios cartones en forma rectangular, previamente pintados con pintura de aceite, con el propósito de que sean más duraderos y se ensucien menos; el número de cartones puede ser variable, inclusive el tamaño de los mismos. Cada cartón se subdivide mediante un segmento central, de manera que en el cuadro de la izquierda aparezca la respuesta a un ejercicio y en el cuadro de la derecha se escribe un ejercicio determinado.

Es importante la continuidad entre los ejercicios y las respuestas que se escriben en cada cartón, de manera que quede una cadena cerrada.

Utilidad del modelo: Este modelo permite el reforzamiento de diferentes tópicos matemáticos; puede utilizarse para "cerrar" determinado tema y pretende hacer más ameno el repaso de los conocimientos.

Objetivo del modelo ejemplo: Que al finalizar la actividad el estudiante logre repasar la teoría elemental de conjuntos, que se enseña en séptimo año.

Procedimiento metodológico: Debido a que el dominó que se presenta como ejemplo consta de 28 cartones, puede entregarse un modelo a cada grupo de 4 alumnos. Un integrante del grupo reparte 7 cartones a cada uno, después de haberlos barajado. Quien tenga mayor puntaje mediante el lanzamiento de un dado, coloca un cartón sobre la mesa de juego, a continuación el alumno que tenga la respuesta al ejercicio presentado en el cuadro de la derecha, coloca el cartón respectivo a la derecha, alinéandolo; o en su defecto quien tenga el ejercicio que corresponde a la respuesta de la izquierda, puede colocar a la izquierda dicho cartón.

Sólo puede colocar un cartón por cada turno. La actividad continua hasta que se coloque el último cartón y obtiene el mayor puntaje quien primero se quede sin cartones de juego.

Evaluación: El modelo permite la autoevaluación quien es controlada por el subgrupo que ejecuta el juego.

Diseño de los cartones para el modelo ejemplo.

$\{1,2,4\}$	El conjunto $A=\{2,3,4,5\}$ escrito por comprensión	Conjunto unitario	A unión B escrito simbólicamente
$A=\{x \in N/1<x<6\}$	Conjunto formado por un sólo elemento	AUB	El conjunto $A=\{x \in N/100<x<101\}$ escrito por extensión
ϕ	El conjunto $A=\{3,5,7\}$ escrito por comprensión	$\{13,1,2,18\}$	El conjunto $A=\{x \in N/x=2*t,$ $t \in \{2,4,8\}\}$ escrito por extensión
$A=\{x \in N/x$ impar $2<x<8\}$	Si $A=\{10,13,16\}$ $M=\{2,13,18\}$ $N=\{1,2,18\}$. Entonces $\{A \cap M\}UN=$	$A=\{4,8,16\}$	$A=\{x \in N/3<x<5\}$ escrito por extensión

$A=\{4\}$	$A=\{9\}$ escrito por comprensión

$\{12,30,24\}$	El conjunto $A\cup M$, si $A=\{2,3\}$ $M=\{\ \}$

$A=\{x\in N/8<x<10\}$	$A\cup T$ si $A=\{12,24\}$ $T=\{24,30\}$

$\{2,3\}$	$\{A\cap B\}\cap T$, si $A=\{10,20,30\}$ $B=\{2,1,20\}$ $T=\{20,4\}$

$\{13,14,15\}$	$A=\{2,4,6\}$ escrito por comprensión.

$\{20\}$	$A\cap B$ si: $A=\{x\in N/2<x<10\}$ $B=\{8,10,11\}$

$A=\{x\in N/x$ par $o<x<8\}$	$A=\{x\in N/x$ impar, $24<x<25\}$, escrito por extensión.

$\{8\}$	$A\cup B$ si: $A=\{x\in N/12<x<15\}$ $B=\{x\in N/x$ impar, $12<x<16\}$

$\{4,5\}$ $\{5,8\}$ $\{4,8\}$	$T\cap M$ si $T=\{20,23,24\}$ $M=\{22,23,28\}$

ϕ	$\{A\cup B\}\cap A$ si $A=\{9,14,18,20\}$ $B=\{16,17,18,20\}$

$\{23\}$	$A\cap B$ si $A=\{o,\#\}$ $B=\{a,e\}$

$\{9,14,18,20\}$	Tres subconjuntos de $A=\{4,5,8\}$, que tienen dos elementos.

$\{\ \}$	Simbólicamente la intersección de los conjuntos A y B

$A=\{x \in N/0<x<2\}$	Dos subconjuntos unitarios de $A=\{10,11\}$

$A \cap B$	El conjunto $A=\{1\}$, escrito por comprensión

$A=\{10\}$ $B=\{11\}$	$A=\{x \in N/2<x<5\}$ escrito por extensión

$A=\{3,4\}$	El conjunto AUB si: $B=\{3,4,5\}$ $A=\{9,10\}$

$A=\{x \in N/x=2*t,$ $t \in \{1,2,3\}\ \}$	$\{A \cap B\} \cup C$ si $A=\{9,30,40\}$ $B=\{4,40,5\}$ $C=\{10,1\}$

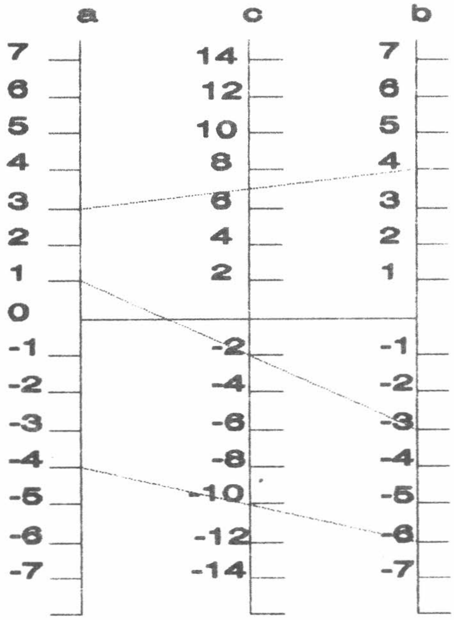
$\{3,4,5,9,10\}$	El conjunto $A=\{2,4,6\}$ escrito por comprensión

$\{40,10,1\}$	$\{A \cap B\} \cup C$ si $A=\{1,2\}$ $B=\{2,3\}$ $C=\{1,4\}$

NOMOGRAMA

El nomograma es un dispositivo de cálculo o aparato de computación; el cual se usa con el objetivo de comprobar los resultados de la suma y de la resta con números enteros, así como para ilustrar estas propiedades.

Este mecanismo se usa de la siguiente manera:



Para la suma: a + b = c y para la resta: c - a = b, el valor numérico que corresponde a "a" se ubica en la primera columna de la izquierda; el valor que corresponde a "b" está ubicado en la columna final y el valor de "c" se encuentra en la columna del centro.

Las columnas se enumeran de abajo hacia arriba; la escala de numeración de la columna del centro, es la mitad de la escala utilizada en las otras columnas; como se indica en el gráfico.

Los ejemplos gráficos muestran las sumas y restas de enteros que aparecen en la siguiente tabla.

a+b=c	c-b=a	c-a=b
3+4=7 1+(-3)=-2 -4+(-6)=-10	7-4=3 -2-(-3)=1 -10-(-6)=-4	7-3=4 -2-1=-3 -10-(-4)=-6

Este material se puede construir en cartulina, si es para uso individual y en "plywood" delgado, si es para utilizar en el salón de clase. Se le puede pegar papel cuadriculado, para hacer más fácil su elaboración.

Los educandos pueden elaborar su propio nomograma y para su uso individual se hace necesaria la utilización de una regla, para mostrar los números que se usan en la operación y su resultado. En el nomograma que se elabora con "plywood", se pueden colocar clavos indicando las posiciones de los números en la escala utilizada y debe utilizarse una cuerda, en vez de la regla.

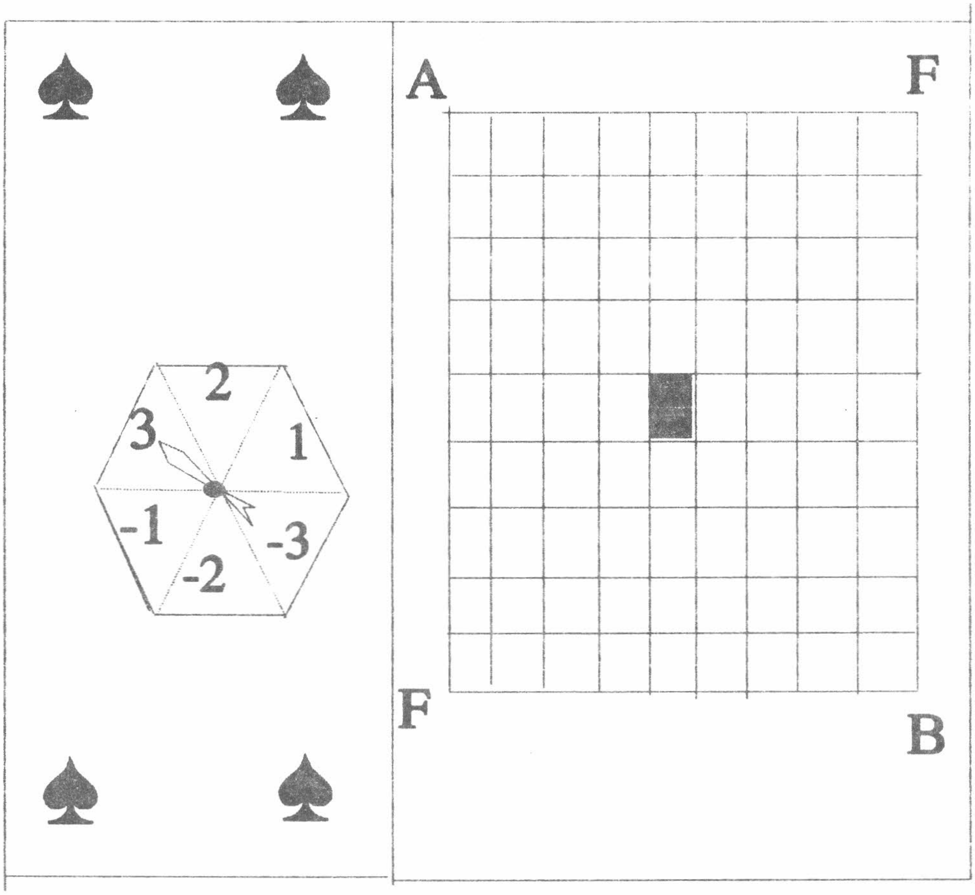
TABLERO PARA NUMEROS ENTEROS

Introducción: El tablero ilustrado puede ser utilizado para la identificación de números enteros como puntos de rectas, además utilizado junto con el nomograma sirve para reforzar las operaciones combinadas de "+" y "-" en el conjunto de los números enteros; permitiéndose la autoevaluación de los estudiantes.

Descripción del modelo.

El hexágono que aparece al lado izquierdo del dibujo, es fijo y lleva adherido un indicador en forma de aguja de reloj, el cual al hacerlo girar indicará el área donde se encuentra uno de los seis números enteros del hexágono.

Al lado derecho aparece un cuadriculado de 9 x 9 y el cuadro del centro debe estar sombreado. Las letras A,B y F indican los puntos extremos de la cuadrícula y son importantes para el desarrollo de la actividad.



Objetivo: Lograr que el estudiante ubique correctamente los números enteros, de acuerdo a su signo, partiendo siempre de un origen marcado por la posición que le indique un distintivo.

Procedimiento: a cada grupo de dos alumnos se le entrega un tablero y dos distintivos de diferente color. El jugador A parte de la esquina A y el otro inicializa en la esquina B. Por turnos cada uno gira la aguja y mueve su distintivo vertical u horizontalmente, tantos lugares como lo indique la aguja, pero considerando las siguientes condiciones:

Si el número indicado por la aguja es **positivo**, sólo puede mover el distintivo hacia arriba o hacia la derecha del lugar que ocupe en ese momento. Si el número indicado es **negativo**, los movimientos del distintivo serán hacia la izquierda o hacia abajo.

Si uno de los participantes tiene su distintivo en la esquina inferior F y obtiene en su turno un número negativo, no podrá moverse de su posición hasta que en una nueva oportunidad obtenga un número positivo, para poder mover hacia la derecha o hacia arriba.

Si uno de los jugadores tiene su distintivo en la esquina superior F y obtiene un número positivo, no podrá trasladarlo de lugar hasta que tenga mejor suerte y obtenga un número negativo que le permita moverse hacia abajo o hacia la izquierda.

Sólo se aceptan movimientos verticales u horizontales, nunca diagonales.

Gana el juego quien primero ubique su distintivo en el cuadro sombreado, localizado al centro del cuadriculado.

Evaluación: Utilizando este modelo para el objetivo descrito anteriormente, se da la coevaluación entre los estudiantes participantes.

Variantes del juego.

Objetivo: Lograr que el estudiante realice sumas de números enteros, ayudándose de un nomograma para corroborar la respuesta.

Procedimiento: Las reglas del juego son las mismas anotadas en el objetivo anterior, con la variante de que gira la aguja dos veces consecutivas y procede a sumar los números, para determinar el desplazamiento del distintivo.

El otro participante debe verificar con el nomograma la respuesta obtenida por su contrincante.

Podrían introducirse otros cambios, por ejemplo que en vez de girar dos veces la aguja para sumar los números indicados; se gire una sola vez y se sume a un número que indique su compañero y que esté en determinado intérvalo.

Evaluación: mediante el uso del nomograma y el tablero para el objetivo planteado, se logra la autoevaluación y la coevaluación entre los estudiantes, ya que cada alumno del grupo debe controlar con el nomograma si cada respuesta obtenida por su compañero de juego es correcta.

CRUCIGRAMA #1 PARA LA OPERATORIA CON NÚMEROS ENTEROS

Instrucción: Realice cada ejercicio y coloque resultados en los respectivos cuadros en blanco, según corresponda a la enumeración de los ejercicios.

En cada cuadro en blanco debe ir sólo un dígito.

HORIZONTALES

a) $5-7+1$

b) $|1-4|-|5-10|+14$

d) $40-80+3$

f) $-13-2+11$

g) $-113.3+215.3$

h) $243-31$

j) $300(-1)-20$

k) $-4(-2)-16$

l) $|-100|+35$

n) $|-37-6|$

o) $99-500$

q) $40(2)-34$

r) $3-|30-60|+4$

s) $20-60+60$

t) $5(-7)$

w) $-100(-2)-65$

x) $-40+1-10$

z) $|-12-500|+100$

2) $-83-|-99-1|+3$

3) $|-400+200-12|$

5) $-500+5-14-80$

6) $14-15+2-3+1$

7) $5(-8)+80-2(5)$

8) $|-4(5)|+3$

9) $|-3+4-5|-|-5(7)|+25$

VERTICALES

b) $-35+100-7(-5)$

c) $-11(-2)$

d) $-36+|7-12+1|$

e) $765-54$

g) $100-4+27$

i) $-235(-1)-1$

j) $-15(2)-4$

m) $|-52+2|+6$

o) $-300-100-2+1-30$

p) $-5+130$

t) $-6(6)$

u) $250-300+400+|-162|$

v) $-37(0)+37$

x) $-4(100)-89$

y) $-213+|90-231|+180-18$

1) $200-15+28$

4) $-7(5)+55$

5) $-25(2)+4-6$

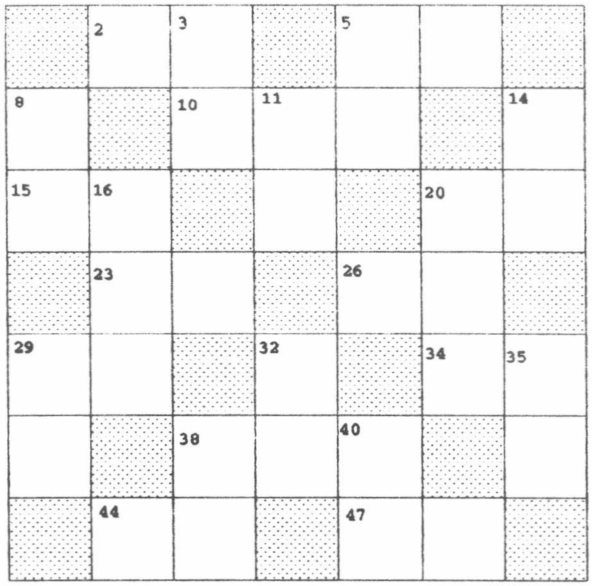
6) $3(-5)+20-6$

9) $-36-5(-6)$

Se recomienda realizar alternativamente ejercicios verticales y horizontales que compartan algunos cuadros, lo cual le sirve para autoevaluarse debido a que el dígito que corresponde a los cuadros intersección debe ser dígito del número de ejercicio respectivo.

a		b	c		d	e		f
	g				h		i	
j				k		l		m
n			o		p		q	
		r			s			
t	u		w	v			x	y
z		1				2		
	3		4		5			
6		7			8			9

CRUCIGRAMA #2 PARA LA OPERATORIA CON NÚMEROS ENTEROS.



Objetivo: Realizo operaciones con números enteros.

Instrucciones:

a) Resuelva cada ejercicio, y coloque la respuesta en el crucigrama, según corresponda a horizontal o vertical.

b) En cada cuadro en blanco sólo debe de colocarse un dígito; por ejemplo el número -12 ocupa dos cuadros, uno para el -1 y otro para el 2.

c) Note que varios de los ejercicios comparten uno o más cuadros en su respuesta, por lo que esto le permite autoevaluarse.

d) Trabaje con lápiz.

e) Resuelva alternativamente, ejercicios de la lista horizontal y de la vertical.

f) Escriba los resultados en el crucigrama y proceda a completar en su casa los espacios que faltan o repita la práctica si lo considera necesario.

LISTA DE EJERCICIOS PARA EL CRUCIGRAMA

Horizontales

2) $(-7)(4)+7$

5) $-40+8$

10) $-10-(-100)-(5)(-2)+110$

15) $[-4+3-10][-1]$

20) $2(-9+1-3)-30+1$

23) $[4-(-1)][-3+10]$

29) $(-5)(-4)-(-2)$

29) $|-5-7(-4)|-(-17)$

34) $[-8+9-10][-2-2]$

38) $[-30-7][-3]$

44) $3-|7-4|(-3)$

47) $[-3+4-8]-[-5+8-1](-11)$

Verticales

3) $-13+25$

5) $12-32-10$

8) $-10-(-31)$

11) $(-5)(-1)-(-5)$

14) $-6-(-20)-45$

16) $20[1-4]+10[-7+26]$

20) $[-3-|5-10|+5(-10)]10-3$

29) $7(-5)-(-10)+69$

32) $[-20+8-7]-[-1+3]$

35) $8-(-22)+30$

38) $36-3(-4+10)-6$

40) $(-2)(3)-(4)(-5)-3$

OTROS MODELOS PARA EL REPASO DE LA OPERATORIA CON NÚMEROS ENTEROS

A) MODELO RECTANGULAR.

-2	-3	+	-	·	+ -8	·	+	-	- 64
-1	2	-	-	-	+ -3	·	+	- 3	:
3	-4	·	+	-	+	+ -8	-	:	: -2
3	6	+	-	:	:	+	-	-	· -15

Indicaciones:

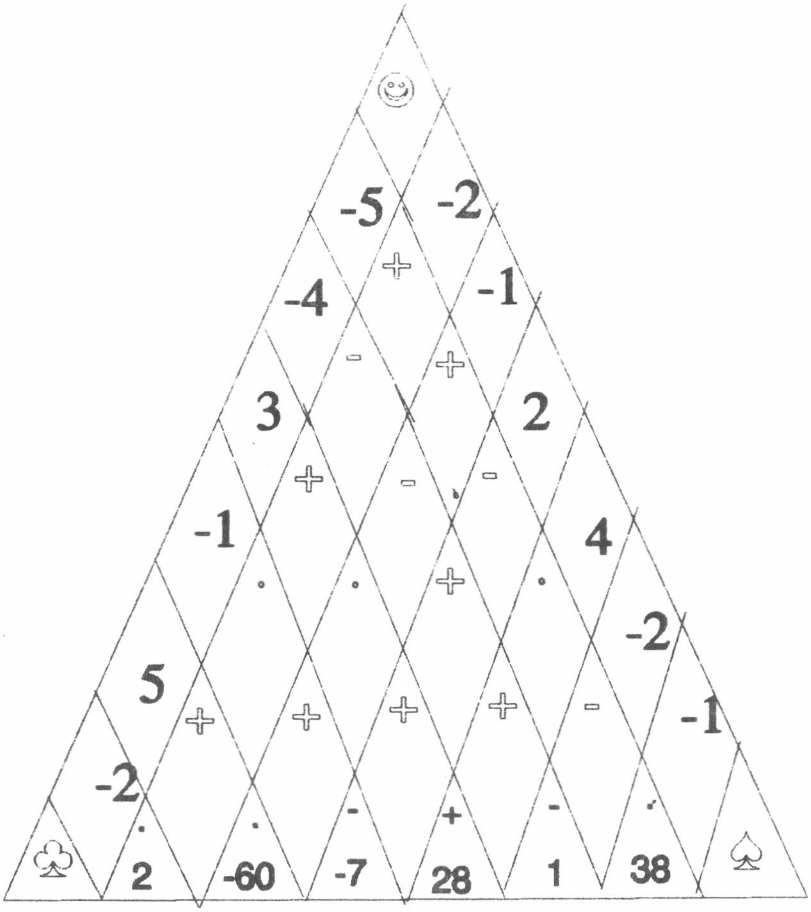
a) Trabaje con lápiz.

b) Realice la operación indicada en cada cuadro, utilizando los dos números inmediatamente anteriores a cada operación y en el orden en que quedan, de izquierda a derecha.

c) Dentro del cuadro aparecen algunos resultados, que le permiten verificar si está procediendo correctamente.

e) "."denota multiplicación, ":" significa división.

B) MODELO TRIANGULAR



Instrucciones:

a) Realice las sumas o restas indicadas en la esquina de algunos rombos, utilizando para eso los dos números que aparecen en los rombos superiores, que tienen un lado en común con el rombo que contiene la operación.

b) Debe ir colocando las respuestas en el rombo en que aparece la operación, para poder continuar.

c) Las respuestas que aparecen en la base del triángulo le permiten autoevaluar su trabajo.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS CON NÚMEROS NATURALES

Variación del perímetro y fijación de área

Objetivo: Que el estudiante observe la variación del perímetro de figuras de igual área, mediante la construcción con unidades cuadradas.

Materiales: 16 cuadrados de una unidad de lado por "n" grupos; papel cuadriculado, lápiz y regla.

Procedimiento metodológico: Dar a grupos de tres estudiantes 16 cuadrados unidad. Se les pide que utilicen las 16 piezas y formen todos los rectángulos posibles y que dibujen en sus cuadernos dichos rectángulos, indicando al lado de cada dibujo el área y el perímetro correspondiente.

Se espera que el estudiante observe que sólo puede construir tres rectángulos, cuyos lados son respectivamente: (1,16), (2,8), (4,4).

Ficha para el estudiante:

Utilice las 16 unidades cuadradas y construya todos los rectángulos posibles. Dibújelos en el papel cuadriculado y escriba al lado de cada dibujo la medida del perímetro "P" y el área "A".

Conteste las siguientes interrogantes.

a) ¿Cuál es el dato numérico común entre todos los rectángulos formados?......................

b) ¿De todos los rectángulos construidos ¿cuál tiene mayor perímetro?..............................

c) Si tuviera que diseñar un corral de 16 unidades cuadradas de área, ¿cómo lo haría para gastar la menor cantidad de alambre?..

Variación del área y conservación del perímetro.

Objetivo: Que el estudiante observe la variación del área de rectángulos y la conservación del perímetro, mediante la construción de rectángulos.

Materiales:papel cuadriculado, regla, lápiz y 12 regletas cuya longitud total es de 32 unidades y que se describen en la siguiente tabla.

Cantidad de regletas	4	2	2	2	2
Longitud de cada regleta	1	2	3	4	5

Procedimiento: Se le entrega a cada grupo las 12 regletas y la ficha de trabajo que se describe a continuación.

Ficha para el estudiante.

Utilizando el total de regletas forme todos los rectángulos posibles, de manera que las regletas formen los lados de cada rectángulo; dibújelos en el cuaderno cuadriculado y escriba al lado de cada dibujo la medida del perímetro "P" y el área "A".

Conteste las siguientes interrogantes:

a) ¿Cuál es la característica común entre todos los rectángulos construidos? ....

b) ¿Cuál es el dato numérico que no cambia en los rectángulos formados? ....

e) ¿Formó usted un total de 8 rectángulos con diferentes áreas? ....

d) ¿De todos los rectángulos construidos cuál tiene mayor área? ....

e) Si tuviera que diseñar un cuarto rectangular, que mida 32 unidades de perímetro, ¿cómo lo haría para obtener un mayor espacio?. ....

f) Si los 8 rectángulos que formó corresponden a ventanas, ¿por cuál de ellas entraría menor cantidad de luz?..

g) Si los rectángulos que formó representan ventanas, ¿por cuál de esas 8 pasaría la mayor cantidad de luz?..

h) Si los rectángulos que formó representan paredes del mismo material, ¿en cuál de ellas se gastaría la menor cantidad de pintura?...

i) Si los rectángulos representan pisos para granjas, ¿en cuál de ellos caben más animales?...........

CONGRUENCIA Y CLASES RESIDUALES

Material Nº 1: Fichas numeradas.

Objetivo: Que a través de la actividad, el estudiante logre establecer la regla de divisibilidad entre cinco.

Procedimiento metodológico: Se le da a cada grupo de dos o tres alumnos varias fichas, (supongamos 12), todos los grupos tendrán fichas enumeradas secuencialmente y otras fichas con números arbitrarios. Estas últimas fichas pueden ser tomadas de un paquete o bolsa que se colocará en algún sitio del aula, cada equipo puede tomar varias fichas al azar.

Guía para el desarrollo de la actividad.

a) Distribuyan ordenadamente las 12 fichas en 5 columnas (en la primera columna debe ir la ficha que corresponde al cero), y en forma numéricamente ordenada, siempre se empieza de izquierda a derecha, para formar cada fila.

b) Indiquen la posición de las fichas 17, 26, 56, 34, respecto a las columnas (si el grupo no posee la ficha puede colocar un papelito con el número correspondiente).

c) Cada grupo debe colocar las fichas que corresponden a la columna 5 y de igual forma las que van en las otras columnas.

Para canalizar la actividad e inducir los alumnos al razonamiento, se les plantea las siguientes interrogantes:

d) ¿Qué relación numérica hay entre dos fichas consecutivas cualesquiera de la columna 5?

e) ¿Existe alguna relación numérica entre las fichas de la columna 4?. (La misma pregunta con respecto a las otras columnas).

f) ¿En qué columna debe estar la ficha 88?. En qué columna debe estar la ficha 91?.

g) ¿A qué columna pertenece la ficha 124 ?. ¿Y la 121?. ¿Y la ficha 578 ? etc.

Para generar la discusión y el razonamiento así como para tener un control de los procedimientos de grupo, el instructor puede utilizar una tabla con clavos y fichas adicionales enla que distintos estudiantes colocarán las fichas de acuerdo con las soluciones de su respectivo grupo.

Cambio de procedimiento, como reforzamiento:

Se ubican los estudiantes en cinco columnas y se le asigna un número, del 0 al 9, a cada alumno de las dos primeras filas, empezando de izquierda a derecha. Cada estudiante de la primera fila es cabeza de la correspondiente columna y se colocará frene a ellos, con el propósito de resaltar el número de la columna.

El instructor les indicará a los estudiantes que va a distribuir todos los números naturales entre ellos y los integrantes de cada columna deben ser responsables de señalar si elnúmero que indica el profesor les pertenece o no; en caso de que se equivoquen deben pagar una "multa" o bien se les rebajará tantos puntos como integrantes tenga la columna.

El profesor mostrará una ficha que debe ser reclamada sólo por una de las columnas y entonces le será entregada al cabeza de columna. (¿Qué columna reclama esta ficha?, ¿qué columna reclama esta otra?, etc.).

Se espera que los estudiantes descubran la regla de divisibilidad entre cinco, observando que el número indicado corresponde a la columna a que pertenece el número de las unidades; con lo cual estarían indicando el residuo de dividir dicho número por 5.

Cuando el profesor esté seguro que los estudiantes han descubierto la relación entre los números de cada columna, les indicará, **que los números congruentes módulo 5, son los que al ser divididos entre cinco, dan el mismo residuo**, como sucede con los números de cada columna, para los cuales el residuo siempre va a ser el correspondiente número de columna (pertenecen a la misma clase residual).

Se les reitera, además, que la diferencia entre dos números congruentes módulo 5, que pertenecen a la misma clase residual, es siempre múltiplo de 5.

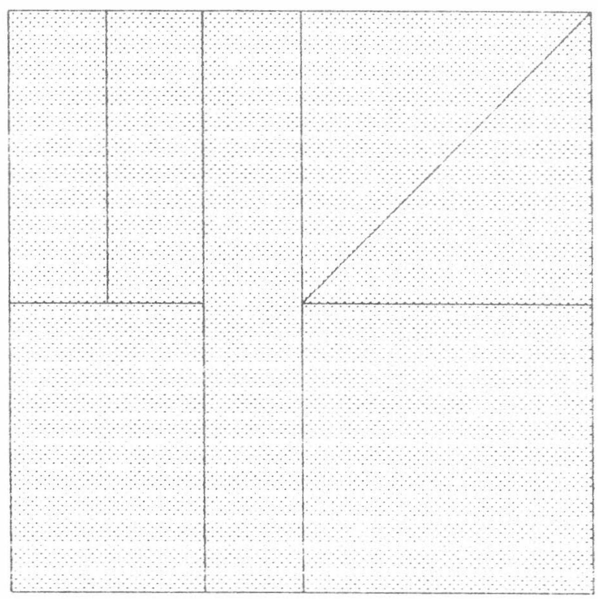
ROMPECABEZAS APLICADO AL CONCEPTO DE FRACCIÓN

Objetivos: Al finalizar la actividad el alumno estará en condiciones de:

- Adquirir el concepto de fracción.
- Realizar operaciones de adición y sustracción con fracciones.
- Obtener el concepto de amplificación y simplificación de fracciones.

Materiales: Cuadros de revistas, periódicos o almanaques. Cartón delgado y fuerte. Marcador, goma rala, "pegapex" (cuadritos o círculos utilizados comúnmente para colocar precios); cortador para cartón; plástico adhesivo.

Construcción del rompecabezas: Distribuya uniformemente la goma sobre el cartón y coloque el cuadro. Haga trazos con lápiz, detrás del cartón, para formar las fracciones que componen el cuadro. Marque los bordes con el marcador. Corte las piezas. Coloque un pedacito de plástico adhesivo, detrás de cada pieza y sobre él coloque el "pegapex".



Utilización del rompecabezas:

Asuma que las piezas que conforman el rompecabezas son: dozavos, octavos, sextos y cuartos, como se muestra en el dibujo y proceda con las siguientes indicaciones:

1) Arme el rompecabezas unidad.

2) Identifique la fracción que corresponde a cada pieza.

3) Indique con lápiz y sobre el papel colocado al dorso, la fracción correspondiente a cada pieza.

4) Utilización varias piezas, represente media unidad.

5) Indique por escrito la fracción un cuarto, como la suma de dos fracciones.

6) Escriba un cuarto como la suma de tres fracciones.

7) ¿Corresponde la suma 1/12 + 1/6 a la fracción 1/4 ?.

8) ¿Es correcta la proposición 1/4 + 1/4 = 1/2 ?.

9) Escriba la fracción que corresponde a la suma 1/6 + 1/12 + 1/12 + 1/6.

10) Indique la fracción que corresponde a 1/8 + 1/8.

11) ¿Es correcta la igualdad 1/12 + 1/12 + 1/12 = 1/4?.

12) Escriba la unidad como una suma de fracciones.

13) Escriba la fracción que corresponde a 1/4 - 1/12 .

14) ¿Es correcta la igualdad 1/4 - 1/12 = 1/6 ?.

15) Escriba la fracción que corresponde a 1/4 - 1/8.

16) Indique 1/6 como la suma de dos fracciones.

17) ¿Son equivalentes los siguientes pares de fracciones?.

a) 2/16 y 1/8 b) 1/6 y 2/12

c) 2/4 y 1/2 d) 3/12 y 1/6

18) En cada uno de los siguientes casos, escriba la fracción correspondiente:

a) 1/6 + 1/12 + 1/12 b) 1/2 + 1/4

c) 1/16 + 1/16 + 1/8 d) 1/4 - 1/6

e) 1/6 - 1/12 f) 3/4 -1/8

g) 1/2- [2/8 + 1/12]

18) ¿Son equivalentes los siguientes pares de fracciones?.

a) 2/16 y 1/8 b) 1/6 y 2/12

c) 2/4 y 1/2 d) 3/12 y 1/6

19) Escriba en cada caso, una fracción equivalente.

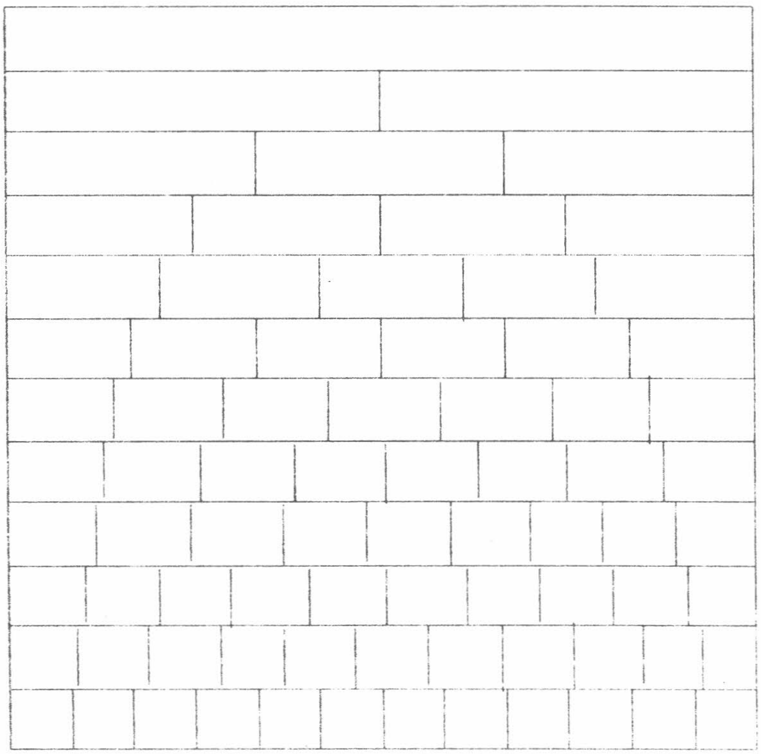
a) 1/2 b) 1/4 c) 2/16 d) 2/4

MODELO PARA LA ENSEÑANZA DE FRACCIONES

El modelo presentado a continuación es de gran riqueza didáctica; permite la visualización de fracciones, a través de patrones numéricos; además permite visualizar relaciones de igualdad, "menor que", "mayor que", así como operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre fracciones numérica; permite también establecer ciertas generalizaciones.

El modelo (ver dibujo) puede ser elaborado utilizando cartón o "plywood" delgado. Puede hacerse una estructura de madera, con el propósito de darle mayor estabilidad y movilidad.

El diagrama muestra la unidad dividida en medios, tercios, cuartos, quintos, sextos, séptimos, octavos, novenos, décimos, undécimos y duodécimos. Es importante que la barra, que representa una fracción determinada, sea pintada de un color diferente a las barras que representan otras fracciones.



Utilización:

1) El modelo indica claramente que una unidad es igual a dos medios, tres tercios, etc. En general:

$$1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\ldots=\frac{n}{n}$$

2) A través de la comparación entre las barras se puede observar otras igualdades; por ejemplo amplificación de fracciones, así:

$$a)\ \frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\ldots=\frac{n}{2n}$$
$$b)\ \frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{3}{9}=\ldots=\frac{n}{3n}$$

3) Inecuaciones: mediante comparación entre las barras que representan fracciones, se puede establecer una serie de desigualdades, tales como las siguientes:

$$a)\ 1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\frac{1}{5}>\ldots>\frac{1}{n} \qquad b)\ \frac{2}{3}>\frac{1}{2}$$
$$c)\ \frac{1}{6}<\frac{1}{5}<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2} \qquad d)\ \frac{3}{4}<\frac{4}{5}$$

4) El estudiante podrá observar sumas de fracciones y obtener sus resultados sin aplicar algoritmos.

Ejemplos:

$a)\quad 1+\frac{1}{2}=\frac{2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$b)\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

$c)\quad \frac{1}{2}+\frac{2}{4}=\frac{2}{4}+\frac{2}{4}=\frac{4}{4}=1$

$d)\quad \frac{3}{6}+\frac{1}{2}=1$

$e)\quad \left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}=2$

$f)\quad \left(\frac{1}{2}+\frac{2}{4}\right)+\left(\frac{3}{6}+\frac{1}{2}\right)=2$

5) Restas: el estudiante no necesitará ningún algoritmo, para realizarrestas de fracciones, lo cual logrará hacer mediante comparación de las piezas del modelo con la unidad.

Ejemplos:

$a)\ 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ $\qquad b)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ $\qquad c)\ \frac{2}{4}-\frac{1}{2}=0$

$d)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$ $\qquad e)\ \frac{4}{6}-\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$ $\qquad f)\ \frac{1}{4}-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}$

6) Operaciones combinadas: el modelo permite además realizar operaciones combinadas.

Ejemplos:

$$a)\quad \left[\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right]=\left(\frac{7}{12}\right)+\left(\frac{1}{12}\right)=\frac{2}{3}$$

$$b)\quad \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$$

$$c)\quad \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{6}+\frac{1}{12}=\frac{7}{12}$$

$$d)\quad \left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{4}+\frac{5}{8}=\frac{7}{8}$$

7) Observando en el modelo, las simetrías verticales, se pueden obtener resultados de restas de fracciones canónicas como las siguientes:

$$a)\ (\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}) \qquad b)\ (\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}) \qquad c)\ (\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}) \qquad d)\ (\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6})$$

8) Mediante observación del modelo, pueden establecerse igualdades entre diferencias y productos de fracciones de numerador 1.

Ejemplos:

$$a)\ [1-\tfrac{1}{2}]=(1)\,(\tfrac{1}{2}) \qquad b)\ [\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n+1}]=(\tfrac{1}{n})\,(\tfrac{1}{n+1})$$

Observación: para la aplicación del modelo, cada estudiante debe tener a mano una ficha de trabajo, en la que se especifique paso a paso lo que debe hacer, utilizando únicamente el modelo.

Guía para el estudiante:

Mediante el uso del modelo y utilizando su cuaderno, proceda con las siguiente instrucciones:

1) Utilizando la barra que corresponde a la unidad, identifique las fracciones:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \cdots \quad \frac{1}{12}$$

2) Exprese la unidad de 12 diferente formas.

3) Escriba 5 formas diferentes de expresar 1/2.

4) Indique 4 fracciones equivalentes a la fracción 1/3.

5) Escriba 4 fracciones equivalentes a la fracción 2/3.

6) Escriba una fracción equivalente a 1/6.

7) Escriba una fracción canónica, equivalente a la suma 2/6 + 1/6.

8) Escriba una fracción canónica, equivalente a la suma 1/6 + 1/6 + 1/6.

9) Transforme la suma 1/2 + 1/4 en una suma de fracciones de igual denominador.

10) Transforme la suma indicada en cada caso, en una suma de fracciones de igual denominador e indique la fracción canónica resultante:

$a)\ 1+\frac{1}{2}$ $\qquad$ $b)\ \frac{1}{2}+\frac{1}{3}$

$c)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ $\qquad$ $d)\ \frac{1}{3}+\frac{1}{6}$

$e)\ \frac{3}{6}+\frac{1}{2}$

11) Observe en el modelo las fracciones correspondientes a:
a) 1 - 1/2, b) 1/2 - 1/4 y determine el resultado en cada caso.

12) Mediante observación del modelo calcule:

$a)\ \frac{2}{4}+\frac{1}{2}$ $\quad b)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{6}$ $\quad c)\ \frac{4}{6}-\frac{1}{12}$ $\quad d)\ \frac{1}{4}-\frac{1}{8}$

13) Determine en forma canónica los resultados de las siguientes sumas:

$a)\ \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right]+\frac{1}{4}$ $\quad b)\ \left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{12}\right]$

$c)\ \left[\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right]+\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right]$ $\quad d)\ 1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}$

$e)\ \left[1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right]+\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\right]$

14) Observe simetrías verticales en el modelo e indique una resta de dos fracciones canónicas equivalentes a las siguientes sustracciones:

$a)\ \frac{1}{2}-\frac{1}{3}$ $\quad b)\ \frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ $\quad c)\ \frac{1}{4}-\frac{1}{5}$ $\quad d)\ \frac{1}{5}-\frac{1}{6}$

15) ¿Cuál es la fracción canónica que corresponde a la tercera parte de 1/2?. Esto se escribe como el producto (1/3)(1/2).

16) Escriba numéricamente:

a) "La mitad de uno"

b) "La tercera parte de un cuarto"

c) "La mitad de un medio"

17) Indique la fracción que equivale a:

$a)\ \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{5}\right)$ $\quad b)\ \left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)$ $\quad c)\ \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad d)\ \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right)$ $\quad e)\ \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{4}{7}\right)$

18) Escriba mediante una frase el significado de las siguientes expresiones:

$$a)\ \left(\frac{1}{2}\right)(3) \qquad b)\ \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{9}{4}\right) \qquad c)\ \left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{5}\right)$$

Estimado (a) estudiante: si ha logrado entender y realizar las anteriores actividades, usted está listo (a) para entender la teoría matemática que le dará su profesor, para operar con fracciones mediante algoritmos.

MODELO RECTANGULAR PARA EL REFORZAMIENTO DE LA OPERATORIA EN EL CONJUNTO DE NÚMEROS RACIONALES

Objetivo: Lograr que el estudiante refuerce la operatoria en el conjunto de números racionales.

Materiales: Aunque el modelo puede ser elaborado en papel; sólo puede ser utilizado una sola vez por el profesor; de manera que se recomienda diseñarlo en cartón pintado con pintura de aceite y hacer perforaciones de manera que aparezca en tres dimensiones; en tal caso puede usar trozos de papel para que el estudiante los utilice en las respuestas.

Procedimiento metodológico: A cada dos estudiantes se les entrega un cartón con las instrucciones, para que coloquen los resultados correspondientes a cada cuadro. El instructor debe cerciorarse de que todos comprenden las indicaciones.

Evaluación: Este modelo permite la autoevaluación del estudiante, debido a que aparecen dentro del cartón algunas respuestas; además el hecho de que se trabaje en grupos de dos, permite que se discuta el trabajo en conjunto.

Variaciones: El modelo puede ser utilizado en diferentes temas, como por ejemplo operatoria con polinomios.

Instrucciones: Realice la operación que aparece en cada cuadro, considerando los dos números anteriores a él y en el orden que se presentan (de izquierda a derecha). Debe colocar el resultado obtenido, en el cuadro que está la operación, para poder continuar; en algunos de ellos encontrará fracciones entre paréntesis, lo cual le sirve para verificar si está procediendo correctamnte. Todos los resultados deben ser escritos en forma canónica (simplificados).

-1/2	3	+	-	x 5/4	:	+	- -5/4
2/3	-4	:	-	+ -4	x	:	x -4
-2/5	3	:	x	- 4/15	-	:	: 5/3
4	-2	:	+	- 2	:	+	+ -2
-3	-4	+	-	x -21	:	x	- -22/7
1	-2/3	:	x	- -5/2	:	x	+ 3/5

Los modelos de reforzamiento son necesarios para motivar al estudiante de enseñanza media, ya que debido a la edad en que se encuentran sienten atracción por los retos presentados como juegos, logrando mayor concentración en el trabajo de clase.

A continuación se describe otros modelos de reforzamiento, aplicado a la operatoria con números racionales.

FORMANDO FRASE

Objetivo: Que el estudiante repase las operaciones elementales, en el conjunto de los números racionales.

Instrucción: Escriba a la izquierda de cada ejercicio, la letra que corresponde a la respuesta y determine la frase que se forma con el conjunto de respuestas en el orden que aparecen.

1) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ | $A=\frac{5}{4}$

2) $\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{1}{5}\right)(2)$ | $B=\frac{2}{5}$

3) $\frac{36}{5}-\frac{19}{6}$ | $C=\frac{721}{25}$

4) $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)$ | $D=\frac{21}{30}$

5) $\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{40}$ | $E=\frac{1}{6}$

6) $\left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{17}{19}\right)\left(\frac{5}{34}\right)\left(\frac{38}{75}\right)$ | $F=-\frac{1}{40}$

7) $\frac{3}{15}-\frac{1}{45}-\frac{1}{90}$ | $G=\frac{1}{3}$

8) $\left(\frac{7}{9}\right)\left(\frac{9}{20}\right)$ | $H=\frac{121}{30}$

9) $\left(8+\frac{3}{4}\right):\frac{21}{5}$ | $I=\frac{121}{360}$

10) $\frac{19}{21}:\frac{38}{7}$ | $L=\frac{7}{8}$

11) $\frac{7}{12}:\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{12}\right)$ | $N=\frac{14}{9}$

12) $\frac{11}{5}+\frac{41}{10}+\frac{203}{25}$ | $O=1$

13) $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)6$ | $R=\frac{1}{25}$

14) $\frac{3}{5}:\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{6}\right)$ | $S=\frac{7}{20}$

15) $\frac{8}{60}+\frac{13}{90}+\frac{7}{120}$ | $T=\frac{721}{50}$

16) $\frac{63}{52}:\frac{189}{26}$ | $U=\frac{25}{12}$

17) $\left(\frac{2}{3}+\frac{6}{5}\right):\frac{6}{5}$ | $Z=\frac{13}{20}$

Frase: ____________________

REFORZAMIENTO EN GRUPOS

(Aplicado a operatoria en Q)

Objetivo: Que el estudiante refuerce la operatoria en el conjunto de los números racionales (Q).

Conocimientos previos: Números enteros y operatoria en Z, números racionales, distinción entre término y factor, simplificación de fracciones numéricas, menor múltiplo común; algoritmos para la operatoria en el conjunto de los racionales (Q).

Desarrollo: En la primera parte del desarrollo de la lección, el profesor podrá hacer un repaso de los conocimientos previos, mediante la lección interrogativa. En la segunda fase, se utilizará el modelo "avance matemático",como reforzamiento.

Descripción del modelo:

1) 10 cartones con 23 ejercicios sobre operatoria en Q.
2) 10 grupos de respuestas.
3) 10 dados.
4) 20 distintivos o pequeñas fichas, en dos colores difentes.
5) 10 cartones (ver diagrama) para el desarrollo del juego.

Procedimiento metodológico: Se formarán grupos de 4 estudiantes, para que compitan en parejas. Cada subgrupo pareja lanzará una vez el dado y ubicará su distintivo en la casilla que el dado le indique. Inicia el subgrupo que obtuvo mayor puntaje en el lanzamiento del dado.

El subgrupo que inicia, copia en el cuaderno el ejercicio que indica la posición del distintivo y procede a resolverlo, si lo hace correctamente avanzará un cuadro, de lo contrario retrocederá. El otro subgrupo, mientras espera su turno, procede a resolver el mismo ejercicio y tiene derecho de corroborar su respuesta; deberá indicarle al subgrupo contrario si la respuesta que obtuvo es correcta o errada y entonces toma su turno, resolviendo el ejercicio que le indique su distintivo. El ganador es el que llegue primero al cuadro "**salida**", en rotación negativa; es decir, siguiendo el orden de enumeración.

DIAGRAMA DEL CARTON DE JUEGO.

Salida	1	2	3	4	5	6	7	8	♠♠♠
23	♠♠♠ = avance 3 espacios								9
22									10
21	♣♣ = retroceda 2 espacios								11
♣♣	20	19	18	17	16	15	14	13	12

Ejercicios para el diagrama anterior:

1) $-\frac{1}{2} + -\frac{3}{8}$

2) $\frac{5}{4} - \frac{3}{5}$

3) $\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right)\left(-\frac{4}{7}\right)$

4) $\left(2 + \frac{3}{4}\right)\left(3 + \frac{1}{6}\right)$

5) $-\frac{1}{2} - -\frac{3}{4}$

6) $\frac{3}{5} : \frac{6}{7}$

7) $\left(-\frac{2}{3} : \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2}$

8) $\left(\frac{10}{3} - \frac{1}{4}\right) : (-3-4)$

9) $\dfrac{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{1 - \frac{1}{2}}$

10) $\dfrac{5 + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}}{-\frac{3}{2} - 8 + \frac{1}{2}}$

11) $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{7}\right) - \left(\frac{1}{3} : \frac{1}{6}\right)$

12) $\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{5}\right)\left(-\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\right)$

13) $\left(7 - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{2}{7}\right)$

14) $4\left[\frac{5}{6} - \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{2}\right)\right]$

15) $\frac{1}{2} + \frac{3}{4} - \frac{1}{6} - \frac{2}{5}$

16) $3 - 4\left(2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)$

17) $\frac{1}{2} - 2\left(3 - \frac{1}{2}\right)$

18) $-\frac{3}{5} + 2\left(\frac{3}{5} : \frac{3}{2}\right)$

19) $3 - \left(\frac{1}{2} : -\frac{3}{8}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{3}$

20) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{5}\right)$

21) $\left(\frac{3}{4} : \frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{2} : \frac{2}{3}\right)$

22) $\left(\frac{2}{5}\right)\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$

23) $\left(\frac{4}{3} - \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{3}{5} - \frac{5}{2}\right)$

Respuestas

1. -7/8	2. 13/20	3. -5/7	4. 209/24
5. 1/4	6. 7/10	7. -17/6	8. -37/84
9. -4/3	10. -74/135	11. -25/14	12. -1/10
13. -455/16	14. 13/6	15. 41/60	16. 0
17. -9/2	18. 1/5	19. 8/3	20. 75/4
21. 3/8	22. 1/30	13. -527/150	

Capítulo II

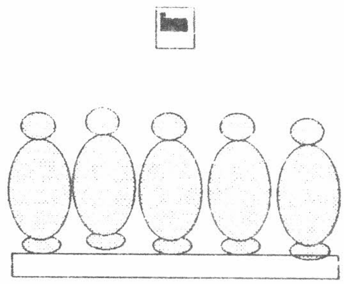
Algebra

INTRODUCCIÓN A LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

1) Considere los siguientes dibujos, los cuales representan recipientes iguales, llenos de semillas de linaza y proceda con las instrucciones.

a) Indique en el espacio en blanco la cantidad de semillas que hay en un recipiente______

b) Anote el número total de semillas, contenidas en tres recipientes. ______



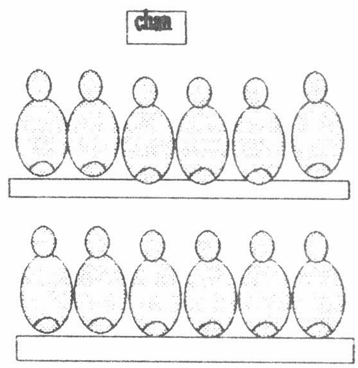
c) ¿Cuántas semillas hay en los 5 recipientes?_______

d) Suponga que en un saco hay 10x semillas de linaza, cuántos recipientes del mismo tamaño que los anteriores, pueden llenarse con las semillas del saco? (x corresponde a la letra utilizada por usted en el punto a) __________

e) ¿Cuántas semillas de linaza son necesarias para llenar 100 recipientes iguales a los dibujados? ________________

2) Considere los siguientes dibujos, los cuales representan recipientes iguales llenos de semillas de "chan".

a) ¿Cuántas semillas de "chan" caben en un recipiente?.(Use una variable diferente a la que utilizó para el ejercicio anterior) ________



b) ¿Cuál es el número total de semillas de chan, que hay en los seis recipientes ?_________

c) ¿Cuántas semillas de "chan" son necesarias para llenar tres recipientes y medio, de la misma capacidad que los dibujados? __________

d) ¿Cuántos recipientes, iguales a los dibujaos, son necesarios para depositar **(7/2)y** semillas de "chan"?. [y] es igual a la variable que usted ha estado utilizando en el ejercicio 2.

3) Escriba el número total de semillas que hay en dos de los recipientes que contienen linaza y dos de los recipientes que contienen chan. ____________

4) Escriba el número total de semillas de "chan" y linaza, que caben en los recipientes dibujados ____________

5) Un trabajador de un almacén, a quien le correspondía llenar los respectivos recipientes con chan y linaza, mezcló por accidente, un saco que contenía 10x semillas de linaza con uno que contenía 10y semillas de "chan":

a) ¿Cuántas semillas mezcló en total? ____________

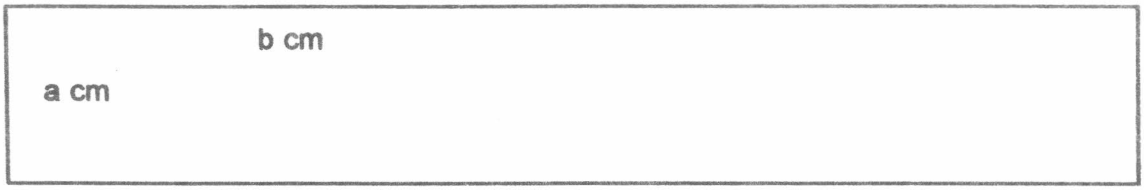
b) ¿Cuántos recipientes para linaza podía llenar con la mezcla? ____________

c) ¿Cuántos recipientes para chan, podía llenar con la mezcla?____________

6) Un alumno de un colegio observó que todos los 23 grupos tenían igual número de alumnos. Represente el número de alumnos de ese colegio ____________.

7) Usted sabe que un procedimiento rápido, para calcular el área de un rectángulo, es multiplicar **la medida del largo por la medida del ancho**; también sabe como calcular el perímetro, el cual es la suma de las medidas de todos los lados.

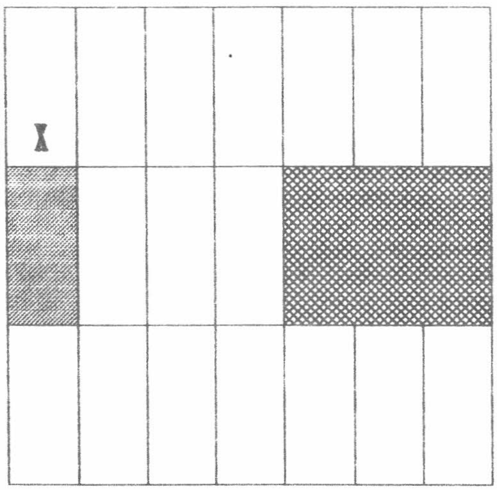
Considere el siguiente rectángulo, cuyos lados miden **a cm** y **b cm**.



i) Indique la medida del área del rectángulo.______________

ii) Exprese el perímetro del rectángulo.___________

8) Considere el siguiente rectángulo, el cual se ha subdividido en rectángulos iguales, de "x" y "y" cm de lado.



a) Calcule el área del menor rectángulo sobreado. ______

b) Calcule el perímetro del menor de los rectángulos dibujado._________

c) Calcule el área del mayor rectángulo sombreado._______

d) ¿Cuánto mide el perímetro del mayor rectángulo sombreado? _________.

e) ¿Cuántos rectángulos iguales al de menor área del dibujo, caben en un rectángulo de área **38xy** centímetros cuadrados? ____________.

9) Escriba en el lenguaje matemático las siguientes frases:

a) El doble de un número ____________

b) La mitad del número considerado en a) ___________

c) El doble de un número más la mitad del mismo número ----------

d) El cociente de **x** y **y** ----------

e) La suma de dos números distintos ----------

f) La mitad de la suma de dos números distintos ----------

g) El cuadrado del número x ----------

h) El producto del número x y el cuadrado del número a ----------

i) La mitad de la distancia de Marte a Plutón ----------

j) El número de bacterias que hay en una cuita de mosca, en un momento dado ----------

10) Estimado estudiante: Usted ha estado trabajando con **expresiones algebraicas** y particularmente con **monomios**. Todas las expresiones que escribió anteriormente son expresiones algebraicas; algunas de ellas, no todas, son monomios.

Usted puede definir, de acuerdo con lo que ha escrito durante este trabajo, qué se entiende por "**expresión algebraica**"; ha notado que involucra operaciones como "+", "-", ".", ":"; entonces estará de acuerdo conmigo en que una **expresión algebraica es una combinación de letras y números fijos en la que intervienen operaciones matemáticas como: suma, producto, cociente, radicación, potenciación,** etc.

Podemos escribir infinitas expresiones algebraicas; algunas son:

$a)\ \frac{2x-y}{3}$ $\qquad b)\ x^5+y+a^{-2}z$ $\qquad c)\ \sqrt{(xy-1)}+7$ $\qquad d)\ 5$ $\qquad e)\ \sqrt[3]{4}$

11) Escriba seis expresiones algebraicas, diferentes de las anteriores:

Vimos que un **monomio** es también una expresión algebraica, pero no cualquiera. A grosso modo, **son monomios sólo las expresiones algebraicas que son números fijos (constantes), letras o combinación de números y letras, en las que para las letras sólo interviene la operación producto.** (Recuerde que las letras representan números).

Ejemplos de monomios:

$a)\ -\frac{2}{3}$ $\quad b)\ -\frac{2}{3}x$ $\quad c)\ -3\sqrt{2}xy$ $\quad d)\ -3\sqrt[6]{2}a^3x$ $\quad e)\ a^9$

Los siguientes ejemplos no son monomios, aunque si son expresiones algebraicas.

a) x + y (note que las letras están relacionadas con la operación suma)

b) xz - y (aunque interviene el producto aparece también la sustracción)

c) $\sqrt{xy}$ (aunque interviene el producto aparece la radicación para las letras)

d) $1-xz$ (es una sustracción, por lo que no es monomio).

12) A continuación aparecen varias expresiones algebraicas, algunas de ellas no son monomios, indique con (*) cuales de ellas son mcnomios.

1) $3x^2$ $\qquad$ 2) $\sqrt{4xy^3}$

3) $\sqrt{x^3z}$ $\qquad$ 4) $ax^{\frac{1}{3}}$

5) $-4x^5ab$ $\qquad$ 6) x^4-y

7) $\frac{x}{y}$ $\qquad$ 8) $\frac{1}{x}$

13) Ya podemos pulir más el concepto de monomio; aunque usted puede hacerlo permítame escribir que **un monomio es una expresión algebraica, formada por: un número, una variable (letra) o una combinación de números y letras, en la que sólo interviene el producto, como consecuencia los exponentes de las variables son números naturales.**

Ejemplos de monomios:

$a)\ -\frac{1}{2}x$ $\qquad b)\ \sqrt{3}\ z^3$

Note que la única operación que interviene en ambos casos es la multiplicación. En el caso (a) la variable x está multiplicada por el número -1/2 y en el caso de b) también sólo se presenta la multiplicación " $\sqrt{3}$ *por* z *por* z *por* z "

13) Analice porqué cada una de las siguientes 8 expresiones, corresponde a monomios.

$\sqrt[3]{4}$	$-\frac{1}{6}$	a^{11}	x
$2axy$	$\frac{7}{6}x^8y^2m^7$	$3a^4x^5z$	$\sqrt{5}x^2y^3$

Algo más sobre monomios:

Los monomios están constituidos por un coeficiente numérico, un factor literal y además poseen grado.

a) **El coeficiente numérico** del monomio corresponde al factor numérico y cuando no aparece se considera que es 1.

Ejemplo: en el monomio x^7 el coeficiente numérico es 1.

b) **El factor literal** (o parte literal) del monomio, está compuesto por la letra o factor compuesto de letras, pero si no aparece es cualquier letra o conjunto de letras unidas por el producto y con exponente cero.

Ejemplos:

a) El factor literal del monomio **4/5 x^4ya^2 es x^4ya^2**

b) El factor literal del monomio **8** es por ejemplo x^0 **,puede ser también $(xy)^0$**.

c) **El grado de un monomio** es el número resultante de la suma de los exponentes de las variables que intervienen.

Ejemplos:

i) El monomio **$-2a^3yx^5$** tiene grado 9 = 3 + 1 + 5

ii) El grado del monomio **x^4ya** es 6

iii) El monomio **x** tiene grado 1.

iv) El grado del monomio 4 (o de culaquier número) es cero.

14) Para cada uno de los monomios dados en la columna de la izquierda de la siguiente tabla, escriba el coeficiente numérico, el factor literal y el grado.

Monomio	Grado	Coeficiente numérico	Factor literal
$-7x^4y$			
$-\frac{5}{4}x^5y^2m$			
x			
$\sqrt{6}$			

ALGO MAS SOBRE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Las variables, constantes y operaciones aritméticas, constituyen el fundamento del lenguaje algebraico. Dicho lenguaje ha sido de gran ayuda para la humanidad, ya que sintetiza cálculos muy complejos utilizando variables, constantes y operaciones, en sustitución del lenguaje ordinario.

A continuación aparecen una serie de ejercicios, con el propósito de reforzar el lenguaje y operatoria en álgebra.

I Parte

Una **constante** es una letra cualquiera, que representa un número fijo. Se llama **variable** a una letra cuyo valor numérico puede variar en algún conjunto o intérvalo.

Represente mediante una letra las siguientes frases e indique si dicha letra corresponde a una constante o a una variable.

1) La medida del lado de un cuadrado cualquiera ....
2) El número de habitantes de Costa Rica, hasta el 4 de julio de 1991 ....
3) El perímetro de un cuadrado, cuya medida del lado es conocida ....
4) La longitud en metros, de la pizarra que hay en su aula ....
5) El número de segundos que duró el terremoto del 22 de abril de 1991, en la zona Atlántica de Costa Rica ....
6) La velocidad de la luz en metros por segundo ....
7) La cantidad de pares de zapatos que utilizará usted durante toda su vida ....
8) Un número real cualquiera ....

II Parte

Exprese las siguientes frases, en el lenguaje del álgebra, esto es utilizando variables, constantes y operaciones.

1) El doble de un número real x ....
2) El triple de un número real y ....
3) El doble de un número real x más el triple del número y .....
4) La diferencia entre 2 y el número x ....
5) El doble de la diferencia entre 3x y 4 ....
6) La suma de las abejas de una colmena, considerando la reina, las obreras y los zánganos ....
7) Fracción cuyo numerador es la segunda potencia de un número real y el denominador es dicho número.
   real .....
8) La tercera potencia de un número real x ....
9) La suma de la constante "a" y la variable" w" ....
10) Los dos tercios de b ....
11) La mitad de la suma de dos números reales distintos........
12) El producto de dos números ....
13) Fracción cuyo numerador es 2 y el denominador es la diferencia de 3 y un número real cualquiera ....
14) Un cuarto del número real z ....
15) La suma de x y la segunda potencia de y ....
16) La segunda potencia del triple de dos números .....
17) El 40% de un número real cualquiera...........
18) La segunda potencia de la suma de dos números reales ......
19) La tercera potencia de la suma del doble de la diferencia de x y y ....
20) El 40% de un número real menos el 8% de la mitad de dicho número...........

III Parte

Escriba en el lenguaje corriente, cada una de las siguientes expresiones, en donde las letras representan números reales.

1) $x-4$	2) $\frac{4}{x}$
3) $\frac{x}{4}$	4) $\frac{x}{4}+1$
5) $\frac{x+1}{4}$	6) $2x+4y$
7) $4-x^2$	8) $(4-x)^2$
9) $\frac{x-4}{1-x}$	10) $\frac{2}{3}a$
11) $\frac{a}{2}-1$	12) $5\%x$

IV Parte

Simplifique o resuma las siguientes expresiones

1) $3+\frac{1}{3}$	2) $x+x+3x$
3) $b^0+x^0+3^0$	4) $\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}x$
5) $2y-3y$	6) $6y-3x-4y+4x$
7) $\frac{2}{x}+\frac{1}{x}$	8) $\frac{2}{3}y-\frac{y}{4}$
9) $\frac{1}{2}[x-2+x]$	10) $[a-(3a-a)]$
11) $5\%x+8\%x-3\%x$	

Observación: Todas las expresiones anteriores, están escritas en el lenguaje del álgebra y corresponden a expresiones algebraicas.

V Parte:

Halle el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas y exprese el resultadolo más simple posible.

1) $\dfrac{1-3x}{5}$ si $x = 2$

2) $3-\dfrac{4}{3}y$ si $y = \dfrac{1}{2}$

3) $80\ \%\ x-25\ \%\ y$ si $x = 160$ $y = 400$

4) $-\dfrac{1}{5}x+\dfrac{2}{y}$ si $x = -2$ $y = -\dfrac{1}{5}$

5) $\dfrac{5(y-x)}{x}$ si $x = 4$ $y = -1$

6) $\dfrac{x}{5(y-x)}$ si $x = \dfrac{1}{2}$ $y = 3$

Recuerde que: Se llama término a cada componente de una suma.

Ejemplos:

1) En 2 - 3/4 el 2 es un término y -3/4 es el otro término.

2) La expresión (x+1)/4 la podemos escribir como la suma x/4 + 1/4, entonces los términos son x/4 y 1/4; pero la expresión 4/(x + 1) corresponde a un único término.

Se llama factor a cada componente de un producto.

Ejemplos:

1) "3" y "a" son factores del producto 3a

2) "3" y "(x - 1)" son factores del producto 3(x - 1)

3) En la expresión abx los factores son: "a, b, x" o " ab, x" o " a , bx" (se pueden combinar de otra forma las variables para escribir los factores).

VI Parte

Determine los términos de las siguientes expresiones algebraicas:

1) $x+2y-3$ 2) $\frac{5}{3}x+\frac{3}{4}+8y$ 3) $\frac{3}{x-1}+x$

4) $2(x+4)+x^3$ 5) 4%$x-2y+8$

VII Parte

De acuerdo con cada expresión, indique si x es término, factor o ninguno de los dos.

1) $x+3a$ 2) $x(1+a)^2$ 3) $\frac{x+4}{3}$ 4) $x-y+4$

5) $(2a-1)x$ 6) $3x^5$ 7) $(2x-1)^6$

VIII Parte

Razone y conteste las siguientes interrogantes.

1) ¿Es posible descomponer **(x + 2)/5** en dos términos?.

2) ¿Es posible descomponer **3/(x+2)** en dos términos?.

IX Parte

Arregle las siguientes expresiones, de tal manera que queden integradas por tres términos e indique dichos términos.

1) $\frac{x-5}{4}+y$ 2) $\frac{4}{x+1}+\frac{x+4}{4}$ 3) $\frac{x+y-5}{3}$ 4) $\frac{2x+5}{y}+\frac{3}{x}$

Algunas sumas de términos pueden transformarse en productos de factores. Escriba las siguientes sumas como productos de factores (**factorice**).

1) $2x+6$ 2) $5x+yx$

3) x^3+x^2y 4) $2(x-1)-3(x-1)^4$

Decimos que una expresión está desarrollada si está expresada como suma de términos. **Desarrolle** las siguientes expresiones.

1) $2(x+4)$ 2) $x(x^2+y)$ 3) $(2x+1)(x-4)$

Verifique que el valor numérico en cada par de expresiones algebraicas es el mismo y explique la razón de esa igualdad.

1) $4x-2x^2$ y $2x(2-x)$ *Si* $x = -3$

2) $(x+3)(-2x+1)$ y $-2x^2-5x+3$ *Si* $x = \frac{1}{2}$

Escriba una expresión desarrollada equivalente a la expresión algebraica dada:

1) $(x^3-3)(-2x)$ 2) $(2x)(x-3)$ 3) $3(4-x+y)$ 4) $(x-y+1)(2x+y$

Aunque todo monomio es un término, y no todo término es monomio, para efectos de operar con ellos, podemos identificar un factor numérico o coeficiente numérico y un factor literal.

Analice los siguientes ejemlos:

Término	Coeficiente numérico	Factor literal
$5x^2y$	5	x^2y
$3\frac{1}{x}$	3	$\frac{1}{x}$
$\frac{5}{x-1}$	5	$\frac{1}{x-1}$
$4\sqrt[3]{x}$	4	$\sqrt[3]{x}$

Indique en el cuadro siguiente el coeficiente numérico y el factor literal de cada térmi
dado.(El segundo no es monomio).

Término	Coeficiente numérico	Factor literal
1) $3xy^2$		
2) $\frac{1}{4}(x-2)^2$		
3) $\frac{3}{5}(x-1)$		

Si el factor literal es el mismo, se dice que los términos son semejantes.

Observaciones:

a) Al realizar una suma de términos semejantes el resultado es también un término semejante a los sumandos.

b) Si los términos no son semejantes la suma sólo queda indicada, o puede en algunos casos transformarse en un término, que no es semejante a los sumandos.

Exprese las siguientes sumas como un solo término:

1) $3x+\frac{1}{2}x$ 2) $3a^2x+5xa^2$

3) $3\frac{1}{x}+4\frac{1}{x}$ 4) $2(x+8)-\frac{1}{3}(x+8)$

5) $-3xz^2-\frac{2}{3}z^2-\frac{2}{3}z^2x$ 6) $-\frac{1}{2}a-\frac{2}{6}a+\frac{7}{8}a$

7) $\frac{5}{x+1}+\frac{8}{x+1}-\frac{3}{4(x+1)}$

Polinomios: Se ha estado trabajando con expresiones algebraicas y se ha identificado cuales de ellas son monomios; cuando una expresión algebraica está compuesta por una suma de dos monomios, se dice que es un **binomio**; si a dicha expresión algebraica la compone una suma de tres monomios, entonces es un **trinomio**. En general, a una suma de dos o más monomios se le llama **polinomio**.

Ejemplos

1) $3x+y$ (*binomio*)

2) $\sqrt{2}ax^3+3b+c$ (*trinomio*)

3) $\frac{1}{5}a^5b^4+z^3y^9+5ab+az^3$ (*polinomio*)

4) $5x^8+2x^7-\frac{1}{4}x^3+3x^2-\frac{2}{7}x+123$ (*polinomio*)

Grado de un polinomio: El grado de un polinomio corresponde al del monomio de mayor grado que lo conforma; los grados de los polinomios anteriores, son respectivamente 1, 4, 12 y 8.

UNA INTRODUCCIÓN A LA OPERATORIA CON POLINOMIOS.

Materiales: Rectángulos en diferente color, elaborados en "plywood" o cartón; papel cuadriculado; lápiz, borrador; regla.

Descripción de los rectángulos: Los rectángulos serán de diferentes dimensiones. Para efectos de construcción del modelo, se usarán los siguientes valores en cm, para las variables: $x=2$, $y=3$, $z=4$, $a=5$, $c=6$ y $d=7$.

Notación utilizada en el documento: Se usarán pares de números, para denotar el largo y ancho de cada rectángulo; por ejemplo si el rectángulo tiene largo z y ancho x, se simbolizará como (z,x) o (x,z).

Objetivos: Que al finalizar la actividad, el estudiante logre:

- Realizar operaciones de suma y productos de polinomios, mediante la visualización de rectángulos construidos.
- Demostrar la igualdad de dos polinomios, que expresan la misma área.

Conocimientos previos: concepto de polinomio y la ley distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

Procedimiento metodológico: El profesor preparará previamente, paquetes con no más de seis piezas y formará grupos de dos estudiantes cada uno, de manera que cada grupo trabaje con un paquetes de rectángulos y cuando termine devolverá el paquete y recibirá otro para que repita las mismas actividades.

Rectángulos que contienen algunos paquetes:

1) (x,z), (x,z), (a,z), (x,y)

2) (x,z), (y,z), (y,y), (x,y)

3) (x,z), (y,z), (y,y), (x,y), (y,d)

4) (a,c), (x,y), (x,z), (d,y)

5) (y,x), (y,z), (a,c)

6) (x,x), (x,x), (x,z), (y,z)

7) (x,z), (x,z), (z,y), (z,y), (y,y)

8) (y,z), (x,z), (y,a), (y,d)

9) (y,c), (y,c), (y,z), (y,z)

10) (x,y), (x,y), (x,y), (c,y)

11) (x,y), (x,y), (x,y), (c,y), (c,y)

12) (x,y), (x,y), (x,y), (y,y), (y,y), (c,y)

13) (x,y), (x,y), (y,y), (y,y)

14) (a,c), (y,y), (x,y), (a,z)

15) (a,z), (x,y), (x,y), (z,y)

16) (a,z), (x,y), (x,x), (x,x), (z,y)

17) (a,z), (x,z), (y,d), (y,d)

18) (z,z), (z,y), (a,y), (a,z)

19) (x,y), (y,y), (x,x), (x,y)

Instrucciones para el alumno:

a) Dibuje cada pieza del paquete, en el cuadriculado. Sólo para efectos de dibujo considere los siguientes valores de las variables: x=2, y=3, z=4, a=5, c=6 y d=7 Además tome como una unidad, cada segmento de la cuadrícula. Utilice sólo las variables, no los números dados, para expresar lo que se pide a continuación.

b) Al lado de cada dibujo indique el perímetro y el área.

c) Construya un rectángulo con las piezas dadas.

d) Dibuje el rectángulo construido, de manera que se observe en el dibujo las piezas que lo conforman; incluya las dimensiones de las piezas, que van en los lados del rectángulo.

e) Escriba el polinomio correspondiente al perímetro "p", al lado del dibujo.

f) Escriba el área del rectángulo, como una suma de áreas de las piezas que lo conforman e indíquela con Ao.

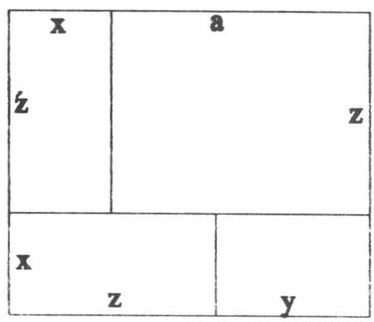
g) Escriba el área del rectángulo y denótela con Af, como una suma de monomios, mediante el uso de la fórmula para dicho cálculo; esto es multiplicando el largo por el ancho.

h) Si en los polinomios resultantes en (f) y (g), no todos los monomios son iguales, entonces demuestre la igualdad entre esos dos polinomios, ya que corresponden a la misma área. Para eso observe la construcción del rectángulo.

i) Solicite a su profesor otro paquete de rectángulos, devuelva el que tiene y proceda a realizar los mismos ejercicios.

Lo que se espera del estudiante, en los puntos (d), (e),(f), (g) y (h).

a) Paquete que contiene los rectángulos (x,z), (x,z), (az), (x,y).



e) $P=(x+a)+(x+z)+(x+z)+(z+y) = 3x + 3z + a + y$.

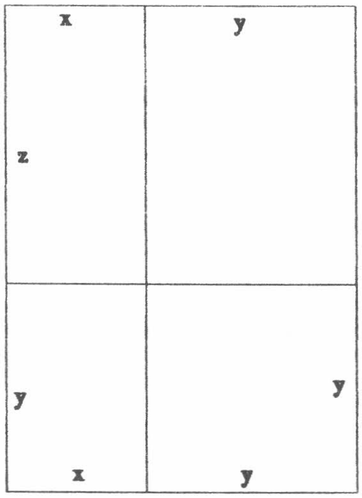
f) $A_0 = xz+az+xz+xy = 2xz + az + xy$.

g) $A_f = (x+a)(x+z) = x^2 + xz + ax + az$.

h) Demostrar la igualdad $2xz+az+xy = x^2+xz+ax+az$.

Note que hay que demostrar que $xz+xy=x^2+ax$. Para esto basta con factorizar $xz+xy$ que es igual a $x(z+y)$ y de acuerdo a la construcción se tiene que $x(z+y)=x(x+a)=x^2+xa$

b) Paquete que contiene los rectángulos (x,z), (y,z), (y,y), (y,x).



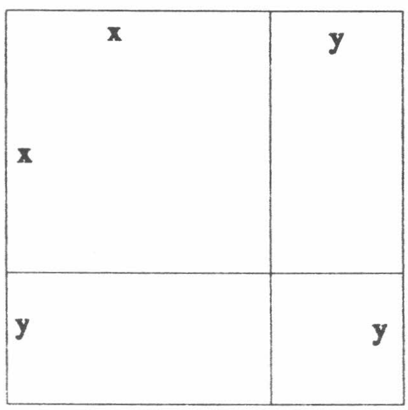
e) $P = 2(x+y) + 2(y+z) = 2x + 4y + 2z$

f) $Ao = xz + xy + yz + y^2$

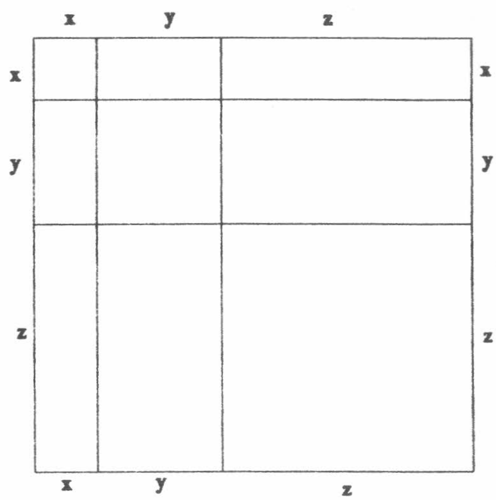
g) $Af = (x+y)(z+y) = xz + xy + yz + y^2$

Comentario: Con la utilización de este modelo, el estudiante puede construir las "fórmulas notables", y dicha visualización le permitirá conocerlas y no confundirlas.

Ejemplos:



$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$



$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

MODELO "ESTRELLA"

El modelo "estrella" es utilizado para reforzamiento de temas.

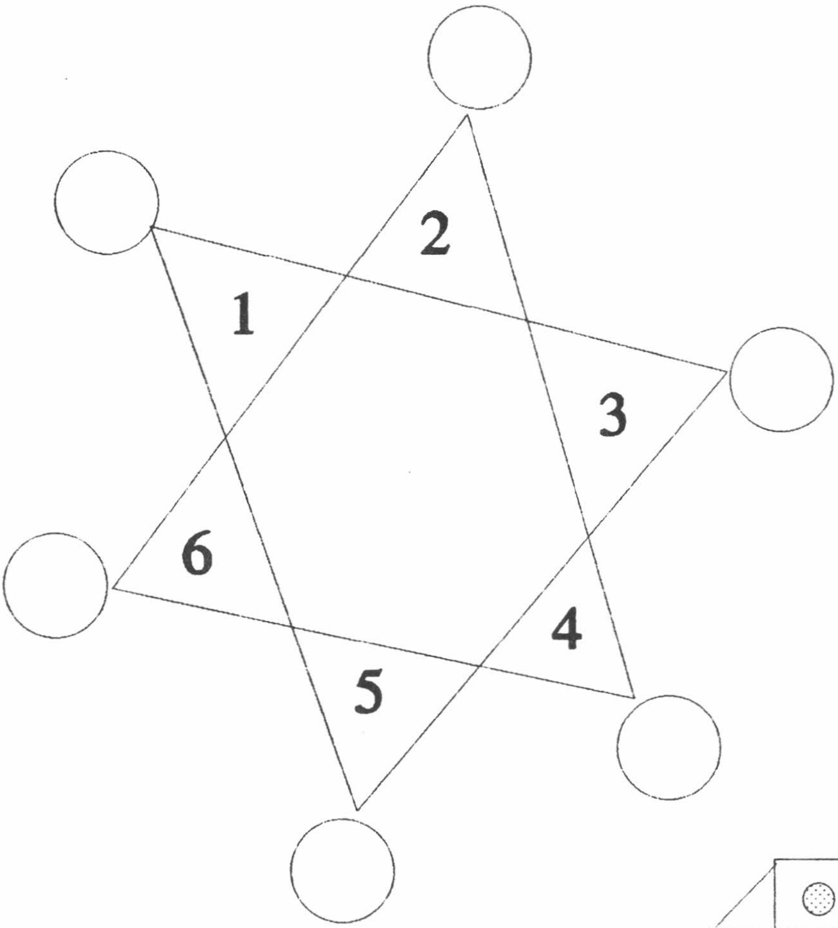
Materiales

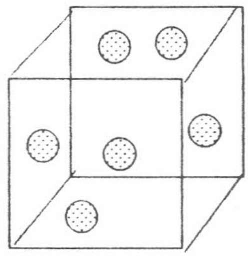
1) Estrella de seis puntas, diseñada en cartón, cuyas puntas se enumeran de 1 a 6, (ver diagrama).
2) Dado.
3) 12 fichas, 6 de color y 6 de otro, como distintivo.
4) 12 tarjetas enumeradas y con ejercicios referentes al tema que se requiere repasar; utilizando los mismos colores de las fichas se elaboran 6 tarjetas de un color y las otras 6 de otro color; los ejercicios de las tarjetas que lleven el mismo número, deben tener el mismo nivel de dificultad.

Reglas del juego

Se divide el grupo en subgrupos de dos estudiantes. Cada subgrupo tendrá 6 fichas y 6 tarjetas. Por turno, se lanza el dado; si el primero obtuvo por ejemplo 1, ambos deben resolver el ejercicio respectivo por separado, y si el que lanzó el dado lo resuelve correctamente, entonces, colocará su distintivo (ficha) en la punta correspondiente de la estrella; si no lo resuelve correctamente y lo hace su contrincante, será este quien coloque su distintivo en la punta de la estrella. Así, sucesivamente, hasta que se terminen las 12 tarjetas.

Gana el juego quien tenga mayor cantidad de fichas, colocadas en las puntas de la estrella.





Una aplicación al álgebra

Objetivo: Que el estudiante obtenga el valor numérico de una expresión algebraica dada y lo exprese como una fracción canónica.

Fichas:

1) Calcule el valor numérico de (2x-1) si x = 7/2 y simplifique el resultado.	1) Calcule el valor numérico de (2x-1) si x 4 y simplifique el resultado.
2) Fracción canónica correspondiente al valor numérico de (3x-4)/x , si x vale 7/3	2) Fracción canónica correspondiente al valor numérico de (3x-4)/x , si x vale 1/2.

3) Número racional equivalente a (x+2)/(2-x) si x=-2	3) Número racional equivalente a (x+2)/(2-x) si x=-1
4) Fracción canónica correspondiente a 3 - x/2, si x = -2/3	4) Fracción canónica correspondiente a 3 - x/2, si x = -3/2
5) Fracción canónica equivalente a 3x - x/5, si x = 20	5) Fracción canónica equivalente a 3x - x/5, si x = 10
6) Valor numérico escrito en la forma más simple y que corresponde a (2x-1)/(y+4) si x= -2/3, y = 2	6) Valor numérico escrito en la forma más simple y que corresponde a (2x-1)/(y+4) si x= -3, y = 2/3

MULTIPLICACIÓN SINTÉTICA DE POLINOMIOS

A continuación se describe un procedimiento, para multiplicar dos polinomios, considerando solo los coeficientes de los monomios. Para esto es necesario lo siguiente:

a) Ordenar los polinomios de acuerdo al grado (de grado mayor a menor o viceversa).

b) Considerar cero como coeficiente, en caso de que uno de los monomios del polinomio no aparezca.

c) Colocar los coeficientes de uno de los polinomios en una fila y los coeficientes del otro polinomio en una columna (respetando el orden escogido)

Notará en los ejemplos dados, que cada vez que se multiplique los coeficientes de un polinomio por los del otro polinomio, se dejan espacios en blanco, marcados con asterisco (*), los cuales van en aumento, a partir de cero.

La suma de las columnas de los resultados de las multiplicaciones, ubicadas dentro del rectángulo, da los coeficientes del polimonio resultante, en orden decreciente, hasta el coeficiente del monomio de grado cero.

I Parte: analice los siguientes ejemplos y lea con atención las notas aclaratorias que aparecen en cada uno.

1) **(2x+1)(3x+4)**

	2	1	
3	6	3	
4	*	8	4
+	6	11	4

Observe que los dos polinomios factores están ordenados

decrecientemente y los coeficientes respectivos se encuentran

ubicados en la primera fila y columna respectivamente. Además las columnas de resultados son las que quedan dentro del rectángulo.

R/ $6x^2+11x+4$

2) $(x-1)(3x^2-2x+1)$

	3	-2	1	
1	3	-2	1	
-1	*	-3	2	-1
+	3	-5	3	-1

Usted puede colocar los coeficientes de los polinomios factores, en la primera fila o primera columna; esto no varía los resultados.

R/ $3x^3-5x^2+3x-1$

3) $(2x-3)(-x^2+5)$

	-1	0	5	
2	-2	0	10	
-3	*	3	0	-15
+	-2	3	10	-15

Note que en el segundo polinomio factor, no aparece el coeficiente de x, por lo que es cero.

R/ $(-2x^3+3x^2+10x-15)$

4) $(2x^2+x-1)(x^2-3)$

	2	1	-1		
1	2	1	-1		
0	*	0	0	0	
-3	*	*	-6	-3	3
+	2	1	-7	-3	3

Observe que los espacios marcados con (*), van en aumento. además se colocó cero como coeficiente de x, en el segundo polinomio factor.

R/ $(2x^4+x^3-7x^2-3x+3)$

5) $(x^3+3x+2x^2-1)\ (2+5x)$

	1	2	3	-1	
5	5	10	15	-5	
2	*	2	4	6	-2
+	5	12	19	1	-2

Hay que ordenar primero los polinomios quedando de la siguiente forma : $(x^3+2x^2+3x-1)\ (5x+2)$.

R/ $5x^4+12x^3+19x^2+x-2$

6) $(ax^2+3x+2)\ (2x^2+mx+3)$

	a	3	2		
2	2a	6	4		
m	*	ma	3m	2m	
3	*	*	3a	9	6
+	2a	(6+ma)	(4+3m+3a)	(2m+9)	6

Note que a y m son coeficientes

R/ $2a^4 + (6+ma)x^3 + (4+3m+3a)x^2 + (2m+9)x + 6$

7) $(2x^3-1+x^2)\ (-x^3+x^4+4+3x)$

	1	-1	0	3	4			
2	2	-2	0	6	8			
1	*	1	-1	0	3	4		
0	*	*	0	0	0	0	0	
-1	*	*	*	-1	1	0	-3	-4
+	2	-1	-1	5	12	4	-3	-4

Hay que ordenar primero los polinomios y considerar cero como coeficiente de los monomios que no aparecen. $(2x^3+x^2+0x-1)\ (x^4-x^3+0x^2+3x+4)$

R/ $2x^7-x^6-x^5+5x^4+12x^3+4x^2-3x-4$

8) $(x^2+x)(2x+1)$

	1	1	0	
2	2	2	0	
1	*	1	1	0
+	2	3	1	0

En este ejemplo no aparece el monomio numérico o término lineal, por lo que debe considerarlo cero.

R/ $2x^3 + 3x^2 + x + 0$

Ejercicios:

a) Utilizando el procedimiento sintético, obtenga el polinomio resultante de los siguientes productos.

a) $(3x^2+2x-2)(5x+4)$ *b*) $(3x^2+ax+1)(2x+3)$

c) $(2x^2-3x^3+5x+3)(5x^2+2x+1)$ *d*) $(5x^2+3x)(2x^2+5x+3)$

e) $(2x^3-x^2+ax+3)(4x^2+2x-5)$ *f*) $(ax^4-3x^2+bx+c)(2x+3)$

g) $(ax^3+2x^2+3x-1)(bx^2+2x+k)$

MODELO EJERCICIO-RESPUESTA

El presente modelo de reforzamiento, tiene por propósito la autoevaluación del alumno. Puede diseñarse para los temas que involucren operatoria numérica o algebraica.

Instrucciones:

Simplifique al máximo cada expresión algebraica; notará que la respuesta coincide con el número de ejercicio.

1) $\left(-\frac{1}{3}\right)\left[-(4-x^2)-(3-(4-x^2))\right]$

2) $\dfrac{\left[\frac{3}{2}-3\left[\frac{1}{3}x-\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\right]}{x}$

3) $(3-2x)\left[\frac{x}{2}-5\left(x-\frac{4}{3}\right)\right]-9x^2+\frac{161}{6}x-17$

4) $\dfrac{[x^2-2xy+y^2]}{x-y}+y-x+4$

5) $\left[\dfrac{(x^2-8x+16)}{x^2-16}-1\right]\dfrac{[-x-4]}{2}+1$

6) $\dfrac{(x^2-7x+6)}{(1-x)}+x$

7) $\dfrac{1-2x}{2x^2-15x+7}+\dfrac{7x-48}{x-7}$

8) $\dfrac{3x^2-10x+3}{10x-3-3x^2}+9$

9) $\left[\dfrac{1}{2x}-\dfrac{2}{3x}+\dfrac{5}{6x}\right]\left[27\dfrac{x}{2}\right]$

10) $\dfrac{1}{(x+1)}+\dfrac{2}{(x^2-1)}+\dfrac{10x-11}{x-1}$

11) $\dfrac{2-2x}{(x+1)(x-3)}+\dfrac{11x+12}{x+1}-\dfrac{1}{3-x}$

12) $\left[\frac{a}{2}+\frac{3}{2a}+\frac{5-a}{3}\right]\left(\frac{72a}{a+9}\right) - 12a$

13) $a-\frac{a^2}{a-1}+\frac{5a}{1-a}+\frac{19a-13}{a-1}$

14) $\frac{5y}{2} - \frac{1}{2}[(4-y)(y-1)] - \frac{y^2}{2} + 12$

15) $3(a^{-1}b+b^{-1})^{-1}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{a+b^2}{ab}\right)^{-1}\right]^{-1}$

16) $\frac{15xb\,[\,30bxy\,]^{-1}}{(2x)^{-2}(2y^{-1})}\left(\frac{x}{4}\right)^{-2}$

17) $\frac{3ab^2-6ab^3+9a^3b}{9a^2b^2}\left(\frac{b-2b^2+3a^2}{51ab}\right)^{-1}$

18) $18\left(\frac{5x^{-3}+y^2}{6x^{-1}}\right)^0$

19) $[x^5-3]^0+[2^{-2}x]^{-1}+[-2x]^{-2}+[-2x]^{-3}-\left(\frac{8x^3}{32x^2+2x-1}\right)^{-1}+18$

20) $\left(\frac{2x^{-1}+2}{3-x^{-2}}\right)^{-1}\left(\frac{3x^2-1}{x^2+x}\right)^{-1}\left[2\left(\frac{1}{5}\right)^{-2} - 3^2 - (-1^0\right]$

UNA INTRODUCCIÓN A LAS ECUACIONES LINEALES

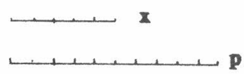
Para introducir el concepto de ecuación, repasaremos primero **razones geométricas y proporciones**. Recordemos que una razón geométrica, que llamaremos en adelante simplemente **"razón"**, es la comparación de dos cantidades por cociente.

En lo sucesivo asumiremos que la distancia entre dos puntos (o rayas) consecutivos dados, es una unidad.

1) Sean "x" y "p" las medidas de los segmentos dibujados.

a) Halle la razón geométrica entre x y p y explique el significado.

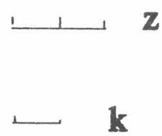
b) Halle la razón entre p y x y explique el significado.



c) Halle la razón entre x y la suma de x y p.

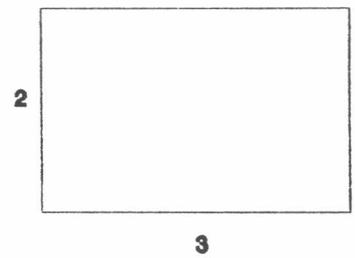
Recuerde que una proporción es la igualdad entre dos razones.

Por ejemplo: considere los segmentos z y k y los segmentos x y p definidos anteriormente podemos establecer la proporción x/p = k/z ya que ambas razones corresponden a 1/2.

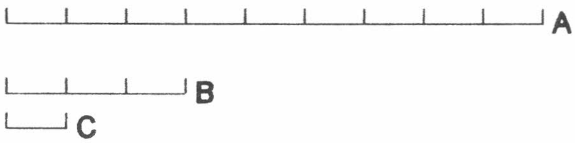


2) Establezca tres proporciones más, en las que involucre x, p, z, k (segmentos dibujados anteriormente).

3) Construya un rectángulo, de diferentes dimensiones al dibujado y cuyos lados sean proporcionales al del dibujo.



4) Considere los siguientes segmentos de medidas A, B y C.

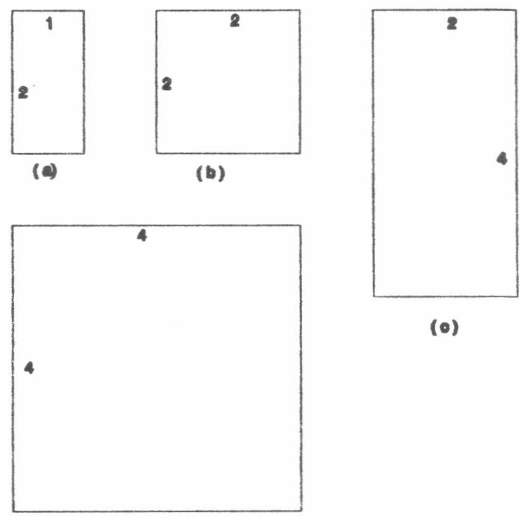


a) Establezca una proporción que contenga A, B, C.

b) ¿Es A/(B+C) = B/A una proporción?

c) ¿Corresponde (A+C)/(B+C) = (B+C)/2C a una proporción?

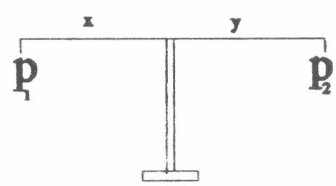
d) ¿Es (A-C)/(B+C) = (B-C)/C una proporción?



5) ¿Es posible establecer una prporción entre los perímetros de los cuatro rectángulos dados y en tal caso cuál es el significado?.

6) Establezca una proporción entre las áreas de los cuatro rectángulos y razone su significado.

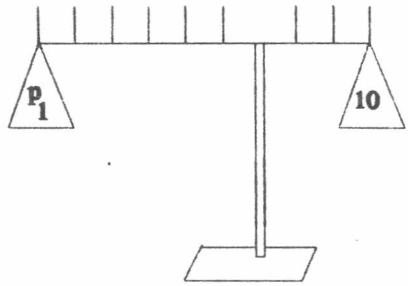
7) Observe el siguiente dibujo, el cual representa una balanza equilibrada por los pesos suspendidos dos pesos p1 y p2, los cuales se encuentran a distancias x e y del centro de equilibrio.



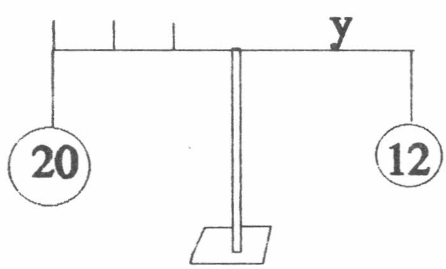
La ley de Arquímedes para balanzas establece que hay equilibrio si se da la siguiente proporción: x/y = p2/p1, es decir, si x p1 = y p2. Donde x es la distancia del centro de equilibrio de la balanza a p1, y es la distancia del centro de equilibrio a p2.

8) En los siguientes ejercicios considere los pesos p1 y p2 en gramos y las distancias x e y en centímetros. Además cada marca sobre la balanza representa un centímetro.

a) Calcule el peso p1, para que haya equilibrio en la balanza dibujada.



b) ¿Cuánto debe ser la distancia "y" para que la siguiente balanza esté en equilibrio?

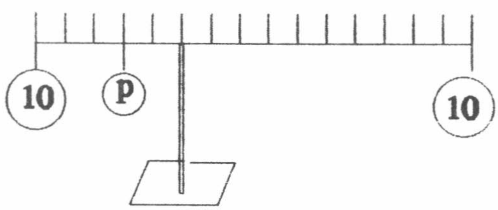


c) **Determine en cada caso el dato pedido con (*), para que haya equilibrio en la balanza.**

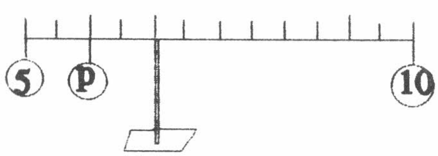
a)	$x=15$	$y=6$	$p_1=2$	$p_2=*$
b)	$x=*$	$y=3$	$p_1=7$	$p_2=14$
c)	$x=5$	$y=*$	$p_1=8$	$p_2=20$
d)	$x=\frac{6}{5}$	$y=4$	$p_1=10$	$p_2=*$
e)	$x+5=7$	$y=5$	$p_1=15$	$p_2=*$

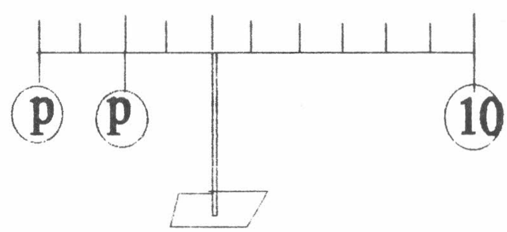
9) **En los siguientes ejercicios plantee la igualdad y determine el valor de la incógnita p (peso en gramos) en cada caso. La distancia entre dos marcas de la balanza corresponde a una unidad de longitud.**

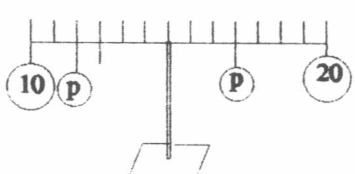
Ejemplo: **Considere el siguiente dibujo y analice el procedimiento anotado para hallar el peso p.**

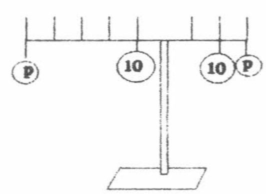


5(10) + p (2) = 10(10)
50 + 2p = 100
50 - 50 + 2p = 100 - 50
0 + 2p = 50
2p = 50
(1/2) 2p = (1/2)50
p = 25
Respuesta: el peso p es 25 gramos.

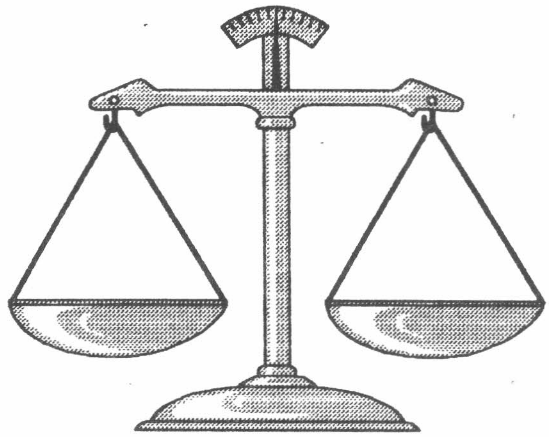








LA BASCULA Y SU USO EN LA SOLUCION DE ALGUNOS TIPOS DE ECUACIONES.



Algunas ecuaciones lineales pueden ser planteadas y resueltas utilizando una báscula como la del dibujo.

Es importante aplicar este procedimiento físico antes de proceder con el estudio formal de las ecuaciones lineales, ya que normalmente ocurre que el estudiante resuelve mecánicamente ecuaciones, sin comprender conceptos como el de variable, ecuación y las reglas para resolverlas.

Para que el uso de la anterior balanza, por parte del estudiante sea efectivo, se requiere de algunos objetos tales como recipientes plásticos cubiertos con algún papel u oscuros, arandelas u otos artículos que puedan introducirse dentro de los recipientes.

Inicialmente la idea es buscar algún recipiente y ajustar su peso al de una arandela (puede ser con perforaciones) .

Ecuaciones del tipo $ax+b=c$, en donde a, b , c y $(c-b)/a$ són enteros positivos.

Procedimiento: se coloca en uno de los platillos de la báscula recipientes que tengan cierta cantidad de arandelas y en igual número en cada uno (puede ser un sólo recipiente) . Sobre el mismo plato se colocan arandelas adicionales, fuera de los recipientes.

En el otro platillo se colocan arandelas, de tal manera que mantengan la balanza en equilibrio.

Ejemplo: colocar en el plato izquierdo dos recipientes con dos arandelas cada uno (el alumno no debe ver cuántas hay en cada recipiente) y además 6 arandelas apiladas. En el otro plato coloque 12 arandelas, de manera que la balanza queda en equilibrio.(Recuerde que el peso de una arandela es el mismo que el de un recipiente).

Se le pide al alumno que manipule la báscula para que determine la cantidad de arandelas que hay en cada recipiente.

Lo que se espera que el estudiante observe, a través de ensayo y error, es que puede quitar en ambos platillos la misma cantidad de arandelas, manteniendo el equilibrio en la báscula; de suerte que si quita cierta cantidad de arandelas a ambos lados, la relación original entre los pesos de los dos platillos, se transforma en una relación equivalente, al mantenerse de nuevo el equilibrio en la balanza.

En algún momento el estudiante observará que que la báscula también se mantiene en equilibrio , si quedan los dos recipientes en el plato izquierdo y 6 arandelas en el derecho.

Teniendo presente que el recipiente pesa igual que una arandela, el estudiante debe deducir que en cada recipiente hay 2 arandelas, puesto que hay dos recipientes en un platillo y 6 arandelas en el otro; es decir que las seis arandelas deberán ser divididas en dos grupos de igual cantidad, ya que también se tienen dos recipientes con igual cantidad de arandelas.

Notará que el recipiente y sus arandelas corresponden a un peso de tres arandelas, por lo que debe haber 2 arandelas dentro del recipiente.

Cuando el estudiante haya resuelto otras situaciones similares al ejemplo anterior, el profesor puede pedirle que escriba simbólicamente cada situación explorada por él en la báscula.

Ecuaciones del tipo a(n+b)=c, en donde a, b y c representan números enteros positivos y (c/a -b) es también un entero positivo.

Procedimiento: Se colocan en el plato izquierdo a recipientes que contienen n arandelas cada uno; cada recipiente tiene adheridas o colgadas b arandelas. En el recipiente derecho se colocan c arandelas.

La meta del alumno debe ser determinar el número de arandelas que hay dentro de cada recipiente.

Ejemplo: Colocar en un platillo 3 frascos con la misma cantidad de arandelas y adherirle o colgarle a cada uno de ellos 1 arandela. Poner en el otro platillo 9 arandelas.

El alumno debe determinar la cantidad de arandelas que hay en cada recipiente.

Lo que se espera del estudiante: Que a través del ensayo y error deduzca que es necesario dividir las nueve arandelas en tres grupos iguales ya que también hay tres recipientes que contienen la misma cantidad de arandelas y la misma cantidad de ellas colgantes en cada uno, pudiendo por lo tanto transformar la situación original de forma tal que si deja solo un recipiente con su arandela colgante en uno de los platillos, en el otro debe haber 3 arandelas para que la báscula esté en equilibrio.

Luego debe observar que si substrae la arandela colgante en el recipiente, debe también substraer una arandela del otro platillo para mantener el equilibrio; de suerte que concluya que el recipiente junto con las arandelas que hay dentro , pesa dos arandelas y como el recipiente pesa lo mismo que una de ellas, en cada recipiente hay una arandela.

Complemento del ejemplo: el profesor debe aprovechar el ejemplo anterior y plantear la situación análoga; esto es 3 recipientes con la misma cantidad de arandelas (una) y 3 arandelas apiladas en uno de los platillos, mientras que en el otro plato debe colocar nueve arandelas.

El objetivo que se persigue es que el alumno observe la identidad de las dos situaciones descritas, lo que conlieva al repaso de la ley distributiva de la multiplicación respecto a la suma.

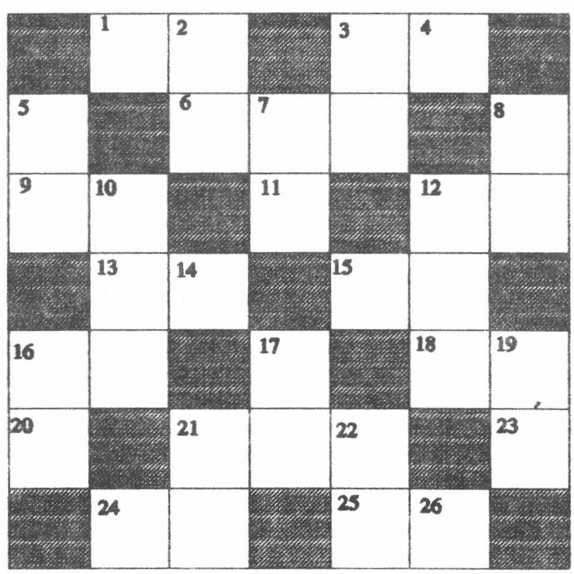
CRUCIGRAMA SOBRE ECUACIONES LINEALES

Procedimiento metológico: Se entrega un cartón y una ficha a cada 2 estudiantes, se les pide que uno de ellos resuelva ecuaciones cuya respuesta debe ubicar horizontalmente y el otro las de respuesta vertical, pero que deben ir corroborando que alguno de los dígitos coincida.

Objetivo: Lograr que el estudiante se adiestre en la solución de ecuaciones lineales, con una incógnita.

Evaluación: El modelo permite autoevaluarse, si se resuelven tanto las verticales como las horizontales.

Instrucciones: Resuelva en su cuaderno cada una de las siguientes ecuaciones y escriba con lápiz, en el crucigrama, la respuesta o solución de la ecuación, de acuerdo a la enumeración, vertical u horizontal. En cada cuadro no rayado del crucigrama, sólo debe ir un dígito.



Verticales:

1) $5x + 41 = -2x + 48$
2) $3x - 2 = 2x + 59$
3) $-5x + 7 = -6x + 36$
4) $15x - 17 = -4 + 2x - 13$
5) $x + 87 = 3x - 97$
7) $51x + 40 = 48x + 121$
8) $6(x+2) = 5x + 97$
10) $18{,}3x - 34{,}2 = 18{,}2x$
12) 6 horizontal
14) $15x + 27 = 19 - 31x + 8$
15) $-10(x+2) = 3x - 59$
16) $0{,}9x + 0{,}5 = 1{,}6 + 0{,}8x$
17) $17{,}2x + 3 = 12 + 17{,}1x$
19) $1{,}7x + 2{,}5 = 1{,}6x + 6{,}2$
21) $7x - 3 = 239 - 4x$
22) 9 horizontal
24) $7x - 3 = 4x + 9$
26) 5 horizontal

Horizontales:

1) $2x - 1 = x + 15$
3) $5x - 4 = 96$
5) $2(x+7) = 3x + 5$
6) $1/3x + 3 = 46$
8) $5(x-2) = 3x + 6$
9) $0{,}3(-x+7) = 0{,}2(-x - 1)$
11) $11x = 21 + 8x$
12) $16x = 45 + 13x$
13) $-(2y - 120) = y$
15) $2x + 5x = 224$
16) $x + 24 = 5x - 24$
17) $7x - 64 = 8 - x$
18) $18x - 7 = 10(x+8) + 7x + 6$
20) $-1{,}2x + 0{,}5 = 0{,}4x - 1{,}1$
21) $-7x + 2000 = 3x - 20$
23) $x - 3 = (5x - 7) / 7$
24) $-6x + 5 = 47 - 7x$
25) $-2x + 15 = x - 102$

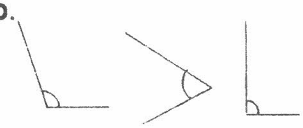
Capítulo III

Geometría

INTRODUCION A LA GEOMETRIA EUCLIDEA

Angulos: Imagine que hacemos girar o rotar una semirrecta, manteniendo fijo su punto extremo; a la figura geométrica así formada, se le llama **ángulo** (ver la ilustración).

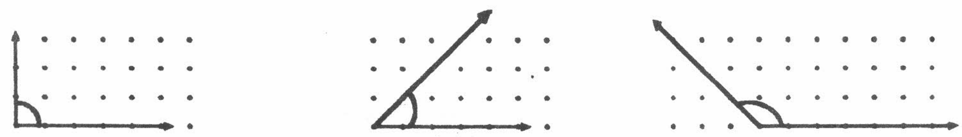
Note que hay un **lado inicial y otro terminal** en cada ángulo.



Una medida utilizada para medir ángulos es el **grado** (un instrumento para medir ángulos es el **transportador**).

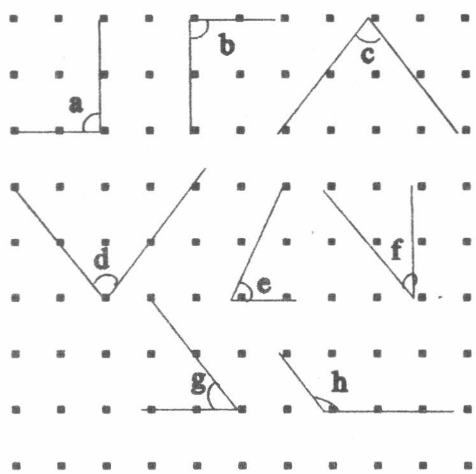
Por ejemplo un ángulo formado por la rotación de una semirecta,media vuelta, mide 180º (180 grados), como lo muestra el siguiente dibujo, en el cual el lado inicial y terminal quedan en direcciones contrarias.

1) Escriba la medida de los siguientes ángulos (Utilice sólo la observación de la cuadrícula marcada por puntos).



(a) (b) (c)

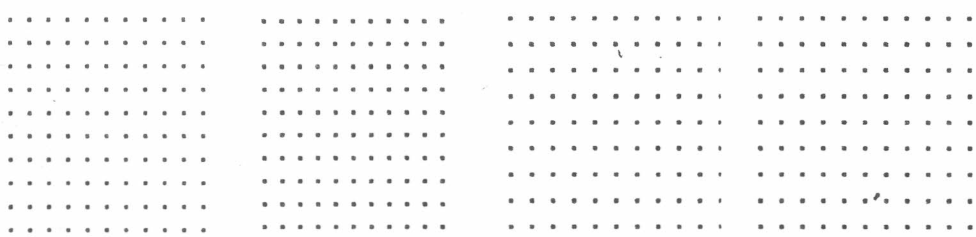
2) Determine cuáles de los ángulos que aparecen en el siguiente dibujo,tienen igual medida.



La medida de un ángulo no depende de la posición que ocupe en el plano, ni tampoco de la longitud de sus lados, puesto que son infinitos; **sólo depende del giro o rotación que lo haya generado.** Entonces **dos ángulos son iguales si tienen la misma medida, independientemente de su posición.**

3) Dibuje en cada cuadrícula de puntos, dos ángulos en diferente posición y cuya medida sea respectivamente:

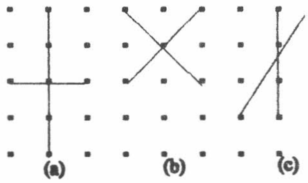
a) 90º, b) 45º, c) 180º, d) 135.



Llamaremos ángulo recto al que mide 90º. El ángulo llano o extendido es el que mide 180º. El ángulo agudo es el que mide más de 0º pero menos que 90º. Angulo obtuso al que mide más de 90º pero menos de 180º.

Segmentos perpendiculares: Dos segmentos que se intersectan son perpendiculares, si al cortarse forman ángulos de 90°.

1) Determine cuáles de los siguientes pares de segmentos son perpendiculares:

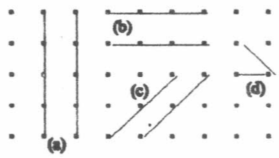


Segmentos paralelos: Dos o más segmentos son paralelos si mantienen la misma dirección.

Si dos o más segmentos son paralelos, es posible trazar un segmento perpendicular a ellos; es decir todos los segmentos perpendiculares a uno dado son paralelos entre sí.

Debe tenerse en cuenta que todo segmento es paralelo a sí mismo.

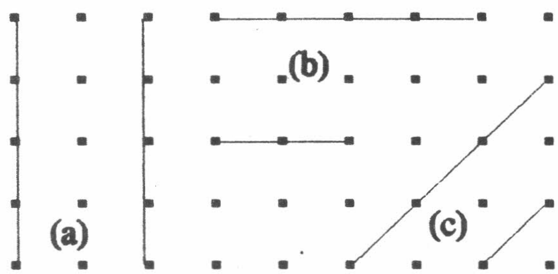
2) Determine cuáles pares de segmentos dados son paralelos



Distancia entre dos segmentos paralelos: Es la medida del segmento perpendicular a ambos y cuyos extremos son puntos de los segmentos paralelos.

Nota: En lo sucesivo considere la distancia entre dos puntos consecutivos, verticales u horizontales, como una unidad.

3) Calcule la distancia entre los segmentos paralelos (a) y (b) del siguiente dibujo:



4) ¿Sabe calcular la distancia exacta entre los segmentos paralelos indicados por (c)?.

5) Es necesario construir el **"teorema de Pitágoras"** para lograr hacer una serie de cálculos más, entre ellos la distancia exacta entre los segmentos paralelos (c), del dibujo anterior.

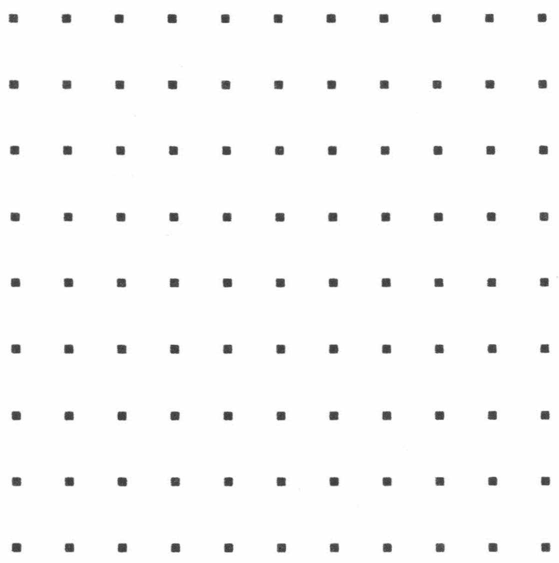
[Entregar a cada dos estudiantes, 9 triángulos rectángulos congruentes, uno de ellos de diferente color y de lados a, b, c, con c el lado mayor.

Pedir que se coloque el triángulo de diferente color y se construya un cuadrado sobre cada lado del triángulo y luego pedir que contesten las siguientes interrogantes].

- Calcule el área de cada cuadrado.

- Establezca la relación que existe entre las áreas de los cuadrados y escriban dicha relación.

- Dibuje en las siguientes líneas de puntos, la figura construída.



Asuma que el triángulo rectángulo utilizado en la construcción, mide de lados **"a"**, **"b"** y **"c"** unidades lineales; en donde c es el lado de mayor longitud y recibe el nombre de **hipotenusa**; los lados de medidas **"a"** y **"b"** **y que conforman el ángulo de 90°** se les conoce como **catetos** del triángulo rectángulo.

La relación entre las áreas de los cuadrados construidos sobre la hipotenusa "c" y los catetos de medida "a" y " b" es $c^2 = a^2 + b^2$, esto significa $c = \sqrt{a^2 + b}$ que , el cual representa un número **irracional.**

Podemos determinar también el número irracional que corresponde a la medida del cateto "**b**", mediante la siguiente expresión: $b = \sqrt{c^2 - a^2}$.

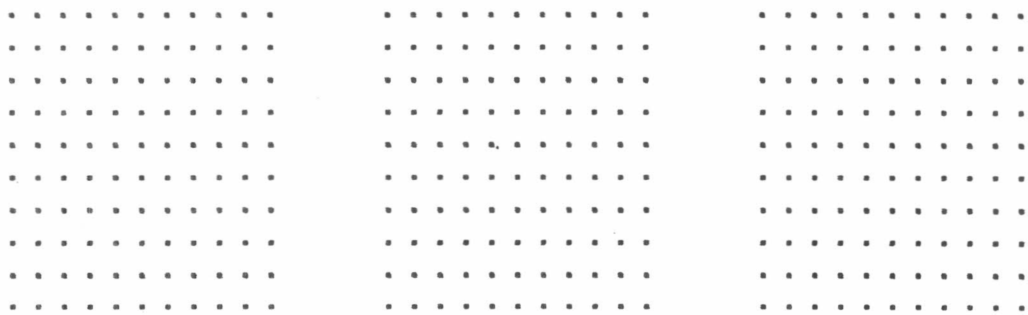
El cateto a corresponde al número irracional $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

6) Considere a y b como las medidas de los catetos de un triángulo rectángulo y c es la medida de la hipotenusa de dicho triángulo. Determine la medida del lado c, en cada uno de los siguientes casos y haga el dibujo en el gráfico de puntos.

i) si $a = 3$, $b = 4$

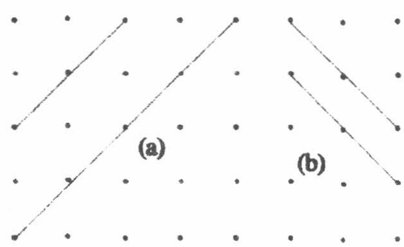
ii) $a = 6$, $b = 8$

iii) $a = 9$, $b = 12$

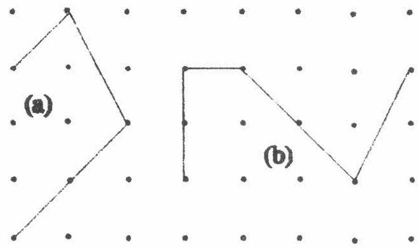


7) Halle la medida c de la hipotenusa de un triángulo rectángulo si los catetos a y b miden una unidad.

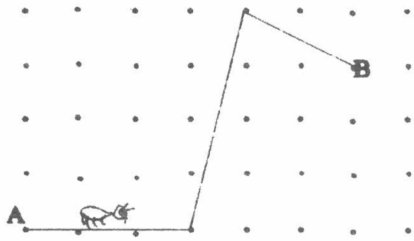
8) Mediante observación, determine la distancia entre los segmentos paralelos, dados en el siguiente dibujo. Esto es la medida del segmento perpendicular a ambas paralelas y cuyos puntos extremos corresponden a las paralelas.



9) Determine la longitud de cada una de las siguientes líneas:



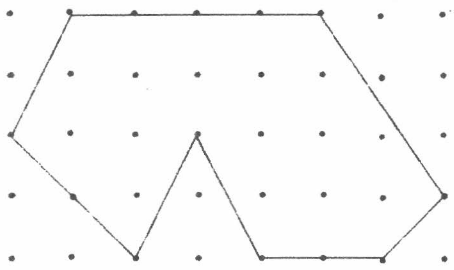
10) Una hormiga parte del punto A y siguiendo la línea pintada, encuentra un trozo de azúcar en el punto B por lo que se detiene (ver dibujo).



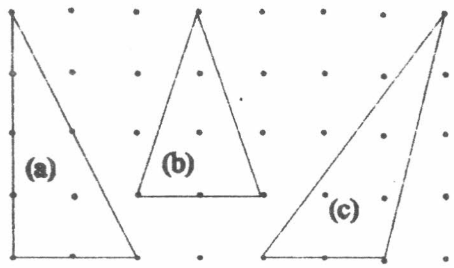
a) ¿Qué distancia recorre la hormiga, para saborear el azúcar?.

b) Si la hormiga hubiera seguido el camino más corto entre A y B, qué distancia recorrería?.

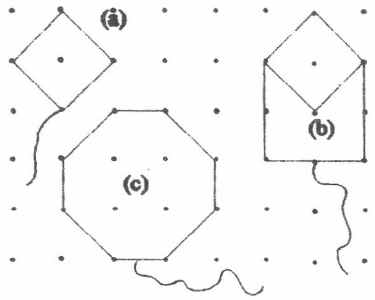
11) Un padre que tiene una hija y un hijo, ofreció un terreno al primero de ellos que calculara con exactitud y correctamente el perímetro del terreno. Para tal propósito dio a cada hijo el siguiente croquis del terreno. Si uno de los hijos hizo correcto el cálculo pedido, cuál fue el número que expresó?.



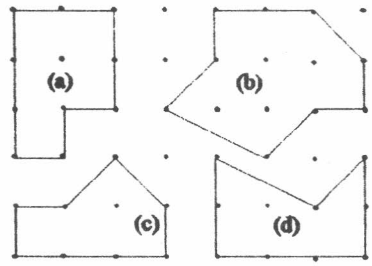
12) Calcule el área de los siguientes triángulos, el perímetro de cada uno y también la medida de los ángulos.



13) ¿Qué cantidad de papel es suficiente para construir los siguientes cometas?.



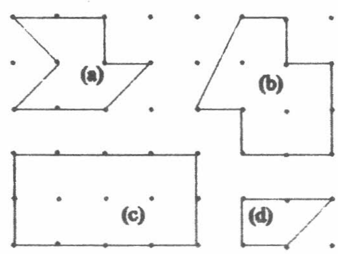
14) ¿Cuánto mide el área de los terrenos, cuyos planos aparecen en las figuras siguientes:



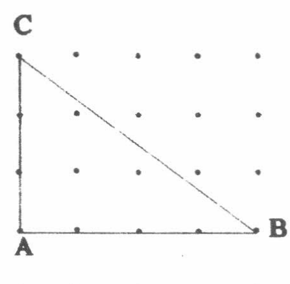
Polígono: Un polígono es cualquier figura geométrica plana y cerrada, cuyos lados son segmentos de recta.

La línea cerrada se le conoce como perímetro; la superficie interior corresponde al área del polígono.

Ejemplos de polígonos:



Triángulos: Son polígonos formados por tres lados, tienen tres vértices y tres ángulos.(Ver siguiente dibujo)



Los vértices del triángulo dibujado son los puntos A, B, C.

Note que los ángulos son <A, <B, <C.

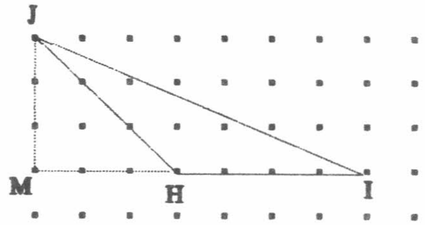
Los lados son los segmentos AC, AB, BC.

◄ABC denota el triángulo dibujado.

Alturas de un triángulo: una altura, es un segmento perpendicular a uno de los lados del triángulo (o a su proyección), cuyos puntos extremos son un vértice y un punto del lado opuesto a ese vértice, o en su proyección.

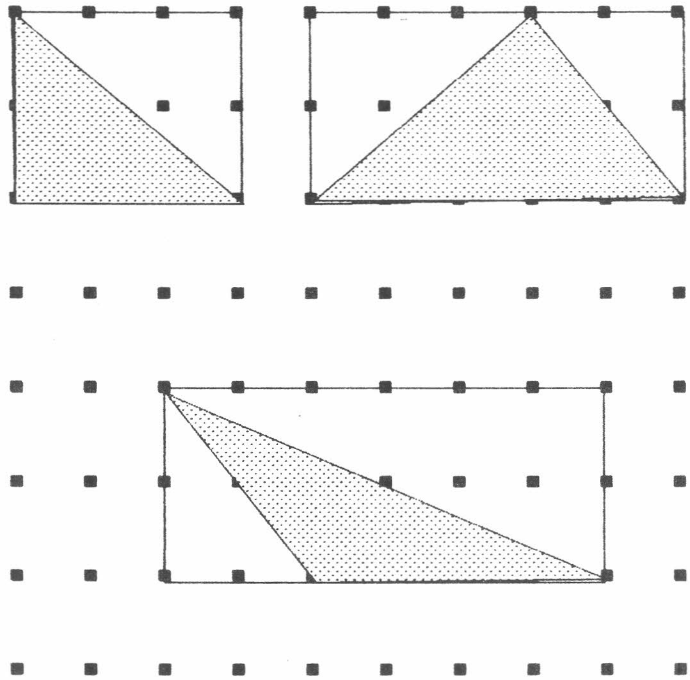
Observe que en el triángulo dibujado anteriormente, el ángulo A mide 90# y por lo tanto el segmento CA es altura sobre el lado AB. El segmento AB es lá altura sobre el lado AC.

Note en el dibujo que para trazar la altura JM sobre el lado HI, en el triángulo ▲HIJ dibujado a la derecha, hubo que proyectar el segmento HI.



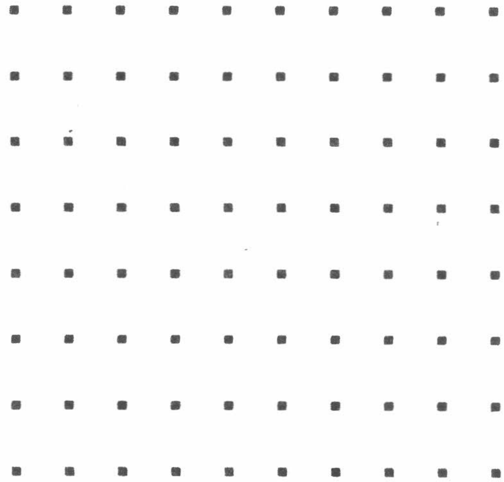
14) Use el transportador y la regla para trazar la altura del triángulo ▲ HIJ,sobre el lado IJ.

15) Utilizando el hecho de que **el área de un rectángulo se calcula multiplicando la longitud del largo por la medida del ancho**, deduzca una fórmula para calcular el área de cualquier triángulo (ayúdese con los siguientes dibujos y compare las áreas que quedan dentro de cada rectángulo).



EL GEOPLANO Y SU USO EN GEOMETRIA

El geoplano (ver gráfico) es un instrumento que permite el estudio de la geometría elemental, en una forma más amena y comprensible para el estudiante.



Conviene diseñarlo de modo que le permita al alumno libertad de acción en sus razonamientos; para lo cual son necesarios los siguientes materiales:

- Un pedazo cuadrado de "plywood", aproximadamente de tres octavos de pulgada de espesor y 23 cm de lado (como mínimo).

- Clavos de media pulgada y sin cabeza.

- Ligas de diferente color.

Los clavos deben ser colocados a una distancia de 3 cm y formando una cuadrícula.

Es sumamente importante que el profesor utilice su propio geoplano, el cual debe ser de tamaño mayor que el que utilicen sus alumnos, ya que debe ser colgado en la pizarra para explicación de los conceptos a los alumnos.

Este instrumento puede ser utilizado para el desarrollo de algunos laboratorios de matemática, particularmente en geometría; para lo cual se requiere que cada alumno tenga a mano una ficha que le sirve de guía para desarrollar el trabajo.

A continuación se ejemplifica una ficha para el desarrollo del laboratorio.

LABORATORIO #1 DE GEOMETRIA

Instrucciones:

Todas las construcciones que se le piden realizar, debe dibujarlas con lápiz en el cuaderno cuadriculado, asumiendo que las distancias en la cuadrícula de papel corresponde a las de la cuadrícula del instrumento utilizado.

1) El geoplano está formado por segmentos de recta verticales y horizontales. Asumiremos , para efectos del trabajo a realizar, que la distancia entre dos clavos consecutivos, **verticales u horizontales**, mide una unidad de longitud.

2) Trace en el geoplano un segmento horizontal e indique la longitud de dicho segmento.

3) Construya un segmento vertical y determine su longitud.

4) Construya un segmento vertical y uno horizontal tal que se itersecten.

5) ¿Sabe cuánto mide cada uno de los ángulos que se forman?.

6) Construya un par de segmentos que se intersecten formando ángulos de 90º.

7) ¿Qué nombre reciben los segmentos que se intersectan formando ángulos de 90º?.

8) Construya un par de segmentos perpendiculares, que no estén en posición vertical ni horizontal.

9) Utilizando el geoplano y las ligas, construya un ángulo de 45ºy uno de 90º.

10) Construya 5 ángulos en diferente posición y cuya medida sea de 90º.

11) ¿ Depende la medida de un ángulo de la longitud de los lados?.

12) Construya en el geoplano ángulos cuya medida sea múltiplo de 45º.

13) ¿Puede determinar la medida de un ángulo construido en el geoplano y que no sea múltiplo de 45º?.

Habrá notado que en el geoplano utilizado es difícil determinar la medida de los ángulos que no son múltiplos de 45º.

14) Diremos que dos **segmentos son paralelos si** mantienen la misma dirección. Es decir **si es posible trazar un segmento perpendicular a ambos.**

Utilizando ligas construya tres pares de segmentos paralelos (horizontales, verticales y oblicuos) y dibújelos en el papel cuadriculado.

15) **Polígono: se llama polígono a la figura geométrica plana y cerrada, cuyos lados son segmentos de recta. La línea periférica se llama perímetro. La medida de la superficie interior del plígono corresponde al área del mismo.(Construya varior polígonos en el geoplano).**

16) Clasificación de polígonos: Los polígonos suelen clasificarse en **cóncavos** y **convexos**.

Los polígonos cóncavos se caracterizan porque es posible trazar al menos un segmento, cuyos puntos extremos pertenecen al polígono pero que no está enteramente contenido en su interior.

Los polígonos que no son cóncavos se les denomina **convexos**.

17) Construya en su geoplano tres polígonos cóncavos y tres convexos y dibújelos en las hojas cuadriculadas. Rotule los dibujos según sean cóncavos o convexos.

18) Un rectángulo es un polígono convexo que tiene sus ángulos de 90º y cada par de lados opuestos son de igual medida.

19) Construya el menor rectángulo posible y determine la medida de la superficie interior (área).

20) Construya en el geoplano otro rectángulo y luego dibújelo. Determine el área A y la medida del perímetro P.

21) Analice las siguientes interrogantes y justifique su respuesta.

a) ¿Es el rectángulo un polígono?.

b) ¿Qué tipo de polígono es el rectángulo?

c) ¿Es el cuadrado un rectángulo?

d) ¿Es todo rectángulo un cuadrado?.

22) Construya en el geoplano dos líneas quebradas, compuestas por segmentos de recta verticales y horizontales. Dibújelas e indique la longitud de cada una.

23) Hasta el momento podemos calcular la longitud de los segmentos verticales u horizontales, no así la de los segmentos inclinados (oblicuos); por tal motivo procederemos a construir el teorema de Pitágoras.

-Construya un polígono de tres lados (triángulo), que tenga uno de sus ángulos de 90º, trate de hacerlo pequeño y al centro del geoplano.

-Construya sobre cada uno de los lados un cuadrado, de manera que cada lado del cuadrado mida igual que el lado respectivo del triángulo.

-Determine el área de cada cuadrado.

-¿Nota alguna relación entre las medidas de dichas áreas?

-Suponga que en el triángulo el lado mayor (hipotenusa) mide c unidades y los lados menores que conforman el ángulo recto o de 90º(llamados catetos), miden a y b unidades.

La relación entre las áreas de los tres cuadrados construidos es $c^2 = a^2 + b^2$.

Esto significa que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

- Dibuje en el cuaderno cuadriculado la construcción hecha anteriormente, la cual ilustra el teorema de Pitágoras.

24) Calcule la longitud de la hipotenusa del triángulo de la ilustración que hizo anteriormente.

25) Construya un triángulo rectángulo (polígono de tres lados con un ángulo recto) y determine la longitud de la hipotenusa. Dibújelo e indique las medidas de los tres lados.

26) Construya en el geoplano un segmento inclinado y determine su longitud. (sugerencia:- considere dicho segmento como la hipotenusa de un triángulo rectángulo y use teorema de pitágoras).

27) Construya en el geoplano una línea quebrada que tenda segmentos verticales, horizontales e inclinados. dibújela en el cuadriculado e indique su longitud.

28) Construya otra línea quebrada que tenga al menos dos segmentos inclinados, dibújela en el cuaderno e indique su longitud.

29) Construya y luego dibuje un triángulo rectángulo cuyos lados midan:

a) 1, 1 y $\sqrt{2}$ unidades lineales.

b) 3, $\sqrt{13}$ y 2 unidades lineales.

30) Determine en cada uno de los casos anteriores lo siguiente:

a) La longitud de la hipotenusa.

b) La medida del perímetro P

c) El área A.

Para calcular el área sólo compare el triángulo con un rectángulo cuyos lados corresponden a los catetos.

31) ¿Puede construir un polígono de tres lados (triángulo), cuyos lados midan 2, 3 y 6 unidades?.

32) ¿Qué condición necesaria, en cuanto a medida, deben satisfacer tres segmentos de recta, para que constituyan los lados de un triángulo?.

33) Dé medidas de tres segmentos,diferentes al indicado en el paso 28, tales que no pueda formarse con ellos un triángulo.

34) Construya dos triángulos rectángulos, dibújelos e indique la medida de los tres lados.

35) Los triángulos se clasifican de dos maneras; de acuerdo a la medida de sus lados y de acuerdo a la medida de sus ángulos.

36) **De acuedo a la medida de los lados los triángulos se clasifican en**:

-Equiláteros: Si tienen los tres lados de igual medida.
-Isósceles: Si tienen al menos dos lados de igual medida.
-Escalenos: Son los que tienen sus tres lados de diferente longitud.

Respecto a la medida de los ángulos los triángulos se clasifican en:

-Acutángulos: Si tienen los tres ángulos agudos (su medida es mayor que 0º y menor que 90º)
-Rectángulos: Son los que tienen un ángulo de 90º (recto).
-Obtusángulo: Son los triángulos que tienen un ángulo obtuso (su medida es mayor que 90º y menor que 180º).

Todos los triángulos equiláteros tienen sus ángulos de 60º, de manera que no es posible construirlos en el geoplano que estamos utilizando. Por lo tanto sólo construiremos triángulos isósceles o escalenos.

37) Construya y luego dibuje en el papel cuadriculado lo siguiente:
a) Un triángulo rectángulo isósceles.
b) Un triángulo rectángulo escaleno.
c) Un triángulo acutángulo isósceles.
d) Un triángulo obtusángulo escaleno.

Escriba al lado de cada dibujo la medida del perímetro P y el área A.

38) Construya tres triángulos obtusángulos, dibújelos y escriba al lado de cada dibujo la medida del perímetro P y el área A.

Para calcular el área de un polígono,cóncavo o convexo, que tenga más de tres lados; se puede proceder a dividirlo en triángulos.

39) Para cada uno de los polígonos que se le pide construir a continuación, haga el dibujo respectivo, escriba al lado el perímetro P el área A y rotule con "cóncavo" o "convexo",según corresponda.

a) Polígono cóncavo de 4 lados.
b) Polígono convexo de 4 lados.
c) Polígono cóncavo de 5 lados.
d) Polígono convexo de 5 lados.
e) Polígono convexo de seis lados (hexágono).
f) Polígono convexo de cuatro lados, que tiene sólo dos lados paralelos (trapecio).
g) Polígono convexo de 4 lados, que tiene los lados paralelos dos a dos (paralelogramo).

40) Determine una fórmula para hallar la medida del área de cualquier polígono, cóncavo o convexo; construido de manera tal que que cumpla las siguientes condiciones:

a) **No queda ningún clavo en el interior del polígono.**
b) **Sus lados no se entrecruzan.**

Considerando las dos condiciones anotadas, proceda a construir varios polígonos, cóncavos y convexos, que sólo requieran de tres clavos en su construcción; dibújelos y anote la medida de la superficie (área) de cada uno de ellos.

41) Sin olvidar las dos condiciones anotadas, construya polígonos que sólo requieran de 4 clavos en su construcción, dibújelos en el papel cuadriculado y anote al lado de cada dibujo el área.

Continue con el procedimiento, construyendo polígonos diversos, cóncavos y convexos, que requieran solamente de cierto número de clavos para su construcción; calcule el área de cada uno de ellos.

42) Complete la siguiente tabla, utilizando los datos obtenidos por usted en la especificación # 37.

c	3	4	5	6	7	48	n
A							

c= número de clavos ubicados en el perímetro.

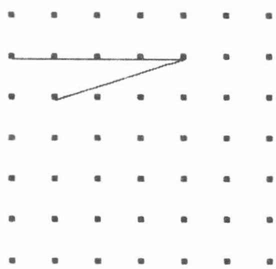
A= área del polígono tal que en su interior no queda ningún clavo y sus lados no se entrecruzan.

43) ¿Cuál es el número que corresponde al área un polígono tal que en su construcción en el geoplano no queda ningún clavo en el interior, sus lados no se entrecruzan y tiene 46 clavos ubicados en el perímetro?

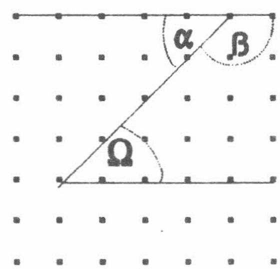
LABORATORIO #2 DE GEOMETRÍA.

Considere las tres siguientes ilustraciones.

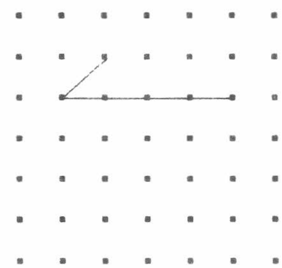
Ilust.#3



Ilust.#2



Ilust.#1



1) Construya un ángulo congruente con el de la ilust.#1 e indique su medida.

2) Calcule la medida de cada uno de los ángulos α, β y Ω de la ilust.#2.

3) ¿Son suplementarios los ángulos contiguos α y β ?.

4) Construya en el geoplano un ángulo congruente con el de la ilust.#3.

¿Le permite el geoplano calcular la medida de dicho ángulo?.

Note que no es evidente la medida de todo ángulo que construya en el geoplano, únicamente aquellos que son múltiplo de 45º.

5) Construya dos segmentos de recta paralelos y uno transversal, de manera que se formen 8 ángulos, al menos uno de 45º y el vértice de cada uno quede indicado por un clavo.

a) Dibuje en el papel cuadriculado la construcción realizada y anote las medidas de cada ángulo.

b) Observe cada par de ángulos opuestos por el vértice; ¿qué relación existe entre las medidas de cada par de ellos ?.

c) ¿Cuántos pares de ángulos contiguos y suplementarios se forman?.

d) ¿Qué característica en común, en cuanto a medida, tienen los ángulos obtusos?.

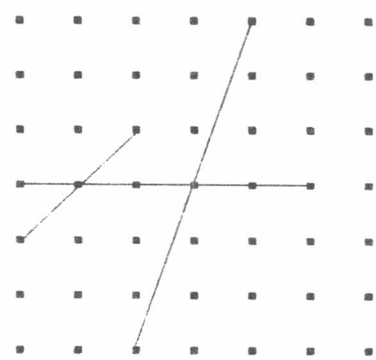
e) ¿Tienen igual medida los ángulos agudos formados por las dos paralelas y la transversal?.

6) Construya dos segmentos de recta paralelos y uno transversal, de manera que se formen 8 ángulos de los cuales los agudos no tienen por medida un número múltiplo de 45⊕.

a) Pese a que no puede precisar la medida de los ángulos formados, indique qué relación existe entre las medidas de los ángulos agudos formados.

b) ¿Tienen igual medida los ángulos obtusos que se forman con los dos segmentos paralelos y el segmento transversal?.

Ilust.#4



7) Observe la ilustración #4 y constrúyala en el geoplano. Explique porqué no todos los ángulos agudos que se forman tienen igual medida.

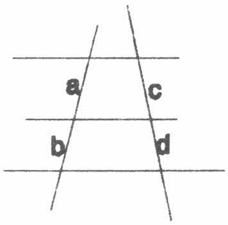
Los ángulos agudos formados por dos paralelas y una transversal tienen igual medida. Lo mismo ocurre con los ángulos obtusos.

PARALELISMO Y SEGMENTOS PROPORCIONALES.

"Tres o más rectas paralelas intersectadas por dos transversales, determinan en éstas segmentos proporcionales".

De la ilustración #5, en la que aparecen tres rectas horizontales paralelas, se puede establecer la siguiente proporción: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

Ilust.#5



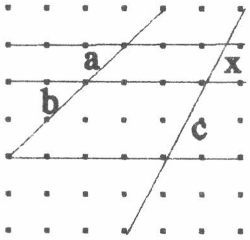
8) Escriba tres proporciones entre a,b,c y d que se deriven de la ilustración #5,y que sean diferentes de la anotada anteriormente.

9) Realice las construcciones correspondientes a las ilustraciones #6,#7.

10) Considere las medidas que corresponden a las letras a,b,c de cada dibujo y que indican la longitud de los segmentos de las transversales, formados por la intersección de éstas con las paralelas.

Establezca en cada caso una prophorz 150 orción entre los valores "a", "b", "c", "x" y determine el valor correspondiente a "x".

Ilust.#6

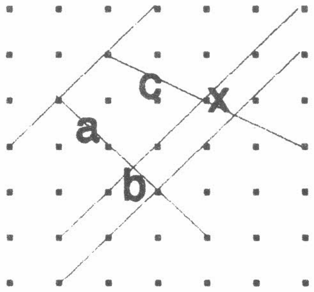


$a=\sqrt{2}$ $\qquad$ $a=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$b=\sqrt{8}$ $\qquad$ $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$

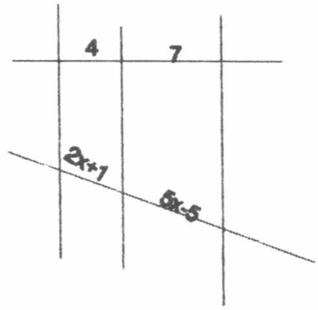
$c=\sqrt{5}$ $\qquad$ $c=\sqrt{5}$

Ilust.#7



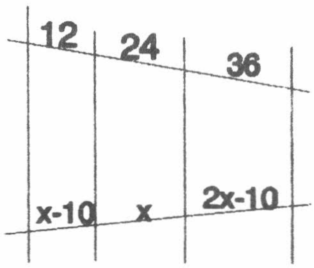
10) En la ilustración #8 las tres rectas verticales son paralelas. Establezca una proporción y halle las medidas de los segmentos 2x+1 y 5x-5.

Ilust.#8



11) La ilustración #9 muestra una parte de un plano de una finca que ha sido dividida en varios lotes. Los que se muestran miden de frente a la calle 12,24 y 36 metros respectivamente. El dueño necesita calcular la medida de los lados opuestos, de manera que las divisiones entre los lotes sean paralelas; él ha realizado algunos cálculos que le permiten estimar las medidas que busca, en términos de variables y las cuales aparecen en el croquis.

ilust.#9



Determine el valor de x y la longitud correspondiente a la línea de fondo de cada lote.

Triángulos semejantes

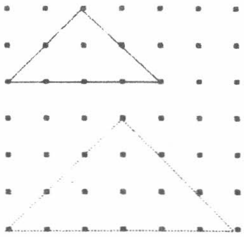
Diremos que dos triángulos son semejantes si tienen la misma forma aunque no necesariamente el mismo tamaño. Sin embargo dicha descripción de semejanza es muy vaga y no nos permite analizar la semejanza entre triángulos.

Precisemos más el concepto de semejanza.

Dos triángulos son semejantes si los ángulos de uno de los triángulos son congruentes con los ángulos del otro triángulo y además si es posible establecer una proporción que relacione las medidas de cada uno de los lados en cada triángulo. Dicha proporción se establece con los lados homólogos que son. los que se oponen a los ángulos congruentes.

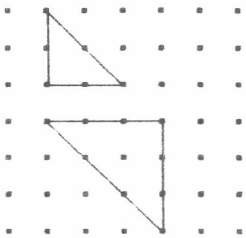
12) Para las ilustraciones #10 y #11, determine la medida de los ángulos, la longitud de cada lado de los triángulos y establezca si es posible la proporcionalidad entre los lados homólogos de cada par de triángulos (lados que se oponen a ángulos iguales).

ilust.#10



Deduzca de lo anterior si los triángulos de cada ilustración son o no semejantes.

Ilust.#11

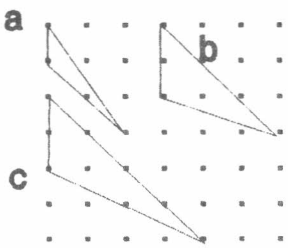


13) Aunque ya hemos visto que no se puede calcular mediante el geoplano, la medida de cualquier ángulo construído; hay una serie de principos que nos permiten saber si dos (o más) triángulos son semejantes.

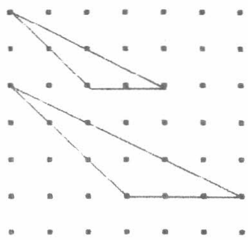
Principio #1. (L.L.L)

Dos triángulos son semejantes si es posible establecer una proporción entre las medidas de los lados de los triángulos; es decir si los lados homólogos son proporcionales.

Ilust.#13



ilust.#12



14) Construya en el geoplano los triángulos de la ilust.#12 y determine las longitudes de los lados.

15) Establezca una proporción que relacione los tres lados de cada triángulo del dibujo anterior.

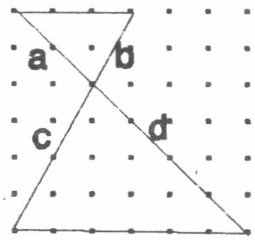
16)¿Son semejantes los dos triángulos de la ilustración #12.?

17) En la ilustración #13 aparecen los triángulos a, b y c. Constrúyalos en el geoplano y analice cuales de ellos son semejantes.

Principio 2. (L.A.L) .

Dos triángulos son semejantes si un ángulo de uno de ellos es congruente con alguno del otro triángulo y si los lados que conforman al primer ángulo son proporcionales a los lados que conforman el segundo.

Ilust.#14



18) Construya en el geoplano el dibujo de la ilustración # 14.

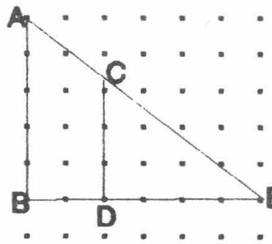
Considere los siguientes d $a=\sqrt{8}$, $b=\sqrt{5}$, $c=\sqrt{20}$, $d=\sqrt{32}$ atos, y verifique la semejanza entre los dos triángulos, de acuerdo al principio #2.

Principio 3 (A.A).

Dos triángulos son semejantes si dos ángulos de uno de ellos son congruentes con dos ángulos del otro triángulo.

19) De acuerdo al principio #3 de semejanza , justifique que los triángulos ABE y CDE (Ilust.#15) son semejantes. Lo anterior se simboliza como $\triangle ABE \sim \triangle CDE$.

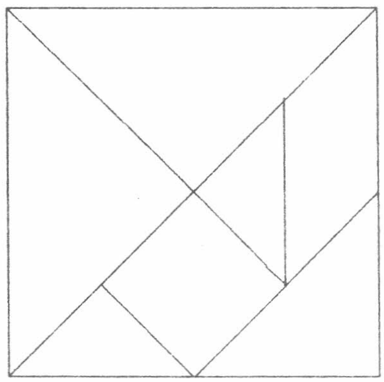
Ilust.#15



TANGRAMA

El tangrama es un modelo geométrico de origen chino, conocido también como "siete astutos" o "juego de la sabiduría".

Consta de un cuadrado (ver figura) dividido en siete partes: dos triángulos rectángulos isósceles pequeños y congruentes entre sí: un triángulo rectángulo isósceles mediano, que es congruente con el triángulo rectángulo que se puede formar con los dos pequeños; dos triángulos rectángulos congruentes, que conforman la mitad del tangrama; un paralelogramo, con ángulos de 45º y 135º; un cuadrado pequeño cuyos lados son congruentes con los catetos de los triángulos pequeños.



El tangrama puede ser utilizado, entre otras cosas, para el desarrollo o repaso de conceptos de geometría euclidiana, a través de un procedimiento heurístico que parte de lo concreto.

Objetivo general: que mediante la uitlización del tangrama, el estudiante logre formar las estructuras mentales, que le permiten comprender los conceptos y algunos teoremas de geometría elemental.

A continuación aparece una ficha para la utilización del tangrama en geometría elemental.

Procedimiento: se divide la clase en grupos de dos o tres estudiantes; se les entrega las siete piezas que conforman el tangrama; pidiéndoles además su cuaderno cuadriculado, lápiz, tajador, regla o escuadra y se procede a realizar el siguiente cuestionario.

Ficha de trabajo para el alumno.

Instrucciones: Utilice lápiz y cuaderno cuadriculado para realizar los dibujos y cálculos que se le soliciten a continuación.

1) Observe las piezas que se le han entregado y trate de compararlas por sobreposición.

2) ¿Qué nombre recibe la pieza formada por cuatro lados perpendiculares dos a dos?. Dibújela en su cuaderno considerando que sus lados miden una unidad y sus ángulos 90º.--------------

3) Forme dos cuadrados de diferente tamaño, utilizando en cada caso sólo dos piezas, observe las medidas de sus lados y de sus ángulos e indique las características comunes que tienen ambas figuras formadas.--

4) ¿Cuánto miden los ángulos de cada triángulo pequeño?. -------------------.

5) ¿Cuál es la medida de los lados del triángulo pequeño, que conforman el ángulo de 90º?.-------------------

6) Dibuje en su cuaderno el triángulo pequeño e indique las medidas de los ángulos y de los lados (considere la medida del lado más largo, como $\sqrt{2}$ que es aproximadamente 1,41).

7) Observe el triángulo mediano, ¿puede formar dicho triángulo con dos piezas?, hágalo.

8) Dibuje en su cuaderno el triángulo mediano e indique en el dibujo las medidas de los lados y de los ángulos.

9) ¿Qué nombre recibe los triángulos que tienen un ángulo de 90º?.-------------------

10) ¿Qué nombre recibe los triángulos que tienen dos lados de igual medida?.-----------

11) ¿Qué nombre recibe los triángulos que tienen un ángulo de 90º y dos lados de igual medida?.-----------------

12) Observe el triángulo mayor. ¿Puede formarlo utilizando sólo tres piezas?. Dibújelo en su cuaderno y escriba las medidas de los ángulos y de los lados.

13) Forme un cuadrado cuya diagonal mida $\sqrt{2}$, dibújelo en su cuaderno e indique las medidas de los lados y de los ángulos.

14) Forme otro cuadrado cuya diagonal mida 2 unidades, dibújelo en su cuaderno e indique la medida de los lados y de los ángulos.

15) Utilice dos piezas para formar la pieza de cuatro lados y cuyos ángulos no son rectos; dibújela en su cuaderno e indique la longitud de los lados y la medida de los ángulos.

Note que los lados opuestos tienen igual medida y son paralelos, así que dicha figura corresponde a un **paralelogramo**.

16) Analice cada pieza, sus características, sus medidas y su relación con las otras piezas y forme un cuadrado con las siete piezas dadas.

17) Dibuje en su cuaderno cuadriculado el cuadrado formado por las siete piezas, de tal manera que se observe en el dibujo las piezas que lo conforman, indique en el dibujo las medidas de los segmentos y las medidas de los ángulos.

18) Construya dos cuadrados de diferente tamaño, utilizando en cada caso sólo dos piezas; dibuje cada cuadrado y escriba al lado de cada dibujo la medida del perímetro P, el área A y la medida de las dos diagonales.

19) Con base en la construcción anterior, escriba al lado de los dibujos del triángulo pequeño y del mayor, el perímetro P y el área A.

20) Construya de nuevo el cuadrado con las siete piezas y con base en esa construcción deduzca el área de la pieza que es un paralelogramo.

21) Dibuje el paralelogramo e indique al lado del dibujo la medida del perímetro P y el área A (medida de la superficie interior).

22) Utilizando únicamente dos piezas, construya dos polígonos congruentes (igual forma y tamaño) que no sean cuadrados, y que tengan sólo dos lados paralelos.

-Dibuje los polígonos anteriore en su cuaderno y escriba al lado de cada dibujo la medida del perímetro y del área.

-Indique además, la medida de cada uno de sus cuatro ángulos y el nombre que recibe cada polígono.

23) Construya un trapecio de mayor tamaño que los anteriores, utilizando únicamente dos piezas.
Haga el dibujo e indique la medida del perímetro y del área.

24) Construya, sólo con dos piezas, un polígono de cuatro lados que tenga únicamente dos lados paralelos, pero que los ángulos de las bases tengan igual medida.

- ¿Qué nombre recibe ese cuadrilátero?.

-Haga el dibujo y escriba la medida del perímetro, el área y la medida de los ángulos.

25) Utilice sólo dos piezas para construir un polígono cóncavo de cinco lados, cuyo perímetro sea de $2+3\sqrt{2}$ unidades lineales.

-Dibújelo e indique la medida de sus cinco ángulos.

26) Construya un paralelogramo (**polígono de cuatro lados que tiene sus lados opuestos paralelos**).

-Dibuje el paralelogramo e indique la medida de los ángulos, del perímetro y el área.

27) Utilizando dos piezas, construya un polígono cóncavo, que mida de área 3 unidades cuadradas y cuyo perímetro sea de $6+2\sqrt{2}$ unidades simples.

- Dibújelo e indique la longitud de los lados.

28) Utilizando sólo tres piezas, construya:

a) Un rectángulo de 2 unidades cuadradas de área, dibújelo y escriba la longitud de los lados, el área, la medida del perímetro y de sus ángulos.

b) Un rectángulo congruente con el anterior, pero formado por otras piezas.

- Dibuje, en su cuaderno, la configuración de dicho rectángulo e indique la medida de los lados, del perímetro y el área.

c) Un trapecio escaleno que mida de perímetro $6\sqrt{2}+2$ unidades simples; dibújelo e indique la medida de los lados y el área.

d) Un trapecio isósceles cuyo perímetro sea $4+2\sqrt{2}$ dibújelo e indique las medidas de los lados, los ángulos y el área.

e) Un cuadrado cuya área mida 2 unidades cuadradas; dibújelo e indique el perímetro.

f) Un triángulo cuyo perímetro es $4+2\sqrt{2}$, dibújelo y exprese el área.

29) Con cuatro piezas construya:

a) Un cuadrado cuya diagonal es $2\sqrt{2}$, dibújelo e indique el área y la medida del perímetro.

b) Un rectángulo de 3 unidades de área; dibújelo e indique la medida de los lados y del perímetro.

c) Un trapecio escaleno cuyo perímetro es $2+6\sqrt{2}$ unidades lineales.

- Dibújelo e indique la medida de los cuatro ángulos y calcule el área.

d) Un trapecio isósceles cuya área mide 4 unidades cuadradas, dibújelo y escriba la medida del perímetro y la medida de los ángulos.

30) Con cinco piezas, construya:

a) Un trapecio escaleno cuyos lados sean $2\sqrt{2}$, 2, $\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, dibújelo y escriba la medida del perímetro P y el área A.

b) Un rectángulo de 10 unidades de perímetro; dibuje la configuración de dicho rectángulo y escriba el número correspondiente al área.

c) Un polígono convexo de cinco lados y cuya área sea de 7 unidades cuadradas. Dibújelo e indique el perímetro.

MOSAICO MATEMATICO

Materiales: 48 triángulos rectángulos isósceles, congruentes entre sí y 32 rombos con ángulos de 45° y lados iguales a los catetos de los triángulos.

Objetivo general: que es estudiante logre repasar una serie de conocimientos geométricos, mediante la observación, construcción y el cálculo.

La técnica por utilizar es la interrogativa, con participación activa de los estudiantes. El profesor puede recurrir al geoplano, para recalcar lo construido por los estudiantes.

Desarrollo de la lección: a cada grupo de cuatro estudiantes, se le entrega 4 triángulos y 3 rombos (suponiendo que hay 36 estudiantes). Conviene que los grupos formen un círculo. Se les indica que los dos lados más cortos de cada triángulo, miden una unidad.

En la conducción de la clase el profesor puede guiarse con la siguiente lista:

1) ¿Qué se entiende por triángulo rectángulo?.

2) ¿Cómo se llaman los lados del triángulo, que conforman el ángulo recto?.

3) ¿Qué nombre recibe el lado del triángulo, que se opone al ángulo recto?.

4) ¿Qué se entiende por triángulo isósceles?.

5) Con las piezas dadas, construya un cuadrado. ¿ Cuántos grados miden los ángulos del cuadrado?; ¿cuánto miden los ángulos agudos del triángulo rectángulo isósceles?.

6) Construya con las piezas, dos triángulos rectángulos distintos e indique una característica común entre ellos, respecto a los lados.

7) Dé ejemplos de las medidas de los dos ángulos agudos, de triángulos rectángulos no isósceles.

8) Para cualquier triángulo rectángulo, isósceles o no, diga que relación existe entre los catetos y la hipotenusa.

9) Se pide a los grupos 9 ó 10 triángulos rectángulos y se les indica a tres estudiantes que pasen al centro del aula, a construir la relación que existe entre la hipotenusa y los dos catetos de todo triángulo rectángulo.

Se solicita a otros tres estudiantes, que construyan la misma relación, pero formando un triángulo rectángulo de mayor tamaño.

10) Los grupos vuelven al orden inicial y se les pide que calculen la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo de una pieza.

11) ¿Cuánto mide la superficie del cuadrado más pequeño, que se puede formar con las piezas dadas?.

12) ¿Cuál es el área del triángulo de una pieza?. Calcúlela primero mediante observación y luego mediante el uso de una fórmula.

13) Forme un triángulo que tenga la misma área que el área del cuadrado más pequeño que pueda construir con las piezas e indique características de ese triángulo. Verifique que dicho triángulo es rectángulo.

14) ¿Cuánto mide la altura sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo de una pieza?.

Calcule el área usando el hecho de que la altura sobre la hipotenusa, en un triángulo rectángulo isósceles, divida al triángulo original en dos triángulos congruentes.

15) ¿Cuánto mide un ángulo extendido o llano?. Represéntelo mediante un dibujo y obsérvelo con dos piezas.

16) Haga una construcción geométrica, con las piezas dadas, que le permita calcular la medida de los ángulos agudos del rombo y de la misma forma calcular la de los ángulos obtusos del rombo. (Sugerencia: forme un ángulo llano utilizando ángulos del triángulo ya conocido por usted).

17) Construya el rectángulo más pequeño que pueda formar con triángulos y rombos y calcule el área de dicho rectángulo.

Utilice el cálculo anterior para determinar el área del rombo (observe en el rectángulo construido, las medidas de los ángulos del rombo).

18) Forme un polígono de 5 lados, con rombos y triángulos y determine el área y la medida del perímetro.

19) Indique el subconjunto de R, al que pertenecen los números del área y de la medida del perímetro del polígono de cinco lados que construyó.

20) Construya con dos rombos y dos triángulos un trapecio y calcule el área mediante dos formas: por observación y mediante el uso de la fórmula para el cálculo del área de un trapecio. Calcule también la medida del perímetro.

21) ¿Corresponde a un número racional el área y la medida del perímetro del trapecio cosntruido?.

22) ¿Cuánto miden los ángulos internos del trapecio construido?.

23) Construya un trapecio isósceles con rombos y triángulos. Calcule el área de dos formas: por observación y uso de fórmula.

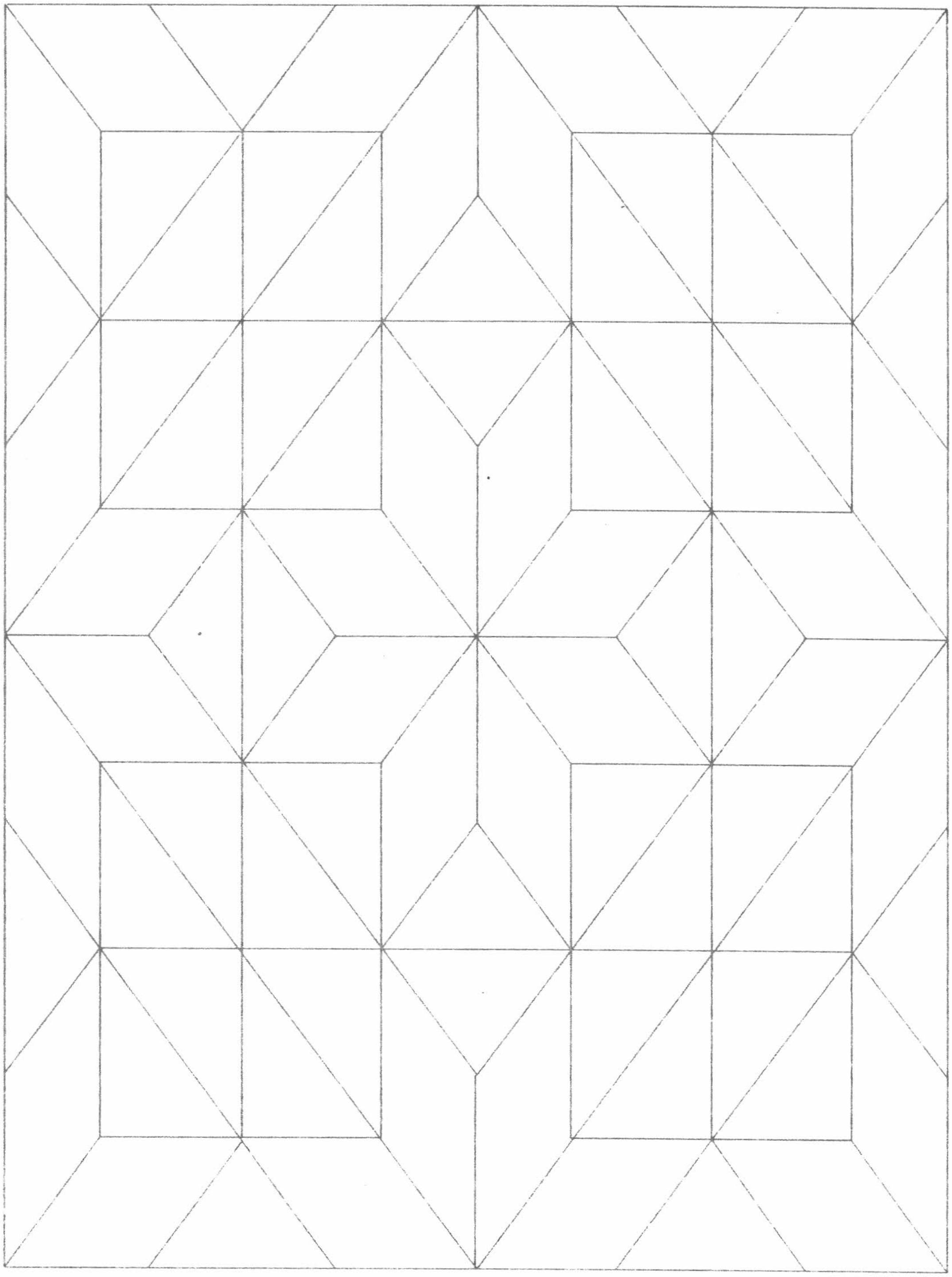
24) Forme un cuadrilátero con rombos y triángulos, que no sea paralelogramo y calcule el área.

25) Forme con las mismas piezas que utilizó para el cuadrilátero, un hexágono no regular e indique la medida del perímetro y la medida de los ángulos internos.

26) Identifique segmentos de longitud: a) $2\sqrt{2}$ b) $1+\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}-1$ d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

27) Con las piezas de tres grupos formen un polígono regular. Determine en él la medida de los ángulos internos, del perímetro y el área. Observen también la medida de un ángulo externo y la medida de un ángulo central.

Mosaico



BIBLIOGRAFÍA

Aiken, Lewis Ability and creativity in mathematics. Columbus,Ohio:Eric Information Analysis for Science,Mathematics and Environmental Education, Ohio State University, 1973.

Arias,Rosario y otros Didáctica de la Matemática. San José:Editorial Universidad Estatal a Distancia, 1981.

Bennett J.R, Albert B. "Fraction patterns visual and numerical". Mathematics Teacher.V.82(4): 254-259,
april, 1989.

Clark,Alice A. and Leitch Carol H.Amusements in Developing Algebra Skills. Troy, Michigan:Midwest Publications Company, 1975. v.1

Ibry,Ken. "Figuring out a jigsaw puzzle".Mathematics Teacher. v.82(4); april, 1989.

Lara Aparicio.,Miguel.Antología de la Matemática. México, U.N.A.M, Dirección General de Publicaciones, 1971.

National Council of Teacher of Mathematics U.S.A, Algoritmos de las operaciones con números enteros. México: Editorial Trillas, 1967.

National Council of teachers of Mathematics. Sugerencias para resolver problemas. México: Editorial Trillas, 1970.

Piaget ,Jean y Gattegno, Galeb. La enseñanza de las matemáticas. Madrid; Editorial Aguilar, 1965.

Picard, Nicole. Matemática y juego de niños.Bilbao (España): Editorial Desclée de Brouwer, 1975.

Santaló Surs,Luis Antonio.La matemática en la escuela secundaria.Buenos Aires:EUDEBA, 1966.

UNESCO. Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática. Montevideo-:UNESCO, 1973.v.3

Universidad Nacional Autónoma de México.Antología de Matemátca. México D.F: Dirección Nacional de Publicaciones, 1971.

Impreso en la
Oficina de Publicaciones
de la Universidad de Costa Rica