Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2008 **15**(1) : 1–12
cimpa – ucr   issn: 1409-2433

MÉTODOS DE PUNTO INTERIOR PARA OPTIMIZACIÓN CUADRÁTICA CONVEXA CON MATRICES NO DEFINIDAS POSITIVAS

Gonzalo Palencia F.*   Rosina Hing C.†   Mariledy Rojas C.‡
Denysde Medina S.§

Recibido/Received: 2 Feb 2007; Aceptado/Accepted: 31 Oct 2007

Resumen

En este artículo se obtiene una modificación del algoritmo recursivo de Cholesky que permite la factorización de matrices semidefinidas positivas, aún cuando éstas no sean definidas positivas, sin incrementar el costo computacional. Gracias a esta factorización se transforman los Problemas de Programación Cuadrática Convexa en Problemas Cónicos de Segundo Orden, los cuales se resuelven con la ayuda de la generalización del algoritmo predictor-corrector de Menhrotra para dichos problemas. Se realizan experimentos numéricos para validar los resultados.

Palabras clave: programación cuadrática convexa, conos de segundo orden, métodos de punto interior.

Abstract

In this article a modification of the recursive algorithm of Cholesky is obtained that allows the factorization of Semi Definite Positive Matrices, even though these are not positive defined, without increasing the computational cost. Thanks to this factorization Convex Quadratic Programming Problems are transformed into Second Order Conical Problems, which are solved with the aid of the generalization of the Predictor-Corrector algorithm of Mehrotra for these problems. There are carried out numeric experiments for validating the results.

*Departamento de Matemática, Facultad de Matemática, Física y Computación, Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas, Carretera a Camajuaní 5.5 Kms, Santa Clara, Cuba. E-Mail:

†Misma dirección que G. Palencia. E-Mail: `rhing@uclv.edu.cu`

‡Departamento de Computación, misma dirección que G. Palencia.

§Misma dirección que M. Rojas. E-Mail: `denysde@uclv.edu.cu`

Keywords: convex quadratic programming, second-order cones, interior point methods.
Mathematics Subject Classification: 90C52, 90C25.

1 Introducción

En este trabajo consideramos el siguiente Problema de Programación Cuadrática Convexa (QCP):

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}x^tQx + c^tx \to \min & \\ \text{sujeto a:} & Ax = b \\ & x \geq 0 \\ & c, x \in R^n, Q \in M(n,n), A \in M(m,n), b \in \mathbb{R}^n \\ & \text{rank}A = m, Q^t = Q, Q \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

Este es uno de los modelos más utilizados para describir problemas relacionados con la ingeniería, el control, las finanzas, la optimización robusta y la optimización combinatoria. Referencias a algunas de estas aplicaciones aparecen en [5] y [3].

Aunque se trata de un problema no lineal, el hecho de que tanto las restricciones como las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker se describen mediante sistemas lineales, permite elaborar métodos de solución más simples que los generales de la Programación No-Lineal. De hecho, en el caso en que Q sea definida positiva, estos problemas no son más difíciles de resolver que los de Programación Lineal.

En 1959 apareció el primer algoritmo Simplex Cuadrático formulado por P. Wolfe, que fue el más ventajoso en esa época, pero que resultaba realmente engorroso por el incremento del número de variables que producía y por la necesidad de aplicar un procedimiento de Fase I para determinar una solución inicial factible.

En la actualidad para resolver el problema (1) se utilizan métodos basados en la condición necesaria de primer orden que parten de un estimado inicial de la solución [13] y que requieren la resolución del sistema de Karush-Kuhn-Tucker:

$$\begin{bmatrix} -p \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q & A^T \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -p \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

El paso de mayor complejidad computacional de este algoritmo es la solución del sistema (2). Si la matriz A es de rango completo y Q es definida positiva, es decir $Z^*QZ > 0$, donde las columnas de Z constituyen una base del subespacio nulo de A, existen métodos para resolverlo que son eficientes para problemas pequeños o de mediana escala. Usualmente esto se hace factorizando directamente la matriz del sistema utilizando métodos de factorización de matrices indefinidas como el de Bunch-Parlett, invirtiendo la matriz Q y luego factorizando $A_k^TQ^{-1}A_k$, o utilizando el método del subespacio nulo que requiere el cálculo de Z y la factorización de la matriz Z^*QZ [13]. Si Z^*QZ no es definida positiva, el problema de determinar cuando un punto factible es minimizador global es un problema NP-hard [9]

Aunque el algoritmo anterior ha sido descrito a partir de un punto inicial factible, el mismo permite comenzar con un estimado inicial de la solución del problema, que no sea necesariamente factible [13].

La importancia de buscar métodos cada vez más eficientes para resolver los QCP se ha incrementado en las últimas décadas debido a que uno de las técnicas más usadas para resolver problemas generales de programación no lineal es la Programación Cuadrática Secuencial, que requiere resolver en cada iteración un problema cuadrático. Un gran número de paquetes computacionales como el NPSOL, NOPQL, OPSYC, OPTIMA, MATLAB y SQP están basados en este enfoque. En su forma más pura este algoritmo reemplaza la función objetivo en el punto actual, por su aproximación cuadrática dada por:

$$q\left(x_k\right) = \nabla f\left(x_k\right)^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla_{xx}^2 L\left(x_k, \lambda_k\right) d,$$

y reemplaza las restricciones por su aproximación lineal. Por tanto para determinar el paso desde el punto actual debe resolverse el siguiente problema cuadŕatico:

$$\begin{array}{ll} & \min q\left(x_k\right) \\ s.a & c_i\left(x_k\right) + \nabla c_i\left(x_k\right)^T d = 0, i \in W_k \end{array}$$

Existen diferentes variantes de este algoritmo, por ejemplo, se sustituye la matriz Hessiana del Lagrangiano por una aproximación BFGS de éste, se utiliza búsqueda lineal para mejorar la convergencia o se utiliza el Lagrangiano aumentado con una función de mérito o una función de penalidad para resolver el compromiso entre el decrecimiento de la función objetivo y la verificación de las restricciones.

Debido al fabuloso desarrollo alcanzado por la Programación Lineal (LP) a partir de la aplicación de algoritmos basados en los Métodos del Punto Interior (IPM), que han permitido resolver problemas con millones de variables y millones de restricciones en pocos minutos [15] se comienzan a aplicar estas técnicas a los QP convexos. Efectivamente, si escribimos las condiciones de KKT al problema (1), incluyendo las restricciones de igualdad obtenemos que el minimizador debe satisfacer el sistema:

$$\begin{gathered} Qx + c - A^T\lambda - s = 0 \\ Ax - b = 0 \\ s_i x_i = 0, i = 1, \ldots, n \\ s.x \geq 0 \end{gathered}$$

muy parecido al que se obtiene en la LP, por tanto podemos aplicar las técnicas de los IPM y desarrollar algoritmos similares por ejemplo al Predictor-Corrector de Mehrotra. La única diferencia es que en este caso los incrementos de las variables primales y duales no son independientes, ya que están relacionados por la primera ecuación. En este caso, al igual que en los algoritmos que usan el conjunto activo, puede apreciarse que pueden surgir dificultades computacionales si la matriz Q no es definida positiva. La implementación es muy eficiente para los problemas estrictamente convexos y aunque las iteraciones son más costosas que en los Métodos del Conjunto Activo, se logra la convergencia con un número menor de iteraciones.

El desarrollo de la teoría de los IPM ha dominado el campo de la Optimización en los últimos 15 años y debido fundamentalmente a la influencia de los trabajos de Nesterov y Nemirovski [8] ha dado lugar al surgimiento de la Programación Cónica (CP) y en particular de la Programación Cónica de Segundo Orden (QCQP), donde se trata el problema de la minimización de una función lineal sobre la intersección de una variedad lineal afín, con el producto cartesiano de conos de segundo orden. Estos problemas se caracterizan por ser muy tratables computacionalmente ya que en [8] se prueba que los algoritmos de IPM para estos problemas alcanzan una complejidad de $\sqrt{r}$ donde r es el número de conos de segundo orden que aparecen en el problema y Nemirovski y Scheinberg [10] prueban que el Método Primal Dual de Punto interior de la Programación Lineal puede ser aplicado palabra por palabra a los $QCQPs$; el desarrollo de estos algoritmos comienza con los trabajos de Nesterov y Todd [11] y [12].

Un problema QCQP se describe de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ll} \min c^* x & \\ s.a. & Ax = b \\ & x \in K \end{array} \tag{3}$$

donde K es el producto de conos convexos K_i cerrados de segundo orden, $K_i = \left\{ \left(x_i^0, \hat{x}_i \right) \mid \|\hat{x}_i\| \leq x_i^0, x_i^0 \geq 0, \hat{x}_i \in R^{n_i} \right\}, i = 1, \ldots, N$. En particular el octante no negativo puede ser considerado como un producto de conos de segundo orden unidimensionales [14].

En los trabajos de Alizadeh y Goldfarb [2] demuestran que los QCP pueden ser expresados como QCQP, de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ll} \min u_0 & \\ s.a & Q^{1/2}x - \hat{u} = \frac{1}{2} Q^{-1/2} c \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, (u_0, \hat{u}) \in K \\ & K = \left\{ (u_0, \hat{u}) \mid u_0 \geq 0, \|\hat{u}\| \leq u_0 \right\}. \end{array} \tag{4}$$

La obtención de esta transformación desde el punto de vista práctico implica el cálculo de la matriz $Q^{1/2} = \lambda^{1/2} T^T$, donde $\lambda^{1/2} = diag\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}\right)$ y T es una matriz ortogonal cuyas columnas son los vectores propios de la matriz Q; lo que a su vez requiere el cálculo de los valores propios, cálculo de vectores propios y ortonormalización de éstos. También se requiere invertir la matriz $Q^{1/2}$, lo cual no es posible si la matriz Q no es definida positiva.

Dentro de este contexto el objetivo de nuestro trabajo es buscar un algoritmo eficiente para transformar el QCP a un QCQP, que sea eficiente aún cuando la matriz Q no sea definida positiva y aplicar para su solución un algoritmo Primal-Dual de Punto Interior.

2 Factorización de Cholesky de matrices semidefinidas positivas

El algoritmo que proponemos está basado en la aplicación de la teoría de las matrices semidefinidas, por lo que para facilitar la exposición aclareremos algunas notaciones que serán utilizadas.

Notación 1: *Menores de orden p de la matriz Q*

$$Q\left(\begin{array}{c} i_1,\ldots,i_p \\ k_1,\ldots,k_p \end{array}\right), \quad \begin{array}{c} 1\le i_1<i_2<\ldots<i_p\le n \\ 1\le j_1<j_2<\ldots<j_p\le n. \end{array}, p\le n.$$

donde los índices i representan las filas y los índices j las columnas, cuya intersección determina el menor.

Notación 2: *Menores principales de orden p de la matriz Q.*

$$Q\left(\begin{array}{c} i_1,\ldots,i_p \\ i_1,\ldots,i_p \end{array}\right), \quad 1\le i_1<i_2<\ldots<i_p\le n,\ p\le n.$$

Notación 3: *Menores principales diagonales de orden p de la matriz Q.*

$$Q\left(\begin{array}{c} 1,\ldots,p \\ 1,\ldots,p \end{array}\right),\ p\le n.$$

Un argumento importante que será utilizado en nuestro trabajo es la caracterización de las matrices semidefinidas positivas, expresadas en el teorema siguiente [6].

Teorema 1 *Una condición necesaria y suficiente para que la matriz Q sea semidefinida positiva es que todos sus menores principales sean no negativos, es decir:*

$$Q\left(\begin{array}{c} i_1,\ldots,i_p \\ i_1,\ldots,i_p \end{array}\right)\ge 0, \quad 1\le i_1<i_2<\ldots<i_p\le n,\ p=1,\ldots,n. \tag{5}$$

Nuestro primer paso será llevar la forma cuadrática contenida en la función objetivo a su forma canónica sin utilizar las matrices que aparecen en (4). En su lugar utilizaremos la factorizacíon de Cholesky de la matriz Q.

Para las matrices definidas positivas se usa el método de factorización de Cholesky, que descompone la matriz Q en el producto siguiente:

$$Q = LL^*,$$

donde L es una matriz triangular inferior. El algoritmo para calcular los elementos de L no requiere pivotación, requiere solamente $\frac{n^3}{3}$ operaciones y en su forma recursiva, para matrices Q definidas positivas [16], utiliza las fórmulas siguientes:

$$\begin{aligned} Q &= \begin{bmatrix} q_{11} & Q_{21}^* \\ Q_{21} & Q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & L_{21}^* \\ 0 & L_{22}^* \end{bmatrix} \\ Q &= \begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}L_{21}^* \\ l_{11}L_{21} & L_{21}L_{21}^* + L_{22}L_{22}^*. \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para determinar la primera columna de L se usan las igualdades:

$$l_{11} = \sqrt{q_{11}}, \quad l_{11}L_{21} = Q_{21}. \tag{6}$$

De las fórmulas anteriores es fácil ver que $L_{22}L_{22}^*$, que es también definida positiva [16], es la factorización de la matriz ya conocida $Q_{22} - L_{21}L_{21}^*$. Por tanto, usando fórmulas similares a la anteriores se halla la primera columna de L_{22} y consecuentemente la segunda columna de L. Repitiendo recursivamente el proceso, al cabo de n iteraciones se obtiene la matriz L buscada.

Es evidente que si tratamos de aplicar el algoritmo anterior a una matriz que sea semi definida positiva pero no definida positiva, falla en algún paso en el que $\hat{l}_{11} = 0$ por lo que es necesario hacer algunas modificaciones a éste.

Se han propuesto algunos algoritmos que primeramente determinan el rango de la matriz y seleccionan una submatriz DP a la cual se le aplica el algoritmo anterior, pero estos cálculos son considerados inestables [7]. Se proponen también algoritmos basados en el conocimiento de la estructura del subespacio nulo de la matriz Q para una computación muy precisa de la factorización de Cholesky, muy eficientes para el caso en que tanto la matriz Q, como la base del subespacio nulo conocida, sean suficientemente poco densas [4]. En nuestro trabajo proponemos un algoritmo que no requiere ninguna información previa sobre la matriz semidefinida positiva, para lograrlo demostraremos la siguiente propiedad.

Proposición 1 *Si Q es una matriz semidefinida positiva y $q_{ii} = 0$ entonces $q_{ij} = 0$, $j = 1, \ldots, n$.*

Demostración: Sea $q_{ii} = 0$, para todo $j = 1, \ldots, n$ se tiene que los menores de segundo orden que se obtienen de la intersección de las filas i y j con las columnas i y j son iguales a: $q_{ii}q_{jj} - q_{ij}^2 = -q_{ij}^2$, y aplicando (5) se obtiene la igualdad a 0 de todos los elementos de la fila y la columna j-ésimas. ■

Con este resultado podemos analizar las igualdades (6) del algoritmo recursivo de Cholesky y obtener que si $q_{11} = 0$ entonces $l_{11} = 0$ pero como también la columna $Q_{21} = Q_{12} = 0$, la segunda igualdad se cumple para cualquier valor de L_{21}, por lo que la descomposición no es única. Para nuestro algoritmo tomamos la que simplifica más los cálculos, esto es $L_{21} = 0$, lo que implica que $L_{22}L_{22}^* = Q_{22}$. Esto significa que en nuestro algoritmo modificado no se incrementan los cálculos, por el contrario pueden disminuir cuando disminuye el rango Q y el número de operaciones en el peorde los casos sigue siendo $\frac{n^3}{3}$.

Por ejemplo apliquemos la modificación propuesta a la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \text{ con valores propios : } \sqrt{2} + 2, 2 - \sqrt{2}, 0.$$

La matriz es semidefinida positiva ya que sus valores propios son no negativos, pero no es definida positiva ya que uno de sus valores propios es nulo. En el primer paso del algoritmo de Cholesky se obtiene:.

$$\begin{aligned} l_{11} &= \sqrt{1} = 1, l_{11}L_{21}^* = 1 \begin{bmatrix} l_{21} & l_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \\ L_{22}L_{22}^* &= \begin{bmatrix} l_{22}^2 & l_{22}l_{32} \\ l_{22}l_{32} & l_{32}^2 + l_{33}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \hat{Q} \end{aligned}$$

En el segundo paso debemos aplicar la modificación propuesta:

$$l_{22} = \sqrt{0} = 0, l_{22}L_{32} = 0l_{32} = 0$$

La solución es indeterminada, si hacemos $l_{32} = 0$, entonces:

$$\begin{bmatrix} l_{22} & l_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}, l_{33}^2 = \hat{q}_{33} = 2, l_{32} = \sqrt{2}$$

Por tanto la factorización obtenida será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para comprobar que la descomposición no es única podemos hacer $l_{32} = 1$, entonces se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} l_{22} & l_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, l_{33}^2 = \hat{q}_{33} - l_{32}^2 = 2 - 1 = 1, l_{33} = 1$$

Por tanto la factorización obtenida será:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Para un segundo ejemplo trabajamos con la matriz factorizada en [4], utilizando la información sobre su subespacio nulo. Con la modificación propuesta al algoritmo recursivo de Cholesky, sin ninguna información adicional, obtuvimos el mismo resultado:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 9 & 9 \\ 1 & 3 & 3 & 6 & 8 \\ 1 & 9 & 6 & 14 & 16 \\ 3 & 9 & 8 & 16 & 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hacemos notar que la factorización de Cholesky de esta matriz no fue hallada con los paquetes de cálculo disponibles, por no ser definida positiva.

3 Transformación del QCP a un QCQP

Como resultado de aplicar nuestro algoritmo modificado de Cholesky a la matriz Q de rango r, se obtiene la matriz triangular inferior $L = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & \ldots. & l_n \end{bmatrix}$, donde exactamente $n - r$ vectores columnas son nulos. Si $r < n$ esta matriz es singular, por lo que construimos una nueva matriz de la forma siguiente:

Sea $I = \{i \mid l_i \neq 0\}$ y $J = \{j \mid l_j = 0\}$, entonces hacemos

$$\tilde{L} = \begin{bmatrix} \tilde{l}_1 & \tilde{l}_2 & \ldots & \tilde{l}_n \end{bmatrix}, \tilde{l}_k = \begin{cases} l_k, & k \in I \\ e_k & k \in J \end{cases}$$

donde e_k es el k-ésimo vector canónico.

Utilizamos ahora la transformación lineal $\xi = \tilde{L}^* x$, es decir $\xi_k = \tilde{l}_k^* x, k \in I$ y $\xi_k = x_k, k \in J$, con la que la forma cuadrática definida por Q se transforma en:

$$x^* Q x = x^* L L^* x = (L^* x)^* L^* x = \sum_{k \in I} \xi_k^2.$$

Usando la matriz de permutación:

$$P^* = \left[\begin{array}{cccccc} e_{i_1} & \ldots & e_{i_{rr}} & e_{j_1} & \ldots & e_{j_{n-r}} \end{array} \right]$$

donde los índices i pertenecen a I y los j a J y la transformación $z = P\xi = P\tilde{L}^* x$, logramos que las primeras r componentes de z sean iguales a las componentes de ξ cuyos índices se encuentran en I.

Denotando por $\left(P\tilde{L}^*\right)^{-1} = H$,y $G = [h_{ik}]_{i=1,\ldots r; k=1\ldots n}$ el problema (1) se puede reescribir como:

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{r} z_i^2 + c^* H z \to \min \\ s.a \quad AHz = b \\ \qquad\;\; Gz \geq 0 \\ \qquad\;\; z_j \geq 0,\ j = r+1, \ldots, n. \end{array}$$

Introduciendo variables superplus y las notaciones: $\zeta, \tilde{c} \in R^{n+r}$ el problema se transforma en:

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{r} \zeta_i^2 + \tilde{c}^* \zeta \to \min \\ s.a \quad \tilde{A}\zeta = \tilde{b} \\ \qquad\;\; \zeta_j \geq 0,\ j = r+1, n+r. \end{array} \tag{7}$$

Se introduce ahora una nueva variable unidimensional y, y se considera a ζ^1 como un vector r-dimensional que contiene las primeras r componentes de ζ, el problema anterior puede reescribirse como:

$$\begin{array}{l} y_1 - y_2 \to \min \\ s.a. \quad \tilde{A}\zeta = \tilde{b} \\ \qquad\;\; \sum_{i=1}^{r} \zeta_i^2 + \tilde{c}^* \zeta \leq y_1 - y_2 \\ \qquad\;\; \zeta_j \geq 0,\ j = r+1, n+r \\ \qquad\;\; y_i \geq 0, i = 1, 2. \end{array} \tag{8}$$

Se ha tenido en cuenta que la parte lineal de la restricción cuadrática puede ser negativa, por lo que se acota con la diferencia de dos variables no negativas.

Para transformar la restricción cuadrática de (8) en un cono de segundo orden usaremos una técnica similar a la utilizada en [3] para transformar una restricción cuadrática convexa en la intersección de dos restricciones lineales afines y un cono de segundo orden. Primeramente hacemos $y_1 - y_2 - \tilde{c}^* \zeta = \theta$ y añadimos la restricción lineal $t = 1$. Con lo que la restricción cuadrática se transforma en $\sum_{i=1}^{r} \zeta_i^2 \leq \theta t, \qquad y_1 - y_2 - \tilde{c}^* \zeta = \theta$, y $t = 1$.

Haciendo ahora $\theta = u + v$ y $t = u - v$, se obtiene finalmente el QCQP siguiente:

$$\begin{array}{ll} y_1 - y_2 \to \min & \\ s.a. & \tilde{A}\zeta = \tilde{b} \\ & u + v - y_1 + y_2 + \tilde{c}^* \zeta = 0 \\ & u - v = 1 \\ & \sum_{i=1}^{r} \zeta_i^2 + v^2 \leq u^2,\ u \geq 0 \\ & \zeta_j \geq 0,\ j = r+1, n+r,\ y_1, y_2 \geq 0. \end{array} \tag{9}$$

Es evidente que (9) es un problema de QCQP, ya que la función objetivo es lineal y las filas 2a., 3a. y 4a. contienen las restricciones lineales. La penúltima restricción representa un cono de segundo orden de dimensión $r + 2$ y la última el producto cartesiano de $n + 2$ conos de segundo orden unidimensionales.

El cálculo de mayor complejidad que debemos hacer es la inversión de la matriz $\tilde{L}^*$, que por ser triangular sólo requiere un número de operaciones que es equivalente también a $\frac{n^3}{3}$, por lo que incluyendo la factorización de Q la transformación requiere un número de operaciones que es aproximadamente $\frac{2n^3}{3}$.

4 Resultados experimentales

Los QCQP son analizados detalladamente en [1], donde se formulan condiciones de degeneración y de complementariedad estricta y además se elabora para ellos un algoritmo primal-dual de punto interior, eficiente y numéricamente estable bajo condiciones de no degeneración de los problemas primal y dual y condiciones de complementariedad estricta. En este algoritmo se implementa una generalización del método precdictor-corrector de Mehrotra, adaptado para ser aplicado a CP definidos con conos cuadráticos de segundo (QCQP) orden o conos de matrices semidefinidas positivas (SDP).

En nuestro trabajo se elabora e implementa un algoritmo para QCP con dos fases, en la primera se transforma el problema en un QCQP utilizando el método propuesto en el epígrafe anterior y en la segunda se resuelve el problema transformado usando el algoritmo propuesto en [1]. Este algoritmo comienza con un punto inicial no factible por lo que utilizamos la misma heurística propuesta en [1] para generar este punto inicial dentro del cono, pero no factible. Se usan los vectores r_p y r_d para representar las violaciones de la factibilidad en el primal y el dual respectivamente. El algoritmo termina cuando el $error = gap + \|r_p\| + \|r_d\| \leq 10^{-7}$, o cuando $\|x\|$ o $\|z\|$ exceden a un valor definido por un parámetro, en este último caso decimos que el primal o el dual no tienen solución acotada. Otras condiciones de parada están dadas por valores muy pequeños de los tamaños del paso en el primal o el dual y por un número máximo de iteraciones. Finalmente se multiplica por la matriz H el vector de las primeras n componentes de la solución del QCQP y se tiene la solución del QCP. Este código fue denominado Larx.

Para validar las dos fases de nuestro algoritmo, comparamos los resultados que se obtienen al aplicarlo a 14 QCP de diferentes dimensiones, generados aleatoriamente, con los resultados que se obtienen al resolver estos mismos problemas con las funciones de optimización del Mathematica 5.5. Los resultados aparecen en la tabla 1, donde m es el número de restricciones y n es el número de variables. Todos los problemas tienen matrices semidefinidas positivas, en la tabla DP significa que dicha matriz es además definida positiva y NDP que no lo es. Para cada uno de los códigos aparece el valor de la función objetivo obtenido y el tiempo de ejecución expresado en segundos.

Problema			Larx		Mathematica	
m	n	Tipo	Objetivo	Seg.	Objetivo	Seg.
3	7	NDP	31.394	0.2	31.394	1.375
		NDP	**36.963**	0.2	**36.953**	0.547
		NDP	31.969	0.0	31.969	1.187
8	13	NDP	56.034	0.4	56.034	4.782
		NDP	**225.680**	0.8	**230.598**	4.422
4	8	DP	**37.718**	0.4	**37.716**	1.266
		DP	51.166	0.2	51.166	1.625
12	17	DP	**538.030**	2.7	**541.314**	4.907
			537.420	1.4	**538.189**	4.953
			424.130	1.9	**424.133**	4.187
10	20	DP	**345.110**	3.2	**345.037**	13.641
		DP	**729.280**	4.0	**729.270**	18.938
15	25	NDP	**730.840**	11	**730.838**	28.703
		NDP	**927.200**	12	**927.193**	34.86
		NDP	792.880	11	792.880	23.688

Tabla 1: Resultados comparativos entre el nuevo método Larx y Mathematica 5.5 sobre 14 QCP generados aleatoriamente (DP: matriz definida positiva, NDP: matriz no definida positiva).

Como se puede apreciar en la tabla 1, los valores de las soluciones obtenidas son bastante similares, hay 5 pequeñas diferencias que favorecen al Mathematica y 4 diferencias, no todas tan pequeñas, que favorecen al Larx. Casi todas debidas a errores de aproximación al calcular el valor final de la función objetivo, pues los vectores soluciones son iguales.

Los resultados obtenidos al resolver con el Larx otros 45 QCP generados aleatoriamente se resumen en la tabla 2.

Las tres primeras columnas tienen el mismo significado que en la tabla 1 y caracterizan a los problemas cuyos resultados aparecen en cada fila. N es el número de instancias del problema.analizado en la fila. En R.E. aparecen los lugares decimales de la primera cifra no nula en el mayor y el menor error obtenido en los problemas de la fila. M.E. es el error promedio, M.I. es el número promedio de iteraciones y MT el tiempo promedio de ejecución de los problemas de la fila. Las columnas ME y MI reflejan la calidad de las soluciones y la eficiencia del Larx..

m	n	Tipo	N	**R.E.**	**M.E.**	**M.I.**	**M.T.**
3	7	NDP	3	E-6,E-9	7.5E-7	27	0.03
4	8	DP	3	E-7,E-12	2.7E-7	73.6	0.2
8	9	DP	4	E-7,E-6	1.7E-7	28.5	0.225
8	12	DP	3	E-8,E-13	3.3E-8	132.3	0.67
8	13	NDP	3	E-10,E-12	2.3E-10	142	1.43
9	13	DP	5	E-7,E-10	8.4E-8	186.6	1.08
9	14	DP	5	E-6,E-11	6,5E-7	156,6	1.14
9	14	NDP	3	E-9,E-11	2.9E-9	151,7	1.06
10	15	NDP	5	E-7,E-12	4.3E-8	318.2	9.9
10	20	DP	5	E-8,E-11	5.1E-9	246.6	5.46
12	19	NDP	5	E-7,E-12	1.2E-7	253	4.38
15	25	NDP	1	E-5,	4.9E-5	312	33

Tabla 2: Resultados obtenidos con Larx sobre 45 QCP generados aleatoriamente.

5 Conclusiones

En este trabajo se obtiene una modificación del algoritmo recursivo de Cholesky, que permite factorizar matrices semidefinidas positivas sin incrementar el costo computacional en las no definidas positivas, ya que no requiere información previa sobre el subespacio nulo de éstas. Con ayuda de esta factorización se logra transformar cualquier problema de Programación Cuadŕatica Convexa en un Problema de Programación Cónica de Segundo Orden, aún cuando la matriz de la forma cuadrática no sea definida positiva. Lo anterior permite aplicar una generalización del algoritmo predictor-corrector de Mehrotra de Punto Interior, para resolver el Problema Cuadrático Convexo. Estos resultados fueron validados por las pruebas numéricas realizadas.

Aunque los experimentos fueron realizados con problemas a pequeña escala, los resultados obtenidos nos permiten conjeturar que este procedimiento de transformación nos ofrece una alternativa para poder aplicar los eficientes Métodos de Punto Interior a la solución de Problemas Cuadráticos Convexos a gran escala, incluyendo los casos en que estos problemas no sean estrictamente convexos.

Referencias

[1] Alizadeh, F.; Schmieta, S.H. (1997) “Optimization with semidefinite, quadratic and linear constraints”, Rutcor Research Report, RRR 23–97, November.

[2] Alizadeh, F.; Goldfarb, D. (2001) “Second-Order Cone Programming, Rutcor Research Report.

[3] Andersen, E.D.; Ross, C.; Terlaky, T. (2002) “On implementing a primal-dual interior-point method for conic quadratic optimization”, Springer Verlag.

[4] Arbenz, P.; Dramac, Z. (2000) “On semipositive definite matrices whith null space known”, ETH Zürich, Computer Science Departament, Technical Report Research #352, November.

[5] Ben-Tal, A.; Nemirovski, A. (2001) *Lectures on Modern Convex Optimization: Analysis, Algorithms and Engineering Applications*. MPS/Siam, Series on Optimization, SIAM.

[6] Gantmacher, F.R. (1959) *The Theory of Matrices*. Chelsea, New York.

[7] Higham, N. (1996) “The symmetric indefinite pactorization: stability an applications in optimization”.

[8] Lustig, J.; Marsten, R.E,; Shanno, D.F.(1994) “Interior point methods for linear programming: computational state of the art”, *ORSA J. on Comptutation*.

[9] Murty, Kabadi (1987) “Some NP-complete problems in quadratic and nonlinear programming”, *Mathematical Programming* **39**.

[10] Neemirovski, A.; Cherinberg, K. (1996) “Extension of Karmarkar algoritm onto convex quadratically constrained quadratic programming”, *Mathematical Programming* **72**.

[11] Nesterov, Y.E.; Todd, M.J. (1997) “Self-scaled barriers and interior-point methods for convex programming”, *Math. of Oper. Res.* **22**(1): 1–42.

[12] Nesterov, Y.E.; Todd, M.J. (1998) “Primal-dual interior-point methods for self-scaled cones”, *SIAM J. Optim.* **8**: 324–364.

[13] Nocedal, J.; Wright, S.J. (1999) *Numerical Optimization*. Springer Series in Operations Research, Springer Verlag, New York.

[14] Renegar, J. (2001) *A Mathematical View of Interior-Point*. Methods in Convex Optimization, MPS-SIAM Series en Optimization.

[15] Ross, C.; Terlaky, T.; Vial, J. (1997) *Theory and Algoritms for Linear Optimization an Interior Point Approach*. John Wiley and Sons, New York.

[16] Vandenberghe, L. (2002) “The Cholesky factorization”, EE103 Winter, Germany.