

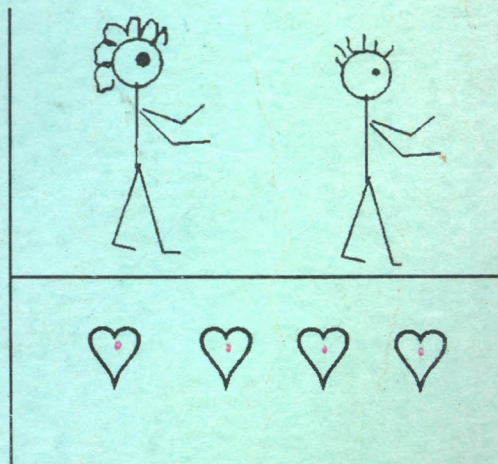
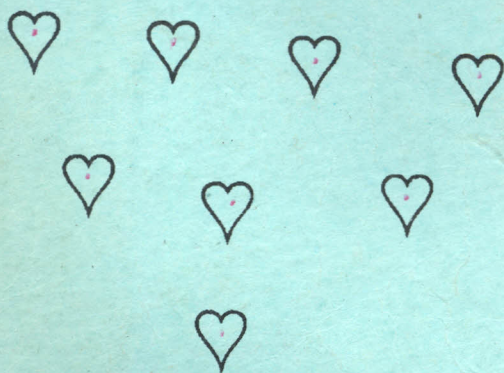
372.7
V-779a

Universidad de Costa Rica
Sede de Occidente
Ciudad Universitaria Carlos Monge Alfaro
Coordinación de Investigación

ARITMETICA PARA MAESTROS

El número, su operatoria y su enseñanza

Lic. Jorge Vindas Parajeles



1996

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
SEDE DE OCCIDENTE
CIUDAD UNIVERSITARIA CARLOS MONGE ALFARO
COORDINACION DE INVESTIGACION

ARITMETICA PARA MAESTROS

El número, su operatoria y su enseñanza

Lic. Jorge Vindas Parajoles

1996

ESTIMADO LECTOR:
PROTEJA NUESTROS LIBROS,
SON PARA LISTED Y LAS
FUTURAS GENERACIONES.

CATEDRA UNIVERSITARIA

Serie de Publicaciones de la Sede de Occidente
San Ramón, Alajuela, Costa Rica

3727

V779a

COMISION EDITORIAL

Lic. Francisco Guido Cruz
M.L. Oscar Montanaro Meza
M.Sc. Rodolfo Ortiz Vargas
Lic. Cecilia Aguilar Lara
M.Sc. María Cecilia Vega Guzmán



Prohibida la reproducción total o parcial

372.7
V779a

Vindas Parajeles, Jorge.

Aritmética para maestros : el número, su operatoria y su enseñanza / Jorge Vindas Parajeles. -- [San José, C.R.] : Oficina de Publicaciones de la Universidad de Costa Rica, 1996.

72 p. : il. ; 28 cm.

ISBN 9977-15-054-0

A la cabeza de la portada: Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente, Departamento de Ciencias Naturales, Sección de Matemáticas.

1. Matemáticas - Estudio y enseñanza. I Título.

30 MAR 1998

0117864
Digitalizado
Subido a Herwa 28-05-2015

Universidad de Costa Rica
Sede de Occidente
Biblioteca, San Ramón

INDICE

Introducción	1
Las cuatro operaciones fundamentales	1
Medir y contar	1
El número en el niño escolar: su enseñanza	2
Actividades de aprendizaje	2
Número concreto	15
Número abstracto	16
Mayor que, menor que, igual que	17
Suma y resta	19
División cociente, multiplicación o producto	28
Algunas propiedades fundamentales del número	35
Múltiplos y submúltiplos	35
Mínimo común múltiplo	36
Divisibilidad	37
Máximo común divisor	38
Números primos y compuestos	39
Números pares e impares	40
Algunas propiedades del sistema de numeración decimal aplicadas a operaciones aritméticas	41
Una explicación sencilla de la “suma llevando”	42
Una explicación sencilla de la resta “pidiendo prestado”	44

Números expresados en notación fraccionaria	49
Fracciones propias	50
Fracciones impropias	50
Fracciones unitarias	50
Fracción canónica	52
Fracciones equivalentes	52
Fracciones iguales	52
Fracciones homogéneas	53
Fracciones heterogéneas	53
Operaciones con fracciones	53
Representación gráfica de una fracción	53
Suma y resta de fracciones representadas mediante círculos	54
Suma y resta de fracciones	58
Producto y cociente de fracciones	59
Razones, proporciones y porcentajes	61
Proporciones	62
Porcentajes	62
Números expresados en notación potencial y algunas propiedades	63
Potencias	64
Algunas propiedades de las potencias	64
Bibliografía	67

INTRODUCCIÓN:

La enseñanza de la matemática en nuestro país carece de un contenido real y concreto; la abstracción y el mal entendido formalismo de sus conceptos básicos, sobre todo en los primeros niveles de su enseñanza, dan al traste, en la mayoría de los casos, con el entusiasmo e interés por su estudio.

Es común presentar como antagónicas dos concepciones, acerca de la enseñanza de la matemática, que no tienen por qué ser enfocadas de esta manera. Hay quienes argumentan que la enseñanza de la matemática debe plantearse a cualquier nivel con gran rigurosidad formal y un alto grado de abstracción; otros, por el contrario, argumentan que la mejor forma de enseñar matemáticas es acudir a lo concreto, a lo informal, a la naturaleza misma, a la aplicación práctica, y de aquí precisar sin gran rigor formal los conceptos fundamentales.

Ligar lo concreto e informal con lo formal y abstracto en el proceso de enseñanza aprendizaje es, a nuestro juicio, una estrategia metodológica adecuada. De lo concreto a lo formal, de la aplicación práctica a lo abstracto y viceversa, es a nuestro entender una combinación que brinda buenos resultados. La naturaleza misma es nuestro mejor laboratorio. Los materiales comunes y corrientes que pueden ser encontrados en cualquier centro educativo del país serán parte importante de nuestros recursos didácticos. El parque, la plaza de balompié, el estanque, el patio de la escuela, los árboles, las piedras, las hojas, la luna, las estrellas, las páginas de un periódico, la bola de volibol, etc. son elementos útiles para la enseñanza de la matemática. En otros términos depender menos del pizarrón y utilizar más el ambiente extra-aula los laboratorios matemáticos y menos la clase magistral, involucrar al estudiante como sujeto de su formación y no como simple espectador del proceso. Introduciremos los conceptos fundamentales de la matemática con una metodología de aprender haciendo, de aplicación práctica y elevándonos a los mayores grados de formalización posible.

LAS CUATRO OPERACIONES FUNDAMENTALES

MEDIR Y CONTAR:

La medición y el conteo representan, desde estadios muy primitivos, procesos fundamentales para el desarrollo del hombre; se cuenta lo discreto, lo separado, se mide lo continuo. En síntesis, dos procesos de una misma esencia. Históricamente se asocia el contar con la aritmética y el medir con la geometría. Es apasionante descubrir cómo el hombre se las ha ingeniado; a través del tiempo, para ir perfeccionando los sistemas e instrumentos de medición y conteo. Los modelos inspirados en el cuerpo mismo como la pulgada, el pie, la cuarta, el codo, los dedos, junto con piedrecillas y palos, son los primeros instrumentos a los que acude el hombre para medir y contar. Hoy disponemos de sistemas tan modernos y de un grado de precisión asombrosa que nos permiten contar desde el número de estrellas de nuestra galaxia hasta medir el diámetro de Plutón. Contamos con un sistema de numeración de una utilidad increíble y a la vez de una

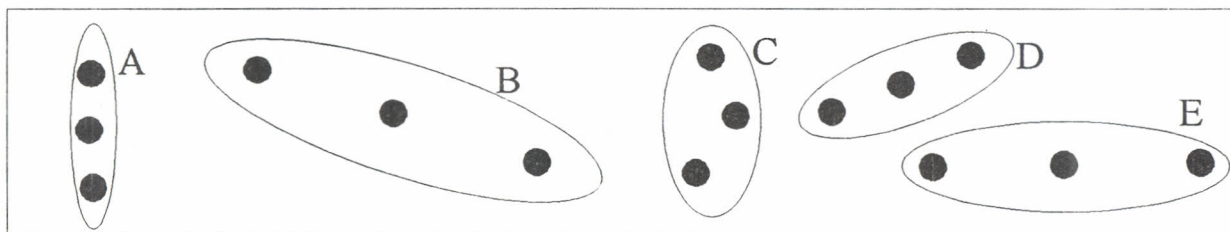
simpleza asombrosa. El concepto de números ocupa, en este sistema, una posición fundamental. Su desarrollo ha venido de la mano del desarrollo de la humanidad ;desde los dedos y las piedrecillas hasta los números reales y complejos con todas sus propiedades.

EL NUMERO EN EL NIÑO ESCOLAR: SU ENSEÑANZA:

El concepto de número presenta ,por su nivel de abstracción, algunas dificultades para su enseñanza. El niño adquiere desde muy temprana edad, debido al contacto con el medio y la naturaleza, los rudimentos del proceso de contar. Empieza a contar sus deditos y objetos muy variados en forma desordenada y sin tener todavía la claridad sobre el concepto de número y el de unidad. Asocia a objetos al nombre de algunos números desordenadamente y sin percatarse del proceso ordenado que representa el contar.

Un primer elemento que debe tomarse en cuenta a la hora de empezar el proceso de formalización (en cierta medida del cálculo) en el niño es el hecho de que, para el niño preescolar la cantidad, el número cambia de acuerdo con la disposición de los objetos en el espacio donde están dispuestos. Piaget tiene un sinnúmero de actividades donde se verifica este hecho. Citaremos como ejemplo solamente el siguiente:

Dadas las series de distintas disposiciones u ordenamientos de tres unidades , el niño preescolar presentará dificultades en reconocer la misma cantidad de objetos, en cada uno de los distintos ordenamientos.



Niños preescolares sometidos al ejercicio de responder en cuál ordenamiento hay más cantidad de objetos, tienden a responder que es en B .

Para el niño preescolar la cantidad varía con la disposición de los objetos en el espacio. Lo mismo sucede para cantidades continuas (líquidos) al ser trasladadas de un envase pequeño a otro más grande.

A la par del problema de la variabilidad de la cantidad, el niño preescolar no ha adquirido el concepto de unidad. Para iniciar al niño en el cálculo es necesario subsanar los dos problemas planteados, es decir, lograr que adquiera el principio de la invariabilidad de las cantidades a pesar de su distinta disposición en el espacio, tanto cantidades discretas como continuas, y, además, el concepto de “uno”, de “único”, de “unidad”.

ACTIVIDADES.

Lo más frecuente en el proceso de enseñanza-aprendizaje ha sido presentar al educando

las diferentes actividades elaboradas, creadas por el educador. En muchos casos las actividades están alejadas de la realidad del niño, de sus intereses, de su propio desarrollo. "Este niño no aprende a dividir", "A este niño le cuestan las tablas de multiplicar" Son entre otras, expresiones comunes dentro de los educadores. ¿Qué proponemos? Que el niño cree sus propias actividades, que sea su gestor, que le dé forma, que con la guía del maestro trabaje, se ejercite, toque, ponga, quite, transforme, cambie, construya, participe activamente. Que en este proceso de aprendizaje participe íntegramente con todos sus sentidos; que el tacto, el olfato, la vista, el oído, el gusto junto con su inteligencia se estimulen a la vez y contribuyan todos al proceso de aprender. Las actividades que se desarrollarán a continuación, con la participación de los niños, pretenden todas contribuir a que el niño logre fijar el concepto de cantidad que logre, con su propia participación, incorporar a su desarrollo mental la propiedad de invariancia de la cantidad a pesar de sus distintas disposiciones u ordenamientos en el espacio.

ACTIVIDAD N°1 :

Nombre de la actividad: "Pesadas las piedrecitas"

Lugar de la actividad: Patio de la escuela, plaza.

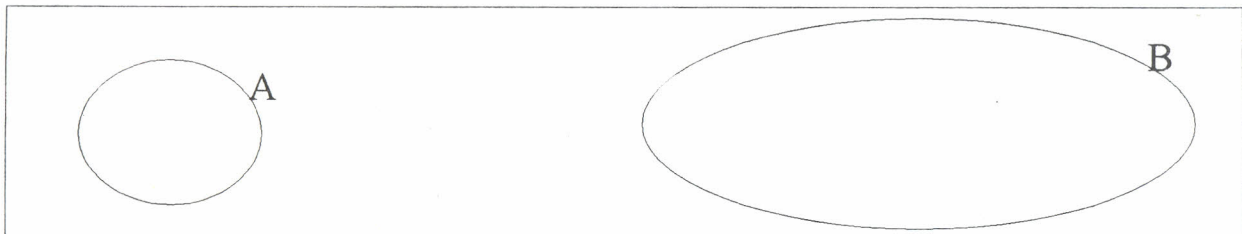
Recursos: Cordón o mecate de distintos tamaños, piedras de un tamaño adecuado.

Desarrollo de la actividad:

Se dispondrá el grupo en dos bandos, más o menos iguales. Llamaremos "A y B" cada una de las partes.

Al bando "A" le daremos un mecate corto y al "B" un mecate considerablemente más largo (3 veces más largo).

Se le pedirá al grupo "A" y al grupo "B" que se coloquen a una distancia de unos 25-30 metros uno del otro.



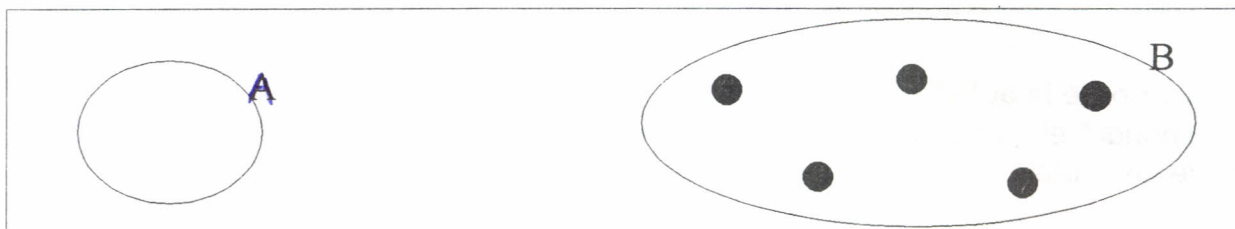
El maestro ayudará a colocar los grupos) se les solicitará a ambos grupos que con el mecate o cordón que se les dio formen un encierro como en el dibujo:



Se pedirá a cinco niños del grupo "A" que, de los alrededores de la plaza, traigan cada uno una piedrecilla (no muy grande, no muy pequeña, que puedan sentir su peso) y la coloquen dentro del encierro de su grupo. Tendríamos la siguiente situación.

Se solicitará a continuación, a niños del grupo "B" que trasladen las piedrecillas del encierro del grupo "A" al encierro de su grupo.

Se tendría la siguiente situación :



Se preguntará a todo el grupo: ¿ Hay tantas piedras en el encierro "B" como las había en el encierro "A" ?

Si la respuesta es negativa por parte de cierto número de niños, se enviará a algunos de estos a colocar de nuevo las piedras del encierro "B" al encierro "A" Preguntar nuevamente; si otra vez se fracasa, dejar el ejercicio para otro día.

ACTIVIDAD N° 2:**Nombre de la actividad:** "Aumentando el marcador"**Lugar de la actividad:** Plaza o patio de la escuela.**Recursos:** 4 bolas de balompié , 4 marcos pequeños.**Desarrollo de la actividad:**

Se dispondrán encierros de mecatres de diferentes tamaños; las bolas y los marcos a una distancia de unos 10 metros uno del otro, como se indica a continuación.



Se preguntará al grupo: ¿ Hay tantas bolas en el encierro "A" como marcos en el encierro "B"?

Si la respuesta es negativa, se enviará a 4 niños a que trasladen las bolas con sus pies hasta depositar cada una en cada uno de los marcos como se presenta a continuación:



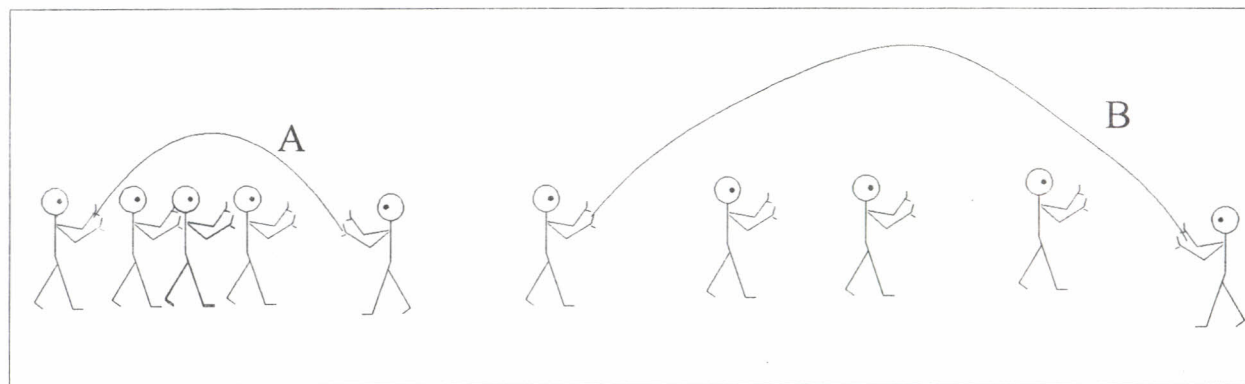
Se pregunta de nuevo al grupo: ¿Hay tantas bolas como marcos?. Si la respuesta sigue siendo negativa, se deja el ejercicio para otra oportunidad.

ACTIVIDAD N° 3:**Nombre de la actividad:** "Saltando suiza"**Lugar de la actividad:** Patio de la Escuela, plaza

Recursos: Mecate para saltar suiza, uno corto, otro considerablemente mas largo, niños.

Desarrollo de la Actividad:

Se divide el grupo en dos subgrupos de igual cantidad de alumnos. Llamaremos grupo "A" y "B" a dichos subgrupos. Se colocarán los dos subgrupos a unos 10 a 15 metros de distancia uno del otro. Se entregará al grupo "A" una cuerda corta y al grupo "B" una cuerda larga. Se les pedirá que procedan a saltar la cuerda (brincar suiza) cuatro o tres estudiantes a la vez en cada subgrupo, como se ilustra a continuación:



Se realiza la siguiente pregunta: ¿Hay la misma cantidad de niños saltando en el grupo "A" que en el grupo "B"? Si la respuesta es correcta avanzamos en la consolidación de la invariabilidad del número o cantidad. Si la respuesta es negativa se recomienda intentar la siguiente variante: Pedirles a los niños que saltan suiza en el grupo "B" que se unan al subgrupo y envíen a los niños que saltan en el grupo "A" a saltar en el grupo "B", en la cuerda larga. Se repetirá la pregunta: ¿Hay tantos niños saltando suiza en el cordón largo como los había en el cordón corto? Si la respuesta es negativa se intentará otro día.

ACTIVIDAD N° 4:

Nombre de la actividad: "Tirando la bolita".

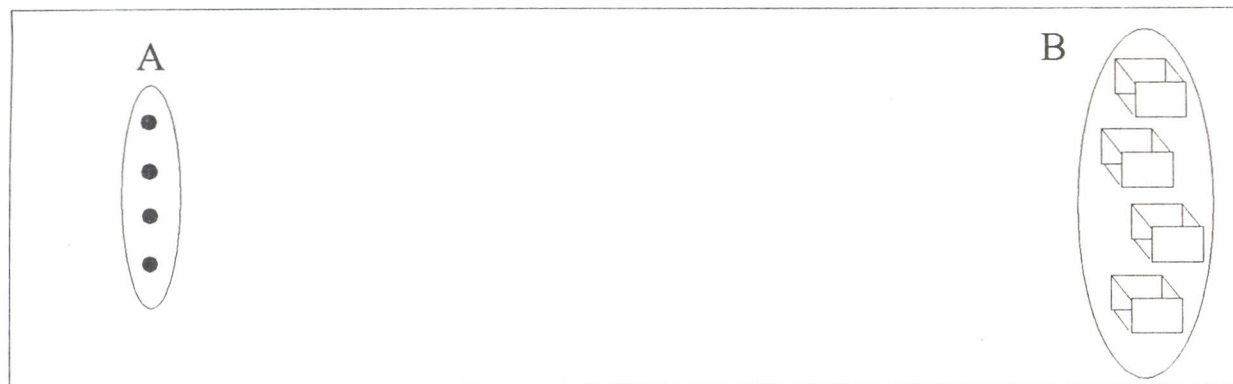
Lugar de la actividad: Patio de la escuela, plaza

Recursos: 4 cajas medianas de cartón (de igual tamaño), 4 bolas de hule, los niños, cordón.

Desarrollo de la actividad:

Se dividirá al grupo en dos subgrupos "A" y "B". Se colocarán a unos 5 metros de distancia un grupo del otro. Al grupo "A" se le dará cuatro bolas de hule medianas y un mecate

grande. Al grupo "B" se le dará cuatro cajas medianas y un mecate pequeño. Se les pedirá a los niños que dispongan los objetos como se aprecian en el dibujo siguiente:



Se hará la siguiente pregunta al grupo en general: ¿ Hay tantas bolas en el encierro "A" como cajas en el encierro "B"?. Si la respuesta es positiva, perfecto. Se verificará solicitándoles a cuatro niños que lancen las bolas desde la posición "A" hasta introducir una en cada caja. Si la respuesta es negativa, se realizará la misma acción y se repetirá la pregunta.

ACTIVIDAD N° 5:

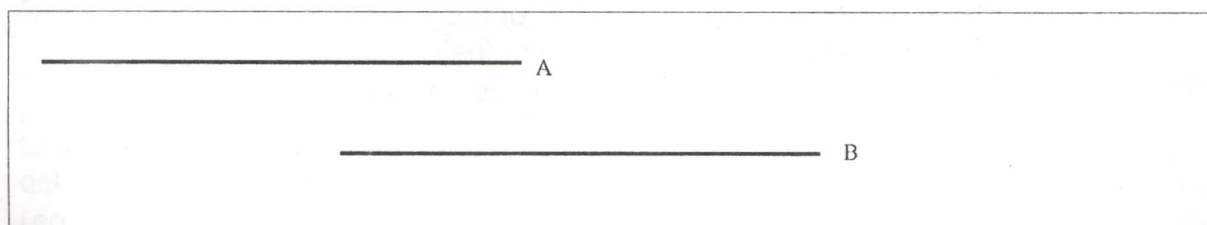
Nombre de la actividad: "Con mis manitas"

Lugar de la actividad: Patio de la escuela o plaza

Recursos: Dos trozos de mecate , de igual tamaño, niños.

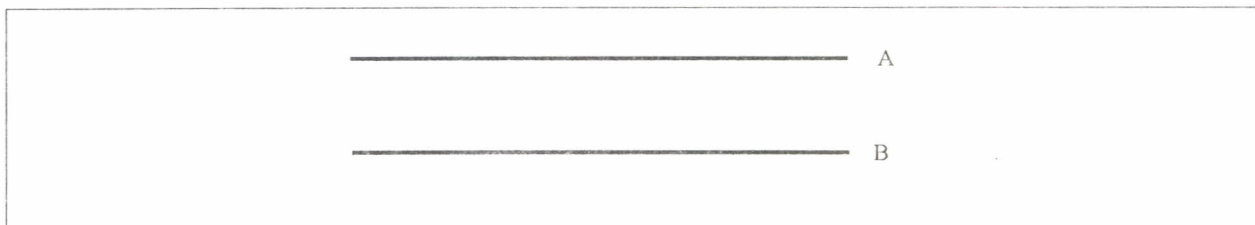
Desarrollo de la actividad:

Se disponen los dos cordones en el suelo de la manera que se ilustra en la figura.



Se preguntará al grupo: ¿Son los cordones del mismo tamaño?, ¿tienen igual medida?

Si la respuesta es negativa se les pide que las midan con su manitas (cuartas). Se realizará de nuevo la pregunta. Si la respuesta sigue siendo negativa se solicitará que coloquen el cordón "B" debajo del cordón "A" como se ilustra en la figura.



Se preguntará nuevamente; si la respuesta sigue siendo negativa, se intentará otro día.

ACTIVIDAD N°6

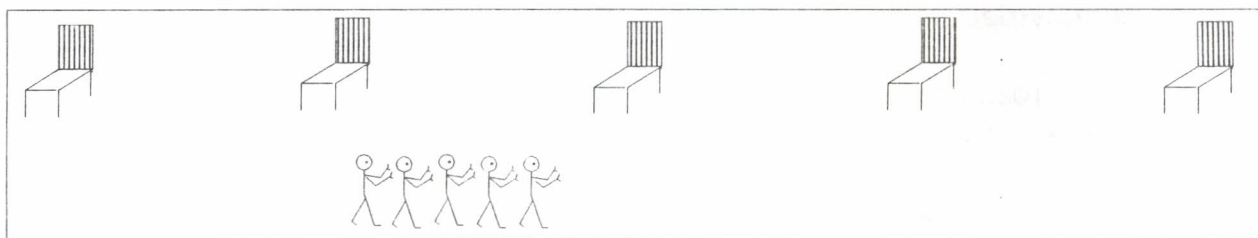
Nombre de la actividad: "Mis sillitas"

Lugar de la actividad: En el aula

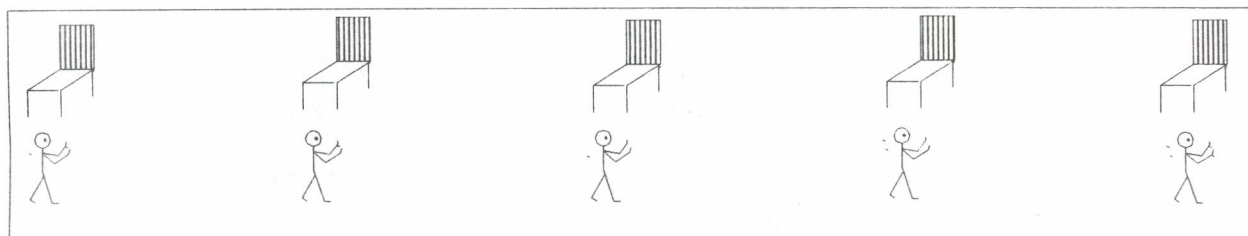
Recursos: Sillas y niños

Desarrollo de la actividad:

Se colocan al frente del grupo, cinco sillas y cinco compañeritos como se ilustra en el dibujo.



Las sillas bien separadas y el grupito de niños lo más juntos posible. Se pregunta al resto de grupo: ¿Hay tantas sillas como niños al frente de ustedes? Si la respuesta es negativa se plantea la siguiente variación, se separará a los niños de tal forma que quede uno al frente de cada silla como se ilustra a continuación.



Se repetirá al grupo la pregunta: ¿Hay tantas sillas como alumnos al frente? Si la respuesta es negativa (por algunos niños) se intenta la siguiente variante. Se solicitará a los niños que están frente a las sillas que se sienten en ellas.



Se hará de nuevo la pregunta: ¿ Hay tantos niños como sillas? Si la respuesta es positiva planteamos de nuevo la situación original (sillas separadas, niños bien juntos) Si la respuesta a esta situación es positiva, avanzamos hasta la invariabilidad de la cantidad en el niño. Si la respuesta es negativa de nuevo se deja el ejercicio para otra ocasión.

ACTIVIDAD N° 7:

Nombre de la actividad: "Muy rico el refresco"

Lugar de la actividad: Comedor de la Escuela o aula

Recursos: Vasos de diferentes tamaños, refresco.

Desarrollo de la actividad:

En el comedor de la escuela (preferiblemente) se dispondrá el grupo en dos subgrupos. A l grupo "A" se le servirá refresco en vasos pequeños (se les llena el vaso). Se les pedirá que viertan el refresco en los vasos del grupo "B" (vasos mucho más grandes) se preguntará: ¿Tienen los estudiantes del grupo "B" la misma cantidad de refresco que tenían los estudiantes del grupo "A" ? Si la respuesta es afirmativa, estamos en las puertas del concepto de invariabilidad de la cantidad. Si, por el contrario, la respuesta es negativa (en un alto porcentaje), se solicitará que los estudiantes del grupo "B" viertan, sin derramar refresco, el contenido de sus vasos grandes en los vasos del grupo "A". Se pregunta de nuevo al grupo acerca de si el contenido ha variado o no.

Todas las actividades anteriores tienen por objeto determinar el grado de madurez que presenta el niño, en cuanto a la adquisición de la propiedad de invariabilidad que tiene la cantidad. Estas actividades, así como otras que puedan prepararse, tienen también la particularidad de acercar al niño a descubrir, a fijar la invariabilidad del número o cantidad. Se recurre hasta donde sea posible a que el niño utilice todos sus sentidos, toda su vitalidad, toda su inteligencia en cada una de las actividades que se desarrollan.

Se ha dicho que la mejor forma de aprender es haciendo, ¡Pues pongamos los niños a hacer!

La etapa de determinar si el niño está en condiciones de iniciarse en el cálculo, es de fundamental importancia "El profesor Piaget ha demostrado en su génesis del número que hay, en el entendimiento humano, toda una organización mental previa al cálculo, y que si esta organización falta es en vano proseguir, pues ello será lo mismo que edificar sobre cimientos de arena" (B. Beauverd, página 1) (Antes del cálculo).

Como lo expresa Beauverd, la etapa previa al cálculo es objetiva, existe en el desarrollo del niño; debe considerarse con seriedad. Uno a nuestro juicio, de los aportes de mayor mérito del maestro Piaget es mostrarnos por medio de experiencias concretas el proceso de desarrollo mental en el niño. Este debe ser visto como un ser con todas las potencialidades, pero en desarrollo, en proceso de maduración mental y operatoria. Por tal motivo el aprestamiento es una necesidad y no debe pasarse por alto.

Las actividades que a continuación se presentan, tienen mayor sentido cuando el maestro ha detectado que el niño está en capacidad de fijar la propiedad de invariabilidad de la cantidad. Tienen por objeto ejercitar al niño en precisar el concepto de número, y pretende conducirlo al número concreto y luego al número abstracto.

ACTIVIDAD N° 8:

Nombre de la actividad: "Jugando a los conjuntos".

Lugar de la actividad: Aula o corredor de la escuela

Recursos: Objetos de los alrededores de la escuela (piedrecillas, paletas, palillos, hojas, florecillas, pabito o cáñamo).

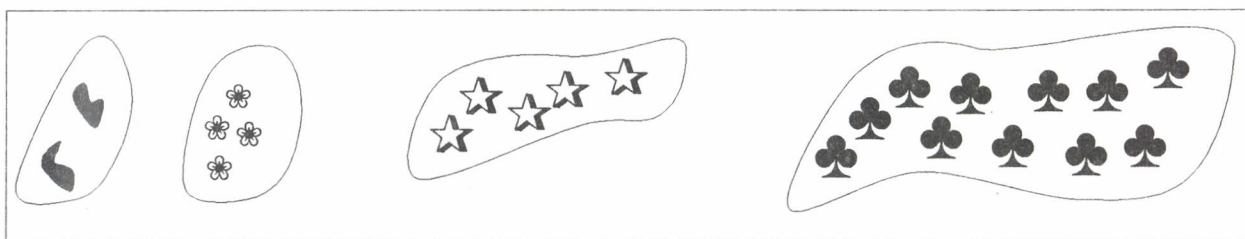
Objetivo de la actividad: Tomar diferentes conjuntos o grupos de objetos y establecer relaciones entre ellos.

Desarrollo de la actividad:

Se dispondrá el aula de tal forma que brinde el mejor espacio posible para el trabajo de los niños. Se les solicitará a los estudiantes que en forma ordenada salgan a los alrededores de la escuela y recojan piedrecillas, palillos, hojitas, chapas, etc. en cantidades suficientes para luego formar conjuntos o grupos con los objetos recogidos. El maestro acompañará al grupo y guiará la recolección de objetos. Un vez en el aula o en el lugar dispuesto para

la actividad, el maestro los orientará para que agrupen o formen conjuntos con los objetos recogidos: varios conjuntos de piedrecillas, otros de palitos, otros de hojitas etc.

Se les solicitará formar grupitos con igual cantidad de número de objetos. Cada grupito se encerrará con pabilo o cáñamo para que quede bien delimitado. Se solicitará que compare los conjuntos de acuerdo al número de elementos, y determine cuál conjunto tiene mayor o igual número de objetos. Se solicitará que los ordene de acuerdo con la cantidad de elementos. Una situación típica podría ser:



ACTIVIDAD N° 9:

Nombre de la actividad: "Dibujo conjuntos en mi cuaderno".

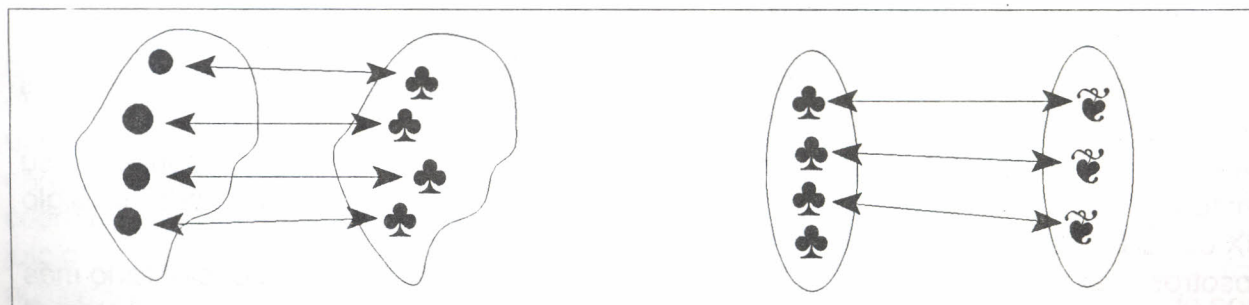
Lugar de la actividad: Aula

Objetivo de la actividad: Dibujar conjuntos y establecer relaciones con una flechas entre sus elementos (igual que, mayor que, menor que)

Desarrollo de la actividad:

Se solicitará a los estudiantes que dibujen diferentes objetos y los encierren en un círculo (se les recordará la actividad anterior, solamente que ahora deben dibujar los conjuntos en sus cuadernos).

Se solicitará que dibujen conjuntos con igual cantidad de objetos y otros con diferentes cantidades. Se solicitará que unan o relacionen con flechitas los elementos de los diferentes conjuntos una situación típica puede ser la siguiente:



Se les solicitará que expresen la característica que presentan (en cuanto a las flechas) al

relacionar los diferentes conjuntos.

Se les interrogará acerca de las siguientes situaciones: ¿Qué es posible decir con respecto a los conjuntos o grupos cuando hay tantas flechas como objetos en los dos conjuntos. ¿Qué se podría deducir cuando sobran objetos en el segundo conjunto? ¿Qué se puede decir cuando sobran objetos en el primer conjunto?

ACTIVIDAD N° 10:

Nombre de la actividad: "En busca de la misma cantidad".

Lugar de la actividad: Aula

Recursos: Cuadernos, lápiz y lápices de color.

Objetivo de la actividad: Asociar a cada conjunto con el de su misma cantidad de objetos.

Desarrollo de la actividad:

Se les solicitará a los niños que dibujen muchos conjuntos o grupitos de objetos y animales, de tal forma que haya conjuntos de diferentes cantidades de objetos, otros de igual cantidad, aunque de diferentes clases.

Se les solicitará que agrupen los conjuntos tomando en cuenta los que tienen el mismo número de objetos y relacionen sus elementos por medio de flechitas. Así con los otros conjuntos.

Coordinabilidad:

Es importante hacer notar en este momento que lo que se pretende con las anteriores actividades es utilizar el concepto de coordinabilidad de conjuntos para introducir el concepto de número cardinal.

Esta teoría fue desarrollada a mediados del siglo XIX por dos matemáticos muy destacados. G. Cantor (1845-1918), F.L. Frege (1848-1925) y perfeccionada por B. Russell a principios del siglo XX.

Hay diversas formas de introducir el concepto de número cardinal: suponiendo su existencia o mediante la introducción formal (deductiva) que se intenta a partir del siglo XIX con Dedekind y Peano.

Nosotros partiremos del enfoque de coordinabilidad de conjuntos por considerarlo más adecuado y de una gran riqueza metodológica, aparte de ser más natural, y ligada al desarrollo histórico del concepto de número.

Se llaman conjuntos coordinables aquellos que tienen el mismo número de objetos o elementos. Obsérvese que no importa cuál es el número del elementos sino el tener la

misma cantidad de objetos.

En algunas actividades anteriores se insiste en que el alumno establezca relaciones entre los objetos, con el fin de que descubra el concepto de coordinabilidad.

Se debe insistir y guiar al estudiante para que separe o agrupe los conjuntos de acuerdo con el número de objetos (sin importar cuál es el número). Esto se logra relacionando los objetos de cada conjunto con flechas en las dos direcciones (Actividad N°10). Se debe reforzar esta idea central de coordinabilidad o relación uno a uno

¿Cuál es el paso siguiente?

Se deben preparar actividades donde se establezca con claridad el hecho de que si un conjunto pertenece a una clase, por ejemplo en la actividad número 10, la estrella, el pato, las frutas, lo común es que sea posible relacionar sus elementos uno a uno, sin que sobren ni hagan falta en ninguno de los conjuntos. Lo mismo para los conjuntos de sillas, muñecos y lápices; es posible relacionar sus elementos uno a uno sin que sobren ni hagan falta en ningún caso, así para las demás clases.

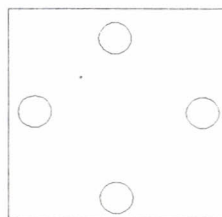
¿Qué es una clase de conjuntos? Se llama una clase de conjuntos a todos los conjuntos que son coordinables entre sí.

¿Qué sucede si establecemos relaciones por medio de flechas entre los objetos o elementos de conjuntos que pertenecen a clases diferentes? La respuesta es inmediata: hacen falta elementos en uno de los conjuntos o, lo que es lo mismo sobran en el otro conjunto.

Estamos de acuerdo, entonces, en que un conjunto de objetos que pertenece a una clase (coordinables con todos los conjuntos de esa clase) no puede pertenecer a otra clase, pues no sería coordinable con ningún otro conjunto de esa clase; por lo tanto, un conjunto no puede pertenecer a dos o más clases a la vez pero todo conjunto tiene siempre una clase a la cual pertenece.

¿A dónde queremos llegar? A que tenemos diferentes clases de conjuntos (de acuerdo a su coordinabilidad). A cada una de estas clases se llama número cardinal, es decir llamaremos número cardinal de un conjunto M a la clase de los conjuntos coordinables con M .

¿Qué significa lo anterior?. Significa que todos los conjuntos coordinables por ejemplo con el conjunto que tiene un elemento, se dice que tienen cardinalidad uno. Todos los conjuntos coordinables con un conjunto que tiene dos elementos se dice que tienen cardinalidad dos, y así sucesivamente. ¿Qué significa el número cardinal cero? El número cardinal cero es la clase de los conjuntos coordinables con el conjunto que no tiene elementos (conjunto vacío). Obsérvese que lo interesante de este enfoque es que utilizando la idea de coordinabilidad se introduce, o formaliza, el concepto de número cardinal. Simbolizaremos por $0, 1, 2, 3, 4, \dots$, a las diferentes clases de conjuntos coordinables (números cardinales). Es importante apuntar aquí un aspecto; a nuestro juicio fundamental en la elección del enfoque de coordinabilidad para introducir los números cardinales. Piaget apunta "la noción de número nace por diferencias" (citado por B. Beauverd, pág. 17). El niño, según Peaget, se crea un modelo; una figura de número, por ejemplo. Puede ser que para él el modelo de número cuatro viene dado por $O O O O$. Esta figura será su modelo de número cuatro; todo lo que pueda igualar a éste modelo será cuatro para él. Por ejemplo el siguiente conjunto:



el lo llevará a su modelo O O O O . Para llegar a esto , realizará operaciones mentales e igualará el ordenamiento propuesto a su modelo de cuatro

Nótese la similitud del enfoque de coordinabilidad de conjuntos para introducir el concepto número, y el principio expuesto por Piaget.

¿Por dónde proseguir con nuestro intento de introducir al niño en la etapa del cálculo? Parece sencillo: reforzaremos la idea de identificar conjuntos coordinables entre sí con su cardinalidad y su numeral.

ACTIVIDAD N° 11:

Nombre de la actividad: "Le pongo nombre a los conjuntos".

Lugar de la actividad: Patio de la escuela o plaza.

Recursos: Piedras, palillos, hojas, chapitas, etc.

Objetivo de la actividad: Relacionar conjuntos con el número concreto.

Desarrollo de la actividad:

De manera similar a las actividades anteriores, se solicitará a los estudiantes que recojan, de los alrededores de la escuela, objetos variados para formar conjuntos. El maestro los guiará y participará con los niños en la recolección.

Se les indicará a los estudiantes que conformen en el patio de la escuela distintos grupos de objetos (pueden separarse unos de los otros con un encierro de cáñamo). Se les interrogará acerca de qué nombre sería conveniente ponerle a cada grupito de objetos. Se insistirá en los niños para que el nombre de cada grupito o conjunto sea determinado fundamentalmente por la cantidad de objetos (cardinalidad) y por su cualidad. Es posible escuchar nombres como "cuatro piedras", "siete hojitas", "tres chapitas", "tres palitos" etc. Se insistirá en resaltar la cantidad y la cualidad como características centrales; tenemos aquí nuestro número concreto.

Actividad N° 12:

Nombre de la actividad: "Escribo el nombre de los conjuntos".

Lugar de la actividad: Aula.

Recursos: Cuaderno, lápices de color y lápiz.

Objetivo de la actividad: Construyo y dibujo modelos de números concretos.

Desarrollo de la actividad:

El maestro solicitará a los niños que dibujen diferentes objetos, repitiendo algunos de ellos. Luego se solicitará que agrupen en un encierro o rueda los objetos dibujados de la misma clase (florecitas, patitos, sillas, casitas etc.). Se les solicitará que escriban debajo de cada grupito un nombre adecuado que resalte la cantidad de objetos y su cualidad.

Actividades como las anteriores, deben desarrollarse con el cuidado de que resulten suficientemente motivadoras para los niños. No se debe abusar de ellas, se debe tener presente el hecho de que deban ser variadas, bien preparadas y que contribuyan al objetivo fundamental, que es la "búsqueda" del concepto de número concreto. Una vez que el maestro tenga certeza de que se ha adquirido la destreza de identificar los conjuntos, con su cantidad y cualidad, podrá intentar introducir los numerales (signos para los nombres de los números)

ACTIVIDAD N° 13:

Nombre de la actividad: "Un signo o dibujo para los números".

LUGAR DE LA ACTIVIDAD: Aula.

OBJETIVO DE LA ACTIVIDAD: Identificar el nombre de los conjuntos con un numeral.

DESARROLLO DE LA ACTIVIDAD:

Como una variante de la Actividad N°12, se identificarán los conjuntos con las expresiones 1 lápiz, 2 patitos, 2 casitas, 2 flores, 3 sillas, 3 muñecos etc. Deben realizarse a partir de este momento, actividades que identifiquen al conjunto o grupo de objetos con su numeral y cualidad. Continuaremos utilizando el número concreto, como un excelente recurso para construir el número abstracto.

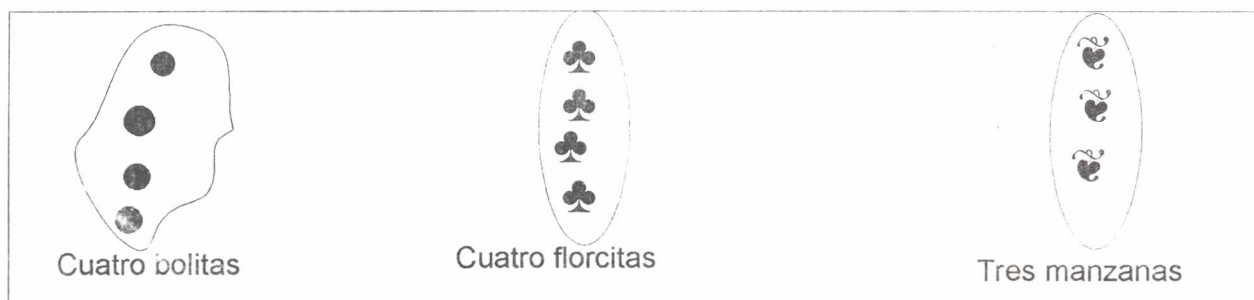
Número Concreto:

Se llama número concreto, aquél que además de la cantidad se hace acompañar de la cualidad. Tres patitos (3 patitos), Cinco lápices (5 lápices), tres chapitas (3 chapitas), etc

Número Abstracto:

Es el número desprovisto de la cualidad. Dos, cuatro, veinte, cinco, siete, etc .

En nuestro enfoque es la clase de todos los conjuntos (sin importar la cualidad) coordinables entre sí.



Es importante tomar en cuenta que para el niño preescolar o el niño en sus primeros estadios de la educación escolar, el número concreto, es decir las cosas u objetos concretos, resultan muy interesantes y atractivos. Cuando entramos a algunas aulas donde una cuidadosa maestra o maestro imparte el primer grado, nos entusiasma el colorido y las diversas formas de cartelones pintados en las paredes. Observamos cómo el docente con sus cartelones, intentan asociar tres aspectos básicos en esta etapa: la cualidad, la cantidad y su escritura. El recurso de pintar cinco hermosos pollitos amarillos, asociarlos con el numeral 5 y la palabra cinco y exponerlo a la vista de los niños por largos períodos tiene un efecto didáctico importante en el niño. La mayor limitación de este recurso es que participa casi exclusivamente el sentido de la vista del niño en el proceso de aprendizaje. El niño observa los lindos pollitos amarillos, posiblemente los cuenta; pero no participa activamente con el resto de sus sentidos y con su propia vitalidad.

No queremos finalizar este apartado sin insistir en la necesidad de aprovechar el interés del niño por los objetos concretos, para ir precisando el concepto de número. Contar y dibujar los miembros de su familia, contar y dibujar los dedos de sus manos, contar y dibujar las sillas de su casa, medir con sus manitas (cuartas) el largo de la pizarra y anotarlo en su cuaderno, contar y anotar en su cuaderno las letras de la palabra mamá; dar un salto a lo largo y luego medir con sus manitas la longitud de lo saltado. Estas y otras actividades orientadas a precisar y formalizar el concepto de número concreto, pueden realizarse con los niños y lograr muy buenos resultados.

El educador debe aprovechar un recurso muy valioso que en la mayoría de los casos no es tomado en cuenta en el proceso de enseñanza aprendizaje: la familia del niño escolar. Por lo general los padres de familia son convocados a la escuela para participar de actividades tendientes a la recolección de dinero para el Patronato Escolar o Junta de Educación. Vender números, participar en bingos y turnos escolares es, en la mayoría de

los casos, la única participación de los padres de los niños escolares. Partiendo realmente de que es la familia el núcleo más cercano al niño y que debemos estar siempre dispuestos a colaborar en la formación de nuestros hijos, debemos involucrar a la familia (padre, madre, hermanos) en el proceso formal de educación del niño; es un recurso didáctico de inagotables posibilidades.

A continuación citaremos algunas actividades que el educador puede planear aprovechando la familia del niño, y que contribuirán a lograr el objetivo propuesto: adquirir el concepto de número concreto y avanzar hacia la idea de número abstracto.

La familia cuenta las estrellas una noche de verano. La familia cuenta y lava los platos. Mide el frente de su casa. Papá conversa con sus hijos acerca del número de miembros de su familia. La familia siembra unas plantas y cuantifica su crecimiento durante los tres primeros meses. Contamos los programas de televisión que vemos los domingos. Regamos y contamos los siembros del jardín. Estas y otras actividades deben planearse con un claro conocimiento de la situación familiar de cada estudiante. El educador o educadora debe adecuar las actividades propuestas a la situación de su escuela y al entorno social.

Mayor que, menor que, Igual que:

Todos conocemos el hecho de que entre los números es posible establecer un orden. El conjunto de números cardinales que intentamos introducir en los niños es ordenado. Esto quiere decir que es posible determinar, dados dos números, cuál de ellos es mayor (o menor). Aprovecharemos el concepto de coordinabilidad y el de número concreto para introducir de una forma muy natural las llamadas relaciones mayor que (más que) menor que (menos que) e igual que (lo mismo que).

Es importante apuntar en este momento que a pesar de que en la edad preescolar el niño no ha adquirido formalmente conceptos numéricos, si utiliza y comprende términos como más y menos, poco, mucho, etc.

“Yo quiero más confites”, “a Carlos le dió más comida que a mí”; estas y otras expresiones son muy comunes en el niño preescolar. Utilizaremos estos conceptos generales para introducir sin gran formalización, pues no es necesario por ahora las relaciones mayor que, menor que e igual que en niños de edad preescolar o en sus primeros años de la escuela.

ACTIVIDAD N°.14

Nombre de la actividad: "Sobran o no sobran".

Lugar de la actividad: Aula de clase o patio de la escuela.

Objetivo de la actividad: Deducir, por medio de la comparación, si hay mayor cantidad de hombres o mujeres en el grupo.

Desarrollo de la actividad:

Se separará el grupo en dos partes, los hombres por un lado y las mujeres por otro. El educador llamará al centro un miembro del grupo de los hombres y otro del grupo de las mujeres. Se repetirá este procedimiento hasta que en alguno de los dos grupos no quede ningún miembro. Se preguntará al grupo si hay más cantidad de hombre que de mujeres en el grupo, o viceversa. El grupo contestará según como se haya presentada la situación, ya sea que sobren mujeres u hombres. El educador deberá insistir en el hecho de que sobraron por un lado hombres (o mujeres) mientras que en el otro grupo ya no queda ningún miembro; por lo tanto, hay más cantidad de unos que de otros.

ACTIVIDAD No.15

Nombre de la actividad: "Empatados"

Lugar: Aula de la escuela

Materiales: cuaderno, lápiz

Objetivo: Reforzar el concepto de igualdad.

Desarrollo de la actividad:

Se le solicitará al grupo que dibuje dos círculos grandecitos uno al lado del otro. El educador les solicitará que en un círculo escriba las vocales a,e,i,o,u y en el otro círculos los numerales 1,2,3,4,5.

Se les pedirá que unan o asocien cada letrita con un numeral uno a uno, por medio de flechitas en las dos direcciones. ¿Qué sucede? Se solicitará escribir un nombre para cada conjunto. Se insiste en la igualdad de elementos de los conjuntos (coordinables).

Actividades como las anteriores u otras que el educador pueda desarrollar, contribuyen a reafirmar los conceptos de "más que", "menos que" e "igual que", que se pueden asociar a las relaciones "mayor que", "menor que" e "igual que". Esta asociación resulta muy natural por el hecho de que a cada conjunto concreto se le asocia un número concreto; el docente debe insistir en el principio de coordinabilidad entre conjuntos para introducir

las relaciones citadas. Por ejemplo, si en la actividad de aprendizaje No.14 el grupo de los varones se agota primero que el de las mujeres, después de hacer pasar todas las parejas posibles, esto significa que los conjuntos de niños y niñas no son coordinables; al agotarse primero el conjunto de niños, entonces el conjunto de niños tiene "menor" número de elementos que el conjunto de niñas; por lo tanto, el número concreto que corresponde al conjunto de niños es "menor que" el número concreto que corresponde al conjunto de niñas. De esta misma forma es posible introducir o aclarar conceptos como: "más largo", "más corto", "más pesado," "más grande," "más pequeño", etc.

Proponemos al docente desarrollar actividades variadas y motivadoras para los niños, que contribuyan a ir logrando cierto grado de formalización de estos conceptos, tan importantes en el camino hacia la construcción del concepto de número y la introducción del cálculo en el niño.

Suma y Resta (adición y sustracción)

Una vez que los niños han sido ejercitados en actividades como las expuestas en los apartados anteriores, tendientes todas a precisar, a lograr por una parte la propiedad de invariabilidad de la cantidad y por otra a que el niño adquiere de una manera más precisa el concepto de número concreto, se está en condiciones de introducir al niño en el mundo del cálculo aritmético, en el mundo de la suma o adición y la resta o sustracción. Empezaremos por estas dos operaciones y no por el producto y cociente (multiplicación y división) por considerarlas más naturales, más cercanas al mundo del niño preescolar o escolar en los primeros niveles. Los procesos de aumentar y disminuir parecieran más sencillos y primarios que los de multiplicar y dividir aunque su relación y similitud son evidentes.

Utilizaremos en este intento, al igual que en los apartados anteriores, material concreto, objetos que puedan agruparse o separarse de tal forma que el niño perciba con sus sentidos estas operaciones o procesos. Que el niño participe con todos sus sentidos y vitalidad en la creación de los procesos generadores que contribuirán a crear los conceptos de adición y sustracción.

El educador debe orientar sus actividades en el sentido de que los niños asocien e identifiquen el concepto de adición o suma con procesos generadores como unir, juntar, agrupar, totalizar, aumentar. El niño debe realizar estos procesos; el educador debe guiar e ir poco a poco asociando los procesos generadores con la operación suma o adición. La operación resta o sustracción como proceso inverso de la suma o adición debe asociarse, debe identificarse con procesos como quitar, separar, disminuir, sustraer. Que el niño toque, manipule los objetos, los separe, los junte, los unifique, los agrupe, que el niño, además, palpe por la actividad física misma los efectos de sumar o restar aunque al principio no nos interese precisarlos.

Cuando el niño une las tres chapitas de refresco con las dos piedrecillas que se encontraban a un lado en un solo grupito o conjunto, está adicionando, está sumando. Cuando el niño busca piedras de los alrededores de la escuela y los deposita en un conjunto, está ejercitando el proceso de aumentar, de totalizar, está sumando. Cuando el niño separa, segrega de un grupito de lápices cierta cantidad de ellos, está restando; está, de alguna, manera interiorizando el concepto de quitar, segregar, disminuir: en otra palabras, está restando.

Para que el educador tenga algunas guías que puedan servirle de modelo, en la introducción de los conceptos de suma y resta en el niño, brindamos a continuación algunas actividades que contribuyen a lograr los conceptos propuestos. Es importante recalcar que todas las actividades son guías que pueden ser variadas por el educador, según las condiciones concretas de su escuela y de sus alumnos. Lo que sí recomendamos es mantener la actividad, la participación vital del estudiante en cada situación de aprendizaje. Las actividades deben construirse, de ser posible, los mismos estudiantes; debe sugerirla el niño y el educador adaptarlas a sus objetivos.

ACTIVIDAD No.16

Nombre: Uniendo o agrupando objetos.

Lugar: Patio de la escuela

Materiales: cáñamo o pabilo, materiales de los alrededores de la escuela (palillos, hojas, piedrecillas, chapitas, etc.)

Objetivo: Ejercitar procesos generadores como unir, agrupar, totalizar.

Desarrollo de la actividad:

Se envía a los alumnos a que recojan objetos variados de los alrededores de la escuela y que nos servirán para formar conjuntos.

A cada estudiante se le da pabilo con el fin de que haga encierros en su área de trabajo. Se les solicitará que formen diversos conjuntos con los objetos recolectados, delimitados por los encierros de pabilo o cáñamo. Se solicitará que observen la cantidad de elementos u objetos de cada conjunto (si es en los primeros grados de la educación escolar; que cuenten los objetos de cada conjunto). Se solicitará que unan o junten en un solo conjunto dos conjuntos que tengan objetos de la misma clase, que observen (o cuenten) lo que sucede en cuanto a la cantidad de elementos u objetos del nuevo conjunto. Se guiará al estudiante para que realice comparaciones entre la cantidad de objetos del nuevo conjunto que resulta de juntar, agrupar, unir los anteriores conjuntos y

estos por separado. Este procedimiento se puede ampliar uniendo tres o más conjuntos de igual clase de objetos o de objetos de diferente clase, e insistir en el proceso de que el número de objetos del nuevo conjunto aumenta, al unir conjuntos separados.

372.7
V=7a

Actividad No.17

Nombre de la actividad: "Animalitos reunidos"

Lugar: Aula de la escuela

Objetivo: Ejercitar la unión, la agrupación, la totalización de objetos como procesos de adición.

Desarrollo de la actividad:

El educador dibujará varios conjuntos diferentes cuyos elementos pueden ser dos patitos, por otro lado tres conejitos, otro puede ser dos ardillitas a elección del educador. Solicitará a los alumnos que dibujen y colorean esos conjuntos en sus cuadernos. Luego solicitará que junten, agrupen, unan en un solo conjunto todos los elementos de los conjuntos dados. Se solicitará que cuenten los elementos del nuevo conjunto, que realicen comparaciones con el número de elementos de cada conjunto por separado. Se solicitará que busquen un nombre apropiado para cada conjunto por separado y para el nuevo conjunto que resulta de la unión, de la totalización de éstos.

0117864

Actividad No18:

Nombre de la actividad: "La ronda"

Lugar y materiales: Plaza de la escuela

Objetivo de la actividad: Asociar el concepto de resta o sustracción con los procesos de separar, quitar elementos de un conjunto.

Desarrollo de la actividad: Se separará el grupo en tres partes. Una parte formará tomándose de sus manos; una circunferencia lo más amplia posible; las otras dos partes del grupo se instalará una dentro de la circunferencia formada y la otra parte fuera de la circunferencia. El juego consiste en que el grupo que se encuentra fuera de la

circunferencia intentará sacar a los niños que se encuentran dentro; los niños que forman la circunferencia tratarán de evitar que los niños que se encuentran dentro sean sacados. Se contarán los niños que se encuentran dentro de la circunferencia, se iniciará la actividad y cada vez que un niño sea sacado de la circunferencia se volverán a contar los que quedan. El educador guiará al grupo para que observe el hecho de que conforme son sacados niños de la circunferencia, la cantidad disminuye, el conjunto de niños es menor cada vez, se le están restando elementos al conjunto.

ACTIVIDAD No.19

Nombre de la actividad: "Quitar y ganar"

Lugar y materiales: Patio de la escuela o plaza, niños, piedrecillas, chapas o paletas.

Objetivo de la actividad: Ejercitar por medio de los procesos de disminuir, quitar el concepto de resta.

Desarrollo de la actividad: Se trasladará al grupo al patio o plaza de la escuela. Se dividirá en 4 ó 5 subgrupos dependiendo de la cantidad de alumnos. Se le dará a cada subgrupo, de estudiantes 30 o más piedrecillas, hojas o paletillas. Cada subgrupo dibujará una circunferencia en la plaza (con un palito sobre el suelo, o una tiza sobre el cemento) y deposita allí sus 30 piedrecillas o paletillas. Se dibujará una línea y a unos 10 metros de ella se marca una zona de lanzamiento. Un miembro de cada grupo lanzará una moneda desde la zona hacia la línea marcada. Quien logre caer más cerca de la línea quita de su conjunto cinco piedrecillas o paletillas. El que cae en segundo lugar quita, disminuye su conjunto en cuatro piedrecillas, el que cae en tercer lugar quita tres piedrecillas y así sucesivamente. Se repetirá el procedimiento con cada miembro de los subgrupos. El subgrupo que logre quitar, disminuir el conjunto de piedrecillas asignado a cero, será el ganador.

ACTIVIDAD No. 20

Nombre de la actividad: "Aficionados Unidos"

Lugar: Aula de la escuela o patio

Objetivo: Ejercitar por medio de los procesos de unir, adicionar, el concepto de suma.

Desarrollo de la actividad: Se dividirá el grupo de acuerdo con la simpatía de los estudiantes por los diferentes equipos de balompié de la primera división costarricense (alajuelenses, saprissistas, porteños, heredianos, etc.). Se contarán los integrantes de cada subgrupo. Se solicitará que se unan o agrupen en un solo conjunto los simpatizantes de equipos que pertenezcan a la misma provincia. Se contarán y se insistirá en el hecho de que la unión de simpatizantes implica conjuntos de mayor cantidad de elementos. Se solicitará que se unan en un solo conjunto los aficionados a Saprissa y Alajuela. Se contarán los miembros de estos conjuntos y se compararán con los restantes. Se solicitará unirse en un solo grupo los aficionados a todos los equipos. Se contarán y se compararán con el número de elementos de cada grupo de aficionados por aparte.

Como se puede notar, las actividades anteriores pretenden, sin formalización alguna, introducir al escolar en el proceso de cálculo aritmético. Se suma y se resta sin números sin formalismos aritméticos innecesarios, por ahora. Consideramos fundamental esta etapa para avanzar hacia niveles superiores de abstracción y de formalización.

El docente puede realizar actividades en el aula tendientes a reforzar los procesos de unión, totalización de objetos y el proceso de separación o segregación de éstos.

Daremos a continuación una secuencia lógica de ejemplos que pueden conducir a un mayor grado de formalización de las operaciones suma y resta.



Nótese que el conjunto que resulta de unir o juntar los dos conjuntos separados tiene mayor cantidad de elementos que estos por separado; debe dibujarse más grande.



Nótese que el conjunto que resulta de quitar el segundo conjunto al primero tiene menos cantidad de elementos que el primero y por lo tanto lo dibujamos más pequeño.



La etapa siguiente se apoya en el dibujo o diagrama de los conjuntos pero utiliza además los números concretos.



5 corazoncitos más 3 corazoncitos igual 8 corazoncitos



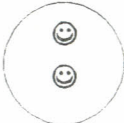
6-  le quito  igual 

8 corazoncitos menos 3 corazoncitos igual 5 corazoncitos

Una etapa posterior sería sustituir el término "unido con" o "junto con" por la palabra más y el símbolo "+". Similarmente, sustituir el término "le quito" por el término menos y el signo "-". Tendríamos situaciones como las siguientes

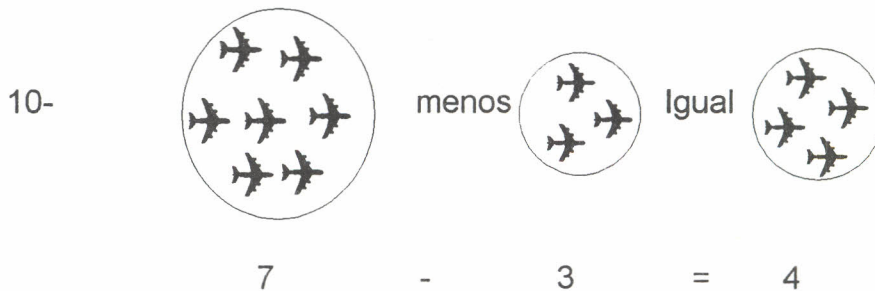
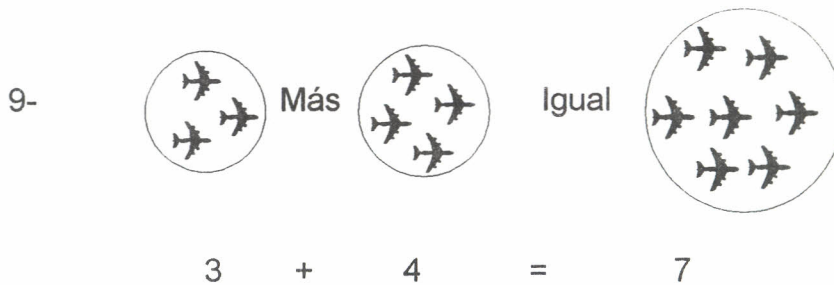
7-  más  igual 

5 corazoncitos más 3 corazoncitos igual 8 corazoncitos

8-  menos  igual 

5 caritas menos 3 caritas igual 2 caritas

Por último proponemos una variante que sería no utilizar el número concreto (numeral y cualidad) sino únicamente el número, aunque consideramos conveniente seguir utilizando los conjuntos. Algunas situaciones típicas serían las siguientes.



Obsérvese que, de alguna manera, hemos llegado a un alto grado de formalización aritmética, partiendo de material y objetos muy concretos. Se podría pensar en que es posible iniciar al estudiante con operaciones formales, como las que consideramos en nuestra exposición, como el último eslabón en el proceso que nos ha guiado hacia la aritmética, es decir, $7+3$ o $5-2$. De hecho, en muchas escuelas el cálculo aritmético se inicia de esta forma. El niño utiliza sus dedos, palitos, rayitas en el cuaderno, para realizar las operaciones y posiblemente tenga "éxito" en el resultado. Lo que no nos atrevemos a afirmar es hasta qué punto ha interiorizado, ha reforzado mentalmente el proceso que conduce a fijar de manera natural en el mundo del niño, los conceptos de suma y adición.

Después de este proceso el educador puede ir introduciendo cada vez más al niño en las operaciones con mayor grado de abstracción; es decir, puede utilizar cada vez menos los conjuntos u objetos, depender menos de los números concretos. Recomendamos que se trabaje con números menores que diez y que se ejercite la simbología y el algoritmo de la suma y de la resta. Debe conducirse al niño a depender cada vez menos de los dedos y de rayitas para efectuar sumas y restas y que ejercite su memoria y su mente.

Proponemos una última actividad a manera de cierre de todo este proceso que iniciamos en apartados anteriores, con el objetivo de lograr en el niño o niña la invariabilidad de la cantidad y que hemos desarrollado hasta aquí con la introducción de la suma o adición y de la operación, resta o sustracción.

ACTIVIDAD No.21

Nombre de la actividad "Dos importantes señoras"

Lugar: Aula de la escuela

Objetivo: Brindar, a manera de conclusión, algunas imágenes que refuercen la esencia de los conceptos de suma y de resta.

Desarrollo de la actividad:

Esta actividad se puede desarrollar en el aula a manera de una breve narración o cuento.

La narración es la siguiente:

Un buen día, la señora Suma o Adición como también se la llamaba, se encontró con la señora Resta o Sustracción. Aunque vivían en el mismo barrio, sus casas ocupaban lugares completamente opuestos. Sus apariencias a decir verdad, era también muy diferente: mientras doña Suma era gordita, comelona y le gustaba comprar todo tipo de cosa para aumentar sus bienes, la señora Resta era muy delgadita, casi no comía y su pasión consistía en desprenderse de todas sus cosas. La señora Suma vivía en una casa enorme a la que cada semana había que agregarle más cuartos y habitaciones para poder acomodar todas las cosas que ella adquiría. La señora Resta, mientras tanto, vivía en una casita muy pequeña, y a pesar de esto le sobraba espacio para acomodar sus pocas pertenencias, pues ella se desprendía con gran facilidad de todas sus cosas

¡Hola señora resta!. Gusto en verla, aumenta mi satisfacción el saludarla.

El gusto es para mí señora suma, disminuye mi ansiedad el verla¿ Qué hay de nuevo, señora Suma?.

Pues lo mismo de siempre contestó la señora Suma, aumentando en cada momento todas

mis cosas, aumenta mi riqueza, aumenta mi casa y hasta mis deudas aumentan, pero por dicha a esas le toca pagarlas usted.

Si señora suma, yo disfruto haciendo lo contrario de lo que hace usted: mi riqueza disminuye, mi peso disminuye y me complace pagar sus cuentas y las de todas las personas del mundo.

Soy una mujer muy afortunada, señora Resta, de tener una amiga como usted., Me duele tener que dejarla pero debo seguir comprando y acumulando mis bienes. Recuerde que aumentar en todo es es mi destino.

Bueno, señora Suma, ha sido para mí un gran placer poder saludarla. Yo también debo proseguir mi camino, pues tengo que seguir pagando y cancelando todas las cuentas que me encuentro por ahí.

La actividad puede finalizar solicitándole a los niños que dibujen en su cuaderno a la señora Suma y a la señora Resta.

División o cociente, multiplicación o producto.

Una vez que el alumno se ha introducido en las operaciones de suma y resta, nos parece lógico continuar con las otras dos operaciones básicas de la aritmética, la multiplicación o producto y la división o cociente. La multiplicación o producto puede ser abordadas de diversas formas. Proponemos para seguir con nuestra línea de trabajo, utilizar materiales muy concretos y fáciles de conseguir para conducir al niño a la esencia de la operación producto.

¿Qué es fundamental tener presente antes de preparar cualquier actividad dirigida a introducir el concepto de producto?

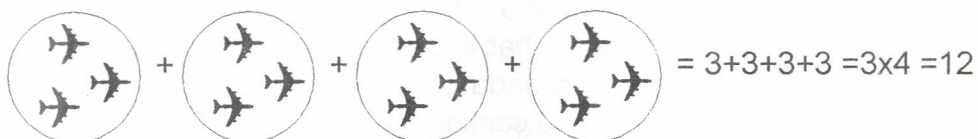
La respuesta es relativamente sencilla. Debe tenerse muy claro qué significa multiplicar. Partiremos en este apartado del concepto de producto o multiplicación como una forma de abreviar una suma donde todos los sumandos son iguales. Es decir, la suma $4+4+4+4+4$ tiene el número cuatro como sumando repetido 5 veces; esta suma la podemos expresar como un producto o multiplicación de la forma 4×5 (cuatro cinco veces).

Nótese que lo anterior nos permite decir que multiplicar es aumentar un número determinado de veces cierta cantidad. Es importante mencionar que se parte del hecho de que se están multiplicando número enteros positivos (números cardinales).

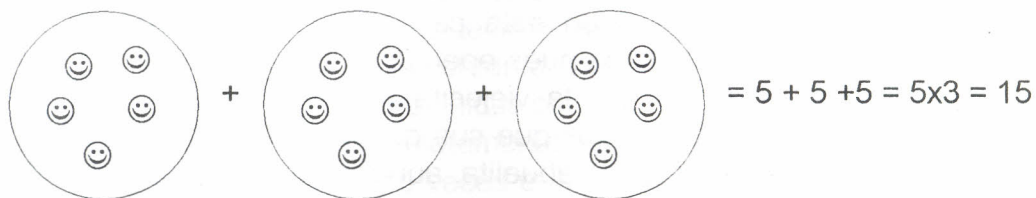
En nuestro ejemplo $4 \times 5 = 20$ significa que el número 4 se toma como sumando repetido 5 veces, es decir, se aumenta el número cuatro cinco veces. Se llama multiplicando el número que se repite (el sumando repetido) se llama multiplicador el número que indica las veces que se repite o aumenta el multiplicando. El resultado de la operación se llama producto, y tanto el multiplicando como el multiplicador se llaman factores. Si el educador lo considera conveniente, puede planear actividades similares a las realizadas en la introducción de las operaciones de suma y resta. Considerando el hecho de que la

multiplicación es un caso particular de suma, donde todos los sumandos son iguales, puede utilizar el unir conjuntos de igual número de elementos e identificarlos con el producto.

Sugerimos actividades con material concreto como las siguientes:



$$3 + 3 + 3 + 3 = 3 \times 4 = 12$$



$$5 + 5 + 5 = 5 \times 3 = 15$$

Obsérvese que a pesar de que el producto de 3×4 es igual a 4×3 (propiedad conmutativa de la multiplicación) hay una diferencia en la disposición de los sumandos; 3×4 significa 3 aumentado 4 veces y 4×3 significa 4 aumentado 3 veces.

Sugerimos trabajar con los estudiantes en actividades como las anteriores, tendientes a darle sentido a la operación producto. Es esta una buena forma de hacer más entretenido el estudio de las tablas de multiplicar tan poco atractivas para los niños y niñas de nuestra escuela primaria. Para cerrar la introducción de esta operación, apelamos a la creatividad del educador para mantener siempre al estudiante interesado en el tema que se desarrolla.

A manera de ejemplo proponemos una última actividad que involucra la operación producto.

Actividad No.22

Nombre de la actividad: "Abuela gana un concurso".

Lugar: Aula de la escuela.

Objetivo: Reforzar el concepto de producto o multiplicación como una suma abreviada.
Desarrollo de la actividad:

El educador cuenta el siguiente relato a los estudiantes de la clase.

En un pueblito se organizó un concurso que consistía en determinar quién contaba más rápidamente los huevos de gallina contenidos en una canastita. En el concurso participaron un estudiante de la escuela primaria, un estudiante de la educación secundaria y una viejecita del pueblo que apenas había cursado segundo grado hacía muchos años. El organizador del concurso dio a cada participante una canasta con la misma cantidad de huevos. Quien primero contara la cantidad de huevos del cesto ganaba el concurso. Se dio la orden de empezar el concurso. Mientras los estudiantes sacaban y contaban los huevos de uno en uno, la viejecita sacaba los huevos de tres en tres y con una gran rapidez se le oía decir "tres y tres seis y tres nueve y tres doce y tres quince. Así continuó hasta gritar: ¡Hay treinta huevos en esta canastita! Los estudiantes que competían con ella se quedaron sorprendidos pues apenas se había contado 12 o 14 huevos de sus canastas. ¿Qué pasó? Pues la viejecita, que ya pasaba de los 70 años, desde hacía mucho contaba los huevitos que sus gallinitas le ponían haciendo grupitos de tres. Con una rapidez envidiable, la abuelita, aunque no conocía la tabla del tres, de alguna manera utilizó la multiplicación para contar los huevos de la canasta. A la viejecita solo le faltaba poder escribir que:

$$3+3= 6 = 3 \times 2, \quad 3+3+3= 9 = 3 \times 3,$$

$3+3+3+3= 12 = 3 \times 4$ y así sucesivamente. La actividad puede culminar solicitándole al grupo que realice un dibujo que ilustre la situación relatada.

Hemos dejado la operación cociente o división al final para tratarla con un poquito más de amplitud. La división, por lo general presenta un mayor grado de dificultad para ser introducida en niños de la escuela primaria. De igual forma que para las anteriores operaciones aritméticas, es muy importante que el educador tenga suficientemente claro el camino por el que va a guiar a los estudiantes. ¿Qué es dividir? ¿Cuál es su fundamento? ¿Qué procesos generadores utilizo para introducir la división? ¿Qué proceso utilizo para llegar a cierto grado de formalización? El educador debe tener claro las interrogantes anteriores. Veamos:

Es posible que en el desarrollo de la humanidad, la división se convirtió en una necesidad en el momento en que fue necesario repartir. Hasta nuestros días se asocia el dividir con repartir, con dar cierta cantidad a alguien o a varios. Se puede dividir un objeto cualquiera en determinado número de partes iguales, o no necesariamente iguales. Como nuestro interés es introducir al estudiante en el mundo de la división aritmética, empezaremos por sus mismos fundamentos.

ACTIVIDAD No.23

Nombre de la actividad: "Corto y superpongo"

Lugar y materiales: Aula de la escuela, hojas de papel, tijeras.

Objetivo: Introducir el concepto de división aritmética sin utilizar números.

Desarrollo de la actividad: Se repartirá a los estudiantes dos hojas de cuaderno u hojas de papel periódico de igual tamaño. Se solicitará que dividan una de las hojas en dos partes iguales y que las coloquen sobre la hoja dada que no se cortó. Se solicitará que observen que cada parte de las cortadas cabe, o está contenida, exactamente dos veces en la hoja sin cortar, es decir la hoja se dividió en dos. Se solicitará ahora que dividan cada una de las partes obtenidas en dos partes iguales. Se solicitará de nuevo superponer las cuatro partes obtenidas sobre la hoja sin cortar. Se solicitará observar que las cuatro partes cubren completamente la hoja entera, esto es, cada una de las partes está contenida o cabe cuatro veces en la hoja sin cortar. Esto es, la hoja se dividió en cuatro partes iguales. Se solicitará ahora que dividan cada una de las cuatro partes en dos partes iguales, que superpongan de nuevo las partes obtenidas sobre la hoja entera, que comprueben que estas partes cubren la hoja sin cortar, están contenidas en la hoja entera, que comprueben que cada parte de la hoja cortada cabe, está contenida, ocho veces en la hoja sin cortar. Cada parte está contenida exactamente ocho veces en la hoja entera; esto es, la hoja se ha dividido en ocho partes.

Nótese que esta actividad insiste con amplitud en el hecho de que partes de la hoja puedan estar contenidas un número exacto de veces en la hoja entera. Se pretende, por lo tanto, introducir al estudiante en el principio básico de la división o cociente aritmético: determinar el número de veces que está contenida cierta cantidad en otra.

Actividad No.24

Nombre: "Midiendo mi pupitre"

Materiales: Una hoja de cuaderno, tiza

Objetivo: Introducir el concepto de división o cociente sin números.

Desarrollo de la actividad:

Se solicitará a los estudiantes sacar una hoja de su cuaderno (o el educador la repartirá a cada estudiante). Se dará a cada estudiante un trocito de tiza. La actividad consiste en determinar el número de veces que cabe la hoja de papel en la superficie de la mesa. Para determinarlo, el estudiante colocará una y otra vez la hoja sobre la superficie de la mesa, marcando los bordes con tiza. Se invitará al estudiante a contar el número de veces que está contenida la hoja en la superficie, si es un número exacto de veces o si sobra una parte, de tal forma que no cabe toda la hoja. Se guiará al estudiante a deducir que la superficie de la mesa se puede dividir en determinado número de partes iguales al tamaño de la hoja de cuaderno y sobra (si así fuera) una partecita.

¿Verdad que hemos realizado una división sin números?

El educador o puede preparar con sus estudiantes actividades muy variadas que conduzcan al niño a los fundamentos del cociente o división. ¿Cuántas veces cabe o está contenido el borrador de la pizarra en el borde de ésta? ¿Cuántos cuadritos (mosaicos) caben en el piso del aula? ¿Cuántas cuartas caben en el borde de un metro? ¿Cuántas pulgadas caben en el borde del cuaderno?

Actividad No.25

Nombre de la actividad: "Mido, corto y divido"

Materiales: Cinta de papel, tijeras, lápiz y regla.

Objetivo de la actividad: Aproximarse con material concreto a la división numérica.

Desarrollo de la actividad

Se entregará a cada niño una cintita de papel de 15cm de largo, previamente medida y recortada por el educ. Se les pedirá a los estudiantes que con su regla midan la longitud de la cinta. Se solicitará al grupo cortar una cinta de papel de una hoja de su cuaderno de una longitud de 3 cm. y del mismo ancho de la cinta dada por el educador. Se pedirá que superpongan la cinta pequeña sobre la cinta más grande y que vayan marcando cada vez con el lápiz para determinar el número de veces que cabe una en la otra.

Se les recuerda por parte del educador, las medidas de las dos cintas, es decir, 15 cm. y 3 cm. Se les solicitará contar el número de veces que cabe la cinta de 3 cm. en la cinta de 15 cm. Se pedirá que interpreten, que saquen alguna conclusión del resultado. Se solicitará que recorten la cinta de 15 cm. en cada marca realizada. Se desea concluir que si una cinta de 15 cm. de longitud se corta, se divide, se parte en trocitos de cintas de 3 cm. cada una, se obtienen 5 trocitos exactos sin que sobre nada.

Una vez desarrolladas las actividades anteriores es posible pretender un mayor grado

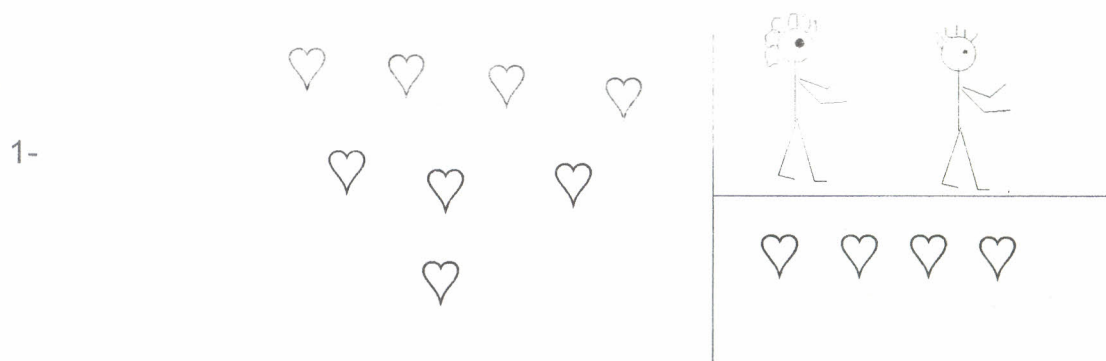
de formalización de la operación cociente o división.

Daremos algunas actividades que conducen paulatinamente a la división numérica y que permiten visualizar y comprender mucho mejor los fundamentos de esta operación.

1- dividido en partido por Igual

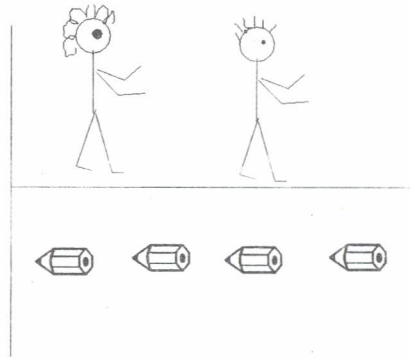
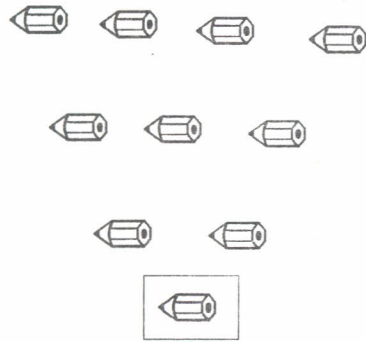
2- Partido por igual

Un grado mayor de formalización se puede lograr con actividades como las siguientes:



El diagrama anterior debe ser interpretado como el hecho de que si divido ocho corazoncitos de chocolate entre dos amiguitos, le corresponden cuatro chocolatitos a cada uno y no sobra ninguno

2-



El

diagrama anterior debe ser interpretado como el hecho de que, si divido nueve lápices entre dos amiguitos, le corresponden cuatro lápices a cada uno y sobra un lápiz.

Los diagramas anteriores resultan de una gran ayuda para la formalización paulatina de la división, pueden ser realizados como dibujos en pizarra o como modelos de cartulina, ya sean naranjas, flores, confites y dos o más modelos de figuritas humanas; resultan de gran interés para los niños. ¿Como podríamos continuar? ¿Qué podría seguir? Consideramos que estamos en condiciones de plantear operaciones numéricas o, mejor dicho llevar las actividades anteriores al lenguaje numérico, Veámos:

La actividad N° 1 se puede expresar como:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 0 & 4 \end{array}$$

La actividad N° 2 se puede expresar como:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 2 \\ 1 & 4 \end{array}$$

En este momento hemos dado un salto al número abstracto y a la operación formal. Como el educador ha podido observarlo, en el proceso hacia la construcción del número abstracto han mediado una serie de actividades que, vistas como un proceso, conducen al niño hacia las operaciones formales.

No queremos finalizar esta introducción a las operaciones aritméticas, sin antes decir que lo expuesto en los apartados anteriores no debe ser visto como una receta a seguir en forma estricta. El docente debe aplicar creadoramente y considerando las condiciones particulares de su escuela y de sus estudiantes lo que aquí se propone. No se debe abusar de actividades que puedan parecer repetitivas. Las actividades propuestas en los apartados anteriores deben ser planeadas con tiempo y con sumo cuidado. El juego en sí resulta para los niños una actividad motivadora y necesaria, pero debe tomarse en cuenta que todas las actividades anteriormente propuestas tienen objetivos claros

y bien determinados; son juegos dirigidos y representan un recurso metodológico que nos

puede brindar enormes beneficios tanto al educador como a los niños. Como en todo proceso, el tiempo y la experiencia hará que perfeccionemos cada vez más todos los recursos que están a nuestra disposición.

Algunas propiedades fundamentales del número.

Expondremos a continuación algunos conceptos fundamentales acerca de los números. Intentaremos brindar al educador una forma simple pero correcta de introducirlos. Sugeriremos algunas actividades que pueden ser realizadas, pero no las desarrollaremos a plenitud como en los apartados anteriores. Dejamos a la creatividad de cada educador el darle forma a estas sugerencias metodológicas.

No siempre es fácil encontrar la forma de definir correctamente conceptos aritméticos fundamentales, de manera sencilla y accesible para niños de los primeros años de la educación primaria. Posiblemente todos coincidamos en el hecho de que decirle a un niño de segundo grado que un número par es aquel que puede siempre expresarse de la forma $2n$ donde n pertenece al conjunto de números cardinales parece no ser apropiado. ¿Qué hacer? ¿No dar definiciones? No. Lo que procede es adecuar a su lenguaje y a su madurez los conceptos matemáticos; conforme avanzamos en el proceso de formación es posible dar conceptos de mayor grado de abstracción y generalidad.

Múltiplos y submúltiplos:

Muchas de las actividades de aprendizaje realizadas para la introducción de las operaciones aritméticas pueden utilizarse para definir, introducir los conceptos de múltiplos y submúltiplos.

Diremos que un número es múltiplo de otro número si lo contiene un número exacto de veces (ver actividades No.22, No.23, No.25).

Un número es submúltiplo de otro si está contenido un número exacto de veces. El educador puede acudir a la operación producto o multiplicación para reforzar estos dos conceptos.

Recuérdese que $2 \times 3 = 6$ significa 2 tres veces, es decir, 6 contiene a 2 tres veces; en otras palabras, 6 es un múltiplo de 2. ¿Será 6 un múltiplo de 3? La respuesta es afirmativa pues $3 \times 2 = 6$ significa 3 dos veces, es decir, 3 dos veces es 6, por lo tanto 6 contiene a 3 dos veces y entonces 6 es múltiplo de 3.

Obsérvese que el concepto de submúltiplo está ligado al concepto de múltiplo. Veámos: Si 6 es múltiplo de 3 y de 2 es porque los contiene un número exacto de veces, esto significa que 3 y 2 están contenidos un número exacto de veces en 6, por lo tanto son

submúltiplos de 6.

El educador puede planear con sus estudiantes un gran número de actividades para reforzar los conceptos de múltiplo y submúltiplo. Podría aprovechar este tema para introducir el metro lineal, sus múltiplos y sus submúltiplos. ¿Cuántos centímetros caben en un metro lineal? ¿Cuántos decímetros están contenidos en un metro lineal? ¿Son los cm. y dm. submúltiplos del metro lineal? ¿Cuántos metros lineales contiene un decámetro? ¿Es el decámetro un múltiplo del metro lineal? Etc. Podría el educador con sus estudiantes construir modelos de cartulina del centímetro, del decímetro, del metro lineal, del decámetro para compararlos y hacer más evidente las propiedades de múltiplos y submúltiplos. Es importante aprovechar la introducción de los conceptos de múltiplos y submúltiplos de un número, para deducir de las definiciones de estos conceptos los principios de que todo número es a la vez múltiplo y submúltiplo de sí mismo. Esto es, 2 es múltiplo de 2 pues $2=2 \times 1$; es decir, dos contiene exactamente una vez a dos. Por otro lado, 2 es submúltiplo de 2, pues 2 está contenido exactamente una vez en 2. A los submúltiplos de un número se los conoce también con el nombre de factores de ese número, es decir, en nuestro caso, 2 y 3 son factores de 6.

Mínimo común múltiplo:

Todo número tiene muchos múltiplos; incluso podemos decir que todo número tiene una serie infinita de múltiplos. Diremos que un número es un múltiplo común de dos o más números si contiene a cada uno de ellos un número exacto de veces. Por ejemplo 8 contiene a 2 (4 veces) y a 4 (2 veces). Luego, 8 es un múltiplo común de 2 y 4. También 16 contiene a 2 (8 veces) y a 4 (4 veces). Luego, 16 es otro múltiplo común de 2 y 4. De esta forma podríamos continuar encontrando múltiplos comunes de 2 y 4 como lo serían 32, 64, etc.

Llamaremos Mínimo Común Múltiplo de dos o más números y lo denotaremos por M.M.C. al menor de los múltiplos comunes.

Ejemplo. ¿Determine el M.C.M. de 2, 3 y 6?

Procederemos de la siguiente forma: encontraremos varios múltiplos de cada uno de los números dados, luego determinaremos los múltiplos comunes y, por último, escogeremos el menor de ellos; ese será el M.C.C.

Algunos múltiplos de 2 son 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26,
28, 30, etc.

Algunos Múltiplos de 3 son 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, etc.

Algunos múltiplos de 6 son 6,12,18,24,30,36,42, etc.

¿Cuáles son los múltiplos comunes en cada una de las series dadas?

Estos son 6,12,24 y 30.

¿Cuál es el menor? 6.

Así que 6 es el Mínimo Común Múltiplo.

Obsérvese que 6 es el menor de los múltiplos que contiene a cada uno de los números 2,3 y 6.

Una forma abreviada de determinar el m.m.c. de los números 2,3 y 6 es el siguiente.

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 6 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \end{array} \quad m.m.c. = 6$$

Divisibilidad:

El concepto de divisibilidad de hecho debe asociarse con la operación cociente o división, pero no con cualquier división sino con aquella cuyo residuo es cero, es decir, con las divisiones que hemos dado en llamar exactas.

Veámos: $6 : 2 = 3$

Entonces diremos que 6 es divisible por 2 o que 2 es un divisor de 6. De lo anterior es posible deducir que tanto 2 como 3 son submúltiplos (factores) de 6, por lo tanto es posible expresar 6 como 2×3 .

Esta última deducción es siempre posible hacerla cuando tenemos que un número es divisible por otro. Utilizaremos este hecho para dar una buena definición de divisibilidad.

Diremos que un primer número es divisible por un segundo número si es posible encontrar otro número tal que el primero se pueda expresar como el producto de los otros dos. Llamaremos a estos dos números, divisores del primer número. Decir que el primer número es divisible por el segundo es equivalente a decir que el segundo número divide al primero.

Es este un excelente momento para explicar aquel famoso principio de que no se puede dividir por cero. ¿Por qué un número cualquiera por ejemplo el tres, no se puede dividir por

cero? Por que para poder hacerlo debe existir otro número cardinal que multiplicado por cero me de como resultado tres. Ello no es posible. Luego no existe ningún número cardinal que multiplicado por cero me de como resultado tres, por lo tanto tres no se puede dividir por cero.

Ejemplo 1: ¿Será 8 divisible por 2?

La respuesta es que sí, pues es posible expresar 8 como 2 por 4, es decir, $8 = 2 \times 4$. En otras palabras dados el 8 y el 2 existe el número 4 tal que $8 = 2 \times 4$.

Ejemplo 2: ¿ Es el número 7 divisible por el número 3?

Lo sería si fuera posible encontrar otro número cardinal tal que 7 pueda expresarse como el producto de 3 por el número encontrado. Tal número no existe, luego 7 no es divisible por 3.

Ejemplo 3: ¿ Es el número 5 divisible por 0? La respuesta es que no porque no existe un número cardinal que multiplicado por cero me dé como resultado el número cinco.

Los números que dividen exactamente a otro número se llaman divisores del número.

Máximo común divisor : Veamos el siguiente problema.

Dados los números 36, 54 y 72 determinar todos los divisores de cada uno de ellos.

Los divisores de 36 son 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 y 36.

Los divisores de 54 son 1, 2, 3, 6, 9, 18, 27 y 54.

Las divisores de 72 son 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18, 24, 36 y 72.

Seleccionemos los divisores comunes de 36, 54 y 72. Estos son 1, 2, 3, 6, 9, 18. ¿Cuál es el mayor de los divisores? 18 ¿cuál el menor? El número 1.

Obsérvese que el número de divisores de un número cualquiera no es infinito, es decir no es ilimitado. Esto por cuanto el divisor, tal y como lo hemos definido, debe ser menor o igual que el número al cual divide .

Si uno o más números dividen a la vez a otros números, se llaman divisores comunes de estos números.

Llamaremos Máximo Común Divisor de dos o más números y lo denotaremos m.d.c. al mayor de los divisores comunes. En nuestro ejemplo anterior el m.d.c. es 18.

Ejemplo 1: Determine el m.d.c. de 25 y 30 sin encontrar todos los divisores de cada uno por separado. Veamos.

$$\begin{array}{r|l}
 25 & 5 \\
 & 5 \\
 & 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 30 & 2 \\
 & 3 \\
 & 5 \\
 & 1
 \end{array}
 \quad
 \text{el m.d.c.} = 5$$

¿Qué hicimos? Se factoriza cada número por aparte, luego se toma el producto de factores comunes el menor número de veces en que aparezcan. En nuestro caso, el único factor común de 25 y 30 es el 5 y se toma una vez.

Ejemplo 2. Calcule el m.d.c. de 96 y 64.

Veámos.

$$\begin{array}{r|l}
 96 & 2 \\
 48 & 2 \\
 24 & 2 \\
 12 & 2 \\
 6 & 2 \\
 3 & 3 \\
 1 & 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r|l}
 64 & 2 \\
 32 & 2 \\
 16 & 2 \\
 8 & 2 \\
 4 & 2 \\
 2 & 2 \\
 1 & 1
 \end{array}
 \quad
 \text{El único factor común es 2 y se toma cinco veces, luego el m.d.c. es: } 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$$

Números primos y compuestos:

Los números cardinales se dividen en números primos y números compuestos. Se dice que un número es primo si solamente es divisible por la unidad y por el mismo número. Si un número no es primo se dice que es compuesto.

Ejemplo 1: El número 2 es primo pues solamente es divisible por 1 y por 2.

Ejemplo 2: ¿Será primo el número 15?

La respuesta es negativa, pues además de ser divisible por la unidad y por él mismo, también es divisible por 3 y por 5; por lo tanto, 15 es un número compuesto.

Diremos que dos o más números son primos entre sí o primos relativos si solo admiten la unidad como divisor común.

Ejemplo 3 ¿Serán 12 y 13 primos relativos?

Los divisores de 12 son 1,2,3,4,6 y 12.

Los divisores de 13 son 1 y 13.

Luego, la unidad es el único divisor; común, por lo tanto, 12 y 13 son primos entre sí.

Ejemplo 4: ¿Serán 5 y 15 primos relativos? Veámos:

divisores de 5 son 1 y 5.

divisores de 15 son 1,3,5 y 15.

Obsérvese que además de la unidad tienen también como divisor común el 5; luego, 5 y 15 no son primos relativos.

Números pares e impares:

Estas propiedades de los números cardinales resultan muy sencillas de introducir aprovechando los conceptos que anteriormente hemos desarrollado.

Diremos que un número es par si se puede expresar como un múltiplo de dos; en caso contrario diremos que el número es impar.

Ejemplo 1: ¿Será 16 un número par?

Basta determinar si 16 es posible expresarlo como 2 por otro número cardinal. La respuesta es afirmativa, pues 16 se puede expresar como 2×8 . Luego, 16 es un múltiplo de 2 pues lo contiene exactamente 8 veces; por ende 16 es par.

Ejemplo 2: ¿Será 7 un número par?

Veamos. ¿Existe un número cardinal tal que 7 pueda expresarse como 2 por ese número? La respuesta es negativa. Luego, 7 no es par, por lo tanto es impar.

Utilizando un lenguaje simbólico podríamos decir que un número "a" es par si se puede expresar de la forma $2 \times b$ donde b es un número cardinal, o sea, $a = 2b$ con b un número cardinal. El número impar, por lo tanto, no podrá expresarse de la forma anterior. Sabemos, entonces, que un número impar "a" puede expresarse de la forma $2b + 1$, donde b es un número cardinal. En el ejemplo 2 anterior, 7 no es par; por lo tanto, no se puede expresar como $2b$ con b cardinal. Luego, 7 es impar, por lo que será posible expresarlo como $2b + 1$ con b cardinal, esto es $7 = 2 \cdot 3 + 1$.

Concluiremos este apartado enunciando un resultado de gran importancia en el estudio de los números y que se utiliza para demostrar múltiples principios en la matemática superior. Este principio se enuncia de la siguiente manera: "Todo número cardinal puede expresarse como el producto de factores primos".

Ejemplo 1: Factorice como producto de factores primos el número 15.

Veamos $15=3 \times 5$, donde 3 y 5 son primos.

Ejemplo 2: Factorice como producto de factores primos el número 30. Veamos. $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$, donde tanto 2 como 3 y 5 son números primos.

Lo anterior es posible efectuarlo con cualquier número cardinal; si el número es primo sus únicos factores serán la unidad y el mismo número.

Ejemplo 3: Los factores del número 7 serán 7 y 1, es decir, $7 = 1 \cdot 7$.

Algunas propiedades del sistema de numeración decimal aplicadas a las operaciones aritméticas:

Es importante señalar que nuestro sistema de numeración es decimal, o sea que su base es 10. Además es un sistema posicional, lo que significa que una cifra toma diferentes valores dependiendo del lugar que ocupa.

¿Qué significa ser de base 10? Significa que cada 10 unidades inferiores forman una unidad de orden superior. Esto es, 10 unidades forman 1 decena, 10 decenas forman 1 centena, 10 centenas forman 1 millar y así sucesivamente. ¿Qué significa que el sistema de numeración es posicional? Significa que una regla de posición establece que toda cifra colocada a la izquierda de otra representa unidades 10 veces mayores que las que expresa esta.

Ejemplo 1: El número 325 consta de tres cifras. Cada una de ellas tiene distinto valor según la posición que ocupe (valor posicional). Así, la cifra 5 vale 5 unidades; la cifra 2 vale 20 unidades; la cifra 3 vale 300 unidades. Podemos expresar, entonces, el número $325=300+20+5$, es decir, como la suma de los valores que cada cifra representa.

Ejemplo 2: ¿Expresa como la suma de valores que cada cifra representa, el número 5403?

Veamos. La cifra 3 representa 3 unidades; la cifra 0 situada a la izquierda de 3 representa cero decenas; la cifra 4 situada a la izquierda de 0 representa 4 centenas y la cifra 5 situada a la izquierda de 4 representa 5 unidades de millar. Luego, podemos expresar el número $5403=5000+400+0+3$.

Las cifras del 1 al 9 se llaman cifras significativas, tienen siempre un valor, la cifra cero se llama cifra insignificativa o auxiliar, y no tiene valor propio.

Las propiedades anteriores nos permiten enunciar un principio muy importante y que utilizaremos para explicar de mejor forma el funcionamiento o algoritmo de las operaciones aritméticas básicas.

Todo número cardinal puede expresarse como la suma de potencias de 10. Del ejemplo 2, anteriormente resuelto, se tiene que, $5403 = 5000 + 400 + 0 + 3$

luego $5403 = 5 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 0 \cdot 10 + 3 \cdot 1$

Esto es $5403 = 5 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

Recuérdese que 10 es igual a 1.

Ejemplo 3: ¿ Exprese el número 423714 como suma de potencias de 10?

Dependiendo del valor posicional de cada cifra tenemos que:

$$423714 = 400000 + 20000 + 3000 + 700 + 10 + 4$$

Luego

$$423714 = 4 \times 100.000 + 2 \times 10.000 + 3 \times 1000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 4 \cdot 1,$$

donde se tiene que:

$$423714 = 4 \times 10^5 + 2 \times 10^4 + 3 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

Esto es 423714 se ha expresado como la suma de potencias de 10.

Una explicación sencilla de la "suma llevando"

¿Qué valor didáctico tiene la propiedad anterior? La respuesta es que tiene una gran aplicación didáctica en la enseñanza de la aritmética básica en los primeros grados de la educación primaria.

Ejemplo 4: Realicemos la siguiente operación descomponiendo cada sumando como suma de potencias de 10.

$$25 + 47 \quad \text{o} \quad \begin{array}{r} 25 + \\ \underline{47} \end{array}$$

Utilizando el resultado anterior podemos efectuar la suma planteada de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 20 + 5 + \\ \underline{40 + 7} \end{array} = \begin{array}{r} 20 + 5 + \\ \underline{40 + 7} \end{array} = \begin{array}{r} 20 + 5 + \\ \underline{40 + 7} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{-----} \\ 60 + 12 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{-----} \\ 60 + 10 + 2 \end{array}$$

y por último

$$\begin{array}{r} 20 + 5 + \\ \underline{40 + 7} \\ 72 \end{array} \quad \text{es decir}$$

$$\begin{array}{r} 25 + \\ \underline{47} \\ 72 \end{array}$$

¿Qué hemos logrado con el procedimiento anterior?

Si se aprecia con cuidado, el procedimiento anterior permite visualizar con claridad, explicar con nitidez la famosa expresión que por lo general el niño no entiende de "pongo el tal y llevo tanto". (En nuestro caso "pongo el 2 y llevo 1"). Obsérvese que al sumar 5 y 7 y poner como resultado 12 unidades, queda claro que 12 unidades corresponden a 1 decena y 2 unidades; por lo tanto, el lugar de las unidades la ocupará el 2 y la decena "llevo uno" se sumará con las 6 decenas (60 unidades) correspondientes. Veamos otro ejemplo.

Ejemplo 5: Realice la siguiente suma utilizando la descomposición de los sumandos como suma de potencias de 10.

$$\begin{array}{r} 96 + \\ 25 \\ \text{-----} \end{array}$$

Expresándola como sumas de potencias de 10 y realizando la suma tendríamos:

$$\begin{array}{r} 90 + 6 + \quad 90 + 6 + \\ 20 + 5 \quad = \quad 20 + 5 \\ \hline \quad \quad \quad 110 + 11 \end{array}$$

Ahora, $110 + 11$ puede expresarse como $100+10+10+1$ que es igual a $100 + 20 + 1 = 121$. Es decir, 6 más 5 igual 11; "pongo el 1 y llevo 1"; 9 más 2 igual 11"; más uno que llevaba", igual a 12

Un último ejemplo:

Ejemplo 6: Realizar la siguiente suma utilizando unidades.

$$\begin{array}{r} 576 + \\ 945 \\ \hline \end{array}$$

Expresémosla como suma de potencias de 10, es decir;

$$\begin{array}{r} 576 + \quad 500 + 70 + 6 + \\ 945 \quad = \quad 900 + 40 + 5 \\ \hline \quad \quad \quad 1400 + 140 + 11 \end{array}$$

Ahora veamos: 11 unidades se expresan como $10 + 1$, Esto explica el "6 más 5 igual 11, pongo el 1 y llevo 1", clásico en este tipo de operaciones por parte del educador. Ahora, 120 es igual a $110+10$ que se expresa como $100+20$; esto explica la expresión $7+4$ igual 11 y una que llevaba 12, pongo el 2 y llevo 1".

Por último $1400+100$ es igual a 1500 que son 15 centenas. Esto explicaría el "5+9 son 14 más una que llevaba 15". La secuencia completa sería

$$\begin{aligned} 1400 + 110 + 11 &= 1400 + 110 + 10 + 1 \\ &= 1500 + 20 + 1 = 1521. \end{aligned}$$

Una explicación sencilla de "la resta pidiendo prestado":

Antes de realizar algunas restas utilizando la conversión a unidades, veremos una

propiedad que es posible utilizar cuando expresamos un número como suma de potencias de 10. Veamos.

El número 32 lo puedo expresar como $30+2$, pero también podría expresarlo como $20+10+2$ o, mejor aún, $20+12$. ¿Qué hemos hecho? Hemos trasladado una decena (10 unidades) al "lugar" de las unidades. Nótese que el número 32 no varía por esa traslación.

Otro ejemplo: el número 100 lo puedo expresar como sumas de potencias de 10, como

$100 = 100 + 00 + 0$ (una centena, cero decenas, cero unidades); pero también se podría expresar como $100=90+10+0$ ó $100 = 80 + 10 + 10$. ¿Para qué nos será útil este resultado?? Veamos.

Ejemplo 1: Efectúe la siguiente resta utilizando la descomposición de los números como potencias de 10.

$$\begin{array}{r} 39 - \\ 16 \\ \hline \end{array}$$
 Expresándola tanto el minuendo como el sustraendo como sumas de potencias de 10 y efectuando la operación indicada tendríamos:

$$\begin{array}{r} 30 + 9 \\ 10 + 6 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{r} 30 + 9 \\ 10 + 6 \\ \hline 20 + 3 \end{array} = \begin{array}{r} 30 + 9 \\ 10 + 6 \\ \hline 23 \end{array}$$

Es decir, 9 menos 6 igual 3 y treinta menos 10 igual 20.

Realicemos un segundo ejemplo.

Ejemplo 2: Realice la siguiente resta utilizando la descomposición de los números como suma de potencias de 10.

$$\begin{array}{r} 32 - \\ 16 \\ \hline \end{array} \quad \text{veamos,} \quad \begin{array}{r} 30 + 2 - \\ 10 + 6 \\ \hline \end{array}$$

Efectuando la resta término a término tendría 2 unidades menos 6 unidades. De hecho esto no es posible en el conjunto de números cardinales ¿Qué hacer? Pues utilicemos la propiedad desarrollada anteriormente: expresemos 32 como $20+10+2$, es decir como $20+12$ y realicemos ahora la resta indicada:

$$\begin{array}{r} 20 + 12 - \\ \hline \end{array}$$

$$10 + 6$$

$$10+6$$

12 unidades menos 6 unidades nos da 6 unidades, y 20 unidades menos 10 unidades nos da 10 unidades; luego, el resultado será $10+6 = 16$. ¿Qué hicimos? Hicimos lo que en lenguaje común se ha generalizado con el término de "pedir prestado" ¿Qué, es, entonces pedir prestado? No es otra cosa que trasladar, cuando sea necesario, una decena al "lugar" de las unidades o una centena al "lugar" de las decenas y así sucesivamente. Este procedimiento se hace necesario cuando la cifra del minuendo sea menor que la cifra del sustraendo. Veamos un ejemplo más aleccionador.

Ejemplo 3: Efectúe la siguiente resta utilizando la descomposición del número en sumas de potencias de 10.

$$431 -$$

$$392$$

Expresando la resta como potencias de 10 tenemos que

$$400 + 30 + 1 -$$

$$300 + 90 + 2$$

Efectuando la resta término a término tendríamos "1 unidad menos 2 unidades" no es posible en nuestro caso ¿Qué hacer? "Pidámole prestado" una decena a las decenas. En otros términos, expresemos 431 de otra forma ¿Cómo? Pues $431 = 400 + 20 + 11$ y ahora tendríamos:

$$400 + 20 + 11 -$$

$$300 + 90 + 2$$

9

¿Por qué 9? Pues 11 unidades menos 2 unidades nos da 9 unidades. Sigamos restando término a término, tendríamos 20 unidades menos 90 unidades; de hecho en nuestro conjunto de números cardinales esta operación no es posible. ¿Qué hacer? Pues procedamos de igual forma que en el caso anterior: "pidámole prestado" una centena a las centenas es decir expresemos el número 431 como $300+120+11$ y entonces tendríamos

$$300 + 120 + 11 -$$

$$\begin{array}{r} 300 + 90 + 2 \\ \hline 0 + 30 + 9 \end{array}$$

¿Por qué ese resultado? Veamos: 11 menos 2 igual 9, 120 menos 90 igual 30 y 300 menos 300 igual 0. Resultado final de la resta propuesta: $30 + 9 = 39$.

Es fácil explicar, entonces, qué significa "pedir prestado".

Un último ejemplo.

Ejemplo 4: Efectúe la resta siguiente utilizando la descomposición de los números como suma de potencias de 10.

$$\begin{array}{r} 2000 - \\ 625 \\ \hline \end{array}$$

Expresemos primero los números como sumas de potencias de 10, esto es,

$$\begin{array}{r} 2000 + 0 + 0 + 0 - \\ 600 + 20 + 5 \\ \hline \end{array}$$

Ahora veamos: cero menos cinco no es posible en nuestro caso, "Pedimos prestado" a las decenas", pero tenemos cero decenas; luego, las decenas no pueden "prestar": Acudimos, entonces, a las centenas. Pero de nuevo tenemos cero centenas, es decir, las centenas no nos pueden "prestar". Parece que el problema es serio. ¿Qué hacer? Bueno, solicitamos un "préstamo" a las unidades de millar, éstas sí tienen unidades para "prestar", pues hay 2 unidades de millar (2 mil unidades). ¿Cómo procedemos? Trasladamos una unidad de millar al "lugar" de las centenas. Luego, tendremos expresado el número 2000 como: $2000 = 1000 + 1000 + 00 + 0$ (poner tantos ceros depende de si son unidades, decenas o centenas, para más claridad).

¿Cómo continuar? Ahora, de las 10 centenas "prestadas" por las unidades de millar solicitamos una centena "prestada" para el campo de las decenas. Entonces, el número 2000 se expresaría como: $1000 + 1000 + 900 + 100 + 0$

Ahora por último, solicitamos de las 10 decenas (100 unidades) una decena "prestada" para el campo de las unidades. Entonces tendríamos el número 2000 expresado como:

$$2000 + 1000 + 900 + 90 + 10.$$

Volvamos ahora a nuestra resta, expresando el número 2000 como lo hemos logrado

expresar a través de los "préstamos" anteriores.

$$\begin{array}{r}
 2000 - 1000 + 900 + 90 + 10 - \\
 625 \quad 600 + 20 + 5 \\
 \hline
 1000 + 300 + 70 + 5
 \end{array}$$

Restemos ahora:

10 unidades menos 5, igual 5. Esto explica la común expresión de "a cero no le puedo quitar cinco, entonces digo 10 menos 5 igual 5". Continuemos: 90 unidades menos 20 quedan 70 unidades. Esto explica la común expresión "a cero no le puedo quitar dos." Entonces decimos "a nueve le quito seis me da tres". Ahora, 900 unidades menos 600 unidades me quedan 300 unidades, a mil unidades le quito 0, me quedan mil. Resultado final $1000+300+70+5$, es decir, 1375.

En resumen, de lo que se trata es de expresar el número 2000 de una manera conveniente, trasladando en nuestro ejemplo 1000 unidades (10 centenas) al "lugar" de las centenas, decenas y unidades. ¿Pedir prestado? Se ha utilizado ese lenguaje durante muchos años. Para finalizar, explicaremos, justificando cada paso la resta anteriormente resuelta sin acudir a la descomposición de los números como sumas de potencias de 10.

$$\begin{array}{r}
 2000 - \\
 625 \\
 \hline
 375
 \end{array}$$

¿Cómo la resolvemos? Veamos. "10 menos 5 igual 5". Esto porque del millar hemos trasladado 1 decena al lugar de las unidades. Ahora, "9 menos 2 igual 7" ¿Porqué? Esto es porque de la centena trasladada al lugar de las decenas (10 decenas) habíamos trasladado una decena, precisamente al lugar de las unidades. Por lo tanto, quedaban 9 decenas (90 unidades). Se acostumbra a decir también, en estos casos, que "como pidió prestado una decena quedan 9". Ahora "nueve menos seis" quedan 3. La razón es la misma pues, del millar se trasladó una centena. Luego: quedaron 9 centenas: Por último a 1 "le quito cero igual 1," ya que de las 2 unidades de millar solo queda 1, pues la otra fue "prestada" a las centenas, decenas y unidades.

Como observación final, es importante expresar que los contenidos expuestos en estos últimos apartados pretenden, por medio de un procedimiento un poco largo pero de gran sencillez brindar las herramientas para poder explicar de mejor forma sobre todo la operación resta o sustracción, que por lo general, presenta algunos problemas. Queda a criterio de cada educador si practica el procedimiento aquí desarrollado con sus estudiantes, o simplemente lo utiliza para lograr una comprensión mayor de los "secretos"

de la aritmética.

Números expresados en notación fraccionaria. Conceptos básicos y operatoria

Los números expresados en notación fraccionaria presentan a veces cierta dificultad para su enseñanza. Es muy común encontrar definiciones del concepto de fracción como una parte de la unidad, como si no existieran números expresados como fracciones que son mayores que la unidad, ($3/2$, por ejemplo). Desarrollaremos en este apartado los conceptos fundamentales acerca de las fracciones, algunas de sus propiedades, aplicaciones y su operatoria, trabajaremos, por comodidad, solo con fracciones positivas. Se brindan al educador algunas recomendaciones metodológicas para la introducción de los conceptos básicos a niños y de la escuela primaria. No se da un desarrollo por actividades de aprendizaje como en la primera parte de este folleto. Dejamos al educador crear, innovar actividades junto con los estudiantes, para que la enseñanza de los temas que a continuación desarrollaremos resulte más provechosa.

Fracción:

Como acabamos de apuntar, es común encontrar, como definición de fracción, una parte de la unidad. Claro que esta es una forma incorrecta de definirla. Es importante tener claro que un número puede expresarse de distintas formas o notaciones. El número cardinal "cuatro" por ejemplo, escrito en notación decimal se representa por 4; pero este mismo número se puede escribir o expresar en notación radical como $\sqrt{16}=4$, y en notación potencial como 2^2 . En notación logarítmica como $\log_2 16$, y en notación fraccionaria como $8/2$, y en "notación romana" como IV. Obsérvese que hemos denotado el número cardinal cuatro de seis formas diferentes; todas representan al número "cuatro" en distinta notación.

Diremos que un número está expresado en notación fraccionaria si es de la forma a/b , donde a es un número cardinal, b un número cardinal diferente de cero. El símbolo a/b se llama fracción. Una fracción es entonces otra forma de denotar un número. En el símbolo a/b , a se llama numerador, b se llama denominador y la línea que los divide línea fraccionaria.

Surge ahora unas interesantes preguntas ¿Los números cardinales y las fracciones son lo mismo? ¿Qué relación existe entre ellos? La respuesta es simple todo número cardinal se puede expresar en notación fraccionaria, es decir por medio de fracciones. Además, hay fracciones que no son números cardinales, Veamos. ¿Cómo escribo o expreso el número cardinal 3 por medio de una fracción? De la forma siguiente: $3=3/1$ ó $3=6/2$ ó $3=9/3$ ó $3=27/9$, etc.

Nótese que no solo es posible expresar el número 3 por medio de una fracción, sino que hay muchas fracciones diferentes para representar el mismo número 3.

Es posible deducir del ejemplo anterior que es suficiente agregar a todo número cardinal una línea fraccionaria y un denominador igual a la unidad para tenerlo expresado como una fracción.

Se dijo anteriormente que hay fracciones que no corresponden a números cardinales; este es el caso de $1/2$, $2/3$, $4/5$, $7/8$, etc. Estos números no cardinales pertenecen a otra categoría de números que podríamos llamar no enteros. ¿Qué sentido tienen estos nuevos números? ¿Por qué son necesarios? Una razón entre otras, es el hecho de que las cosas u objetos de la naturaleza no siempre son enteras: hay fenómenos naturales que se expresan por medio de números no enteros. Para citar solo algunos, la fuerza de gravedad terrestre viene dada aproximadamente por $8/10$ m/seg. La razón entre el diámetro de un círculo y su circunferencia viene dada aproximadamente por $314/100$. Hay medias naranjas y $3/8$ de pulgada. En resumen, los números no cardinales (no enteros) son una realidad y una necesidad dentro de las matemáticas.

Fracciones propias

Una fracción es propia si el numerador es menor que el denominador. $1/2$, $3/7$, $5/8$, $10/35$ son ejemplos de fracciones propias.

Fracciones impropias

Una fracción es impropia si el numerador es mayor que el denominador. $5/4$, $7/3$, $6/2$, $8/3$ son ejemplos de fracciones impropias.

Fracciones unitarias

Una fracción es unitaria si el numerador es igual al denominador. $3/3$, $7/7$, $2/2$, $4/4$ son ejemplos de fracciones unitarias.

De las definiciones anteriores se deduce que las fracciones propias denotan números menores que la unidad, las fracciones impropias denotan números mayores que la unidad y las fracciones unitarias, como su nombre lo indica, denotan la unidad.

Consideramos que es oportuno en este momento decir que un número expresado en notación fraccionaria puede ser fácilmente expresado en notación decimal; basta efectuar una división o cociente tomando como dividendo el numerador y como divisor el denominador.

Ejemplo 1: Expresar el número $5/4$, dado en notación fraccionaria, en notación decimal. Dividimos 5 por 4 y obtenemos $5 : 4 = 1.25$, es decir, el número 1,25 expresado en notación

decimal corresponde al número $5/4$ denotado en notación fraccionaria.

Ejemplo 2: Exprese en notación decimal el número $2/7$ dado en notación fraccionaria.

Procederemos a efectuar una división aritmética tomando el numerador como dividendo y el denominador como divisor, así:

$$20:7 = 2,28571428$$

Nótese que en este caso se obtiene una expansión decimal infinita periódica, es decir los decimales se repiten a partir del 4 infinitamente. Utilizamos una raya sobre la expresión decimal para indicar precisamente la periodicidad infinita de los decimales.

$$\text{Luego: } \frac{2}{7} = 0.\overline{285714}$$

Los dos ejemplos anteriores no deben confundirnos e identificar las fracciones o, más bien, los números expresados en notación fraccionaria, con la operación cociente o división. Lo que debe quedar claro es que para pasar de una notación a otra se utiliza la operación cociente; no es exactamente lo mismo $2/3$ que $2:3$, aunque representen al final el mismo número.

Hay dos procesos que son posibles de efectuar cuando un número está expresado en notación fraccionaria. Estos procesos son la ampliación y la simplificación de la fracción.

Podríamos decir que una o más fracciones son una ampliación de otra fracción si resultan de multiplicar por el mismo número el numerador y el denominador de esa fracción.

Inversamente, diremos que una o más fracciones son una simplificación de otra fracción si son el resultado de dividir por el mismo número el numerador y el denominador de esa fracción.

Ejemplo 1: Determine cinco fracciones que sean una ampliación de la fracción $3/2$.

Aplicamos el procedimiento para determinar fracciones que sean una ampliación de otra, esto es, multiplicar tanto el numerador como el denominador de la fracción dada por el mismo número cardinal. Entonces, multiplicando 3 y 2 por 5 obtenemos la fracción $15/10$, que es una ampliación de $3/2$. Si multiplicamos 3 y 2 por 7 obtendremos $21/14$ que es una ampliación de $3/2$. Si multiplicamos 3 y 2 por 50 obtenemos $150/100$, que es una ampliación de $3/2$. Este procedimiento es posible continuarlo infinitamente; por lo tanto, hay un número infinito de fracciones que son la ampliación de otra fracción. Son entonces cinco fracciones ampliadas de la fracción $3/2$, $5/10$, $9/6$, $21/14$, $150/100$, $6/4$, etc.

Ejemplo 2: Determine cinco fracciones que sean simplificaciones de la fracción $90/30$. Procedemos a dividir el numerador y el denominador de la fracción por el mismo número,

es decir, por divisores comunes. Dividiendo 90 y 30 por 2 obtenemos $45/15$; dividiendo 90 y 30 por 3 obtenemos $30/10$; dividiendo 90 y 30 por 10 obtenemos $9/3$; dividiendo 90 y 30 por 5 obtenemos $18/6$; dividiendo 90 y 30 por 30 obtenemos $3/1$, que viene a ser la fracción más simple posible. Luego, $45/15$, $30/10$, $9/3$, $18/6$, $3/1$ son fracciones simplificadas de la fracción $90/30$.

Fracción canónica

Una fracción que ya no pueda simplificarse más se llama fracción canónica es decir, cuando el denominador y el numerador son primos relativos (solo tienen como divisor común la unidad). Si tomamos todas las fracciones que son la ampliación de una misma fracción como una clase, la fracción canónica sería una buena representante de la clase. A este representante se le puede llamar número racional. No desarrollaremos aquí el conjunto de números racionales por no ser parte de los objetivos de este folleto, pero el educador recordará que tanto los números enteros (cardinales, y enteros negativos) como las fracciones canónicas (negativas y positivas) integran el conjunto de números racionales.

Fracciones equivalentes

Es este un buen momento para definir lo que son fracciones equivalentes. Diremos que dos o más fracciones son equivalentes si son una ampliación o una simplificación de una misma fracción. En nuestros ejemplos anteriores las fracciones $3/2$, $5/10$, $9/6$, $21/14$, $150/100$ y $6/4$ son fracciones equivalentes, pues todas son una ampliación de la misma fracción. Similarmente $45/15$, $30/10$, $9/3$, $18/6$, $3/1$ son fracciones equivalentes por ser simplificaciones de la misma fracción.

Una propiedad que se deduce inmediatamente de la definición de fracciones equivalentes es el hecho de que el producto del numerador de una de ellas (primera) por el denominador de la otra (segunda) es siempre igual al producto del denominador de la primera por el numerador de la segunda. Obsérvese que $3/2$ y $5/10$ cumplen que $3 \times 10 = 2 \times 5$. $3/2$ y $150/100$ cumplen que $3 \times 100 = 2 \times 150$. Esta propiedad distingue a las fracciones equivalentes. Utilizaremos el signo \sim para denotar que dos o más fracciones son equivalentes. Podemos escribir la propiedad anterior en forma general expresando que

$a/b \sim c/d$ si y solo si $a \cdot d = b \cdot c$.

Fracciones iguales

Diremos que dos o más fracciones son iguales si tienen el mismo numerador y el mismo denominador, ($4/3 = 4/3$). Obsérvese que dos fracciones iguales son equivalentes. Simbólicamente podemos expresar la propiedad anterior de la siguiente manera $a/b = c/d$

si y solo si $a=c$ y $b=d$

Fracciones homogéneas

Diremos que dos o más fracciones son homogéneas si tienen igual denominador; $2/3$, $1/3$, $4/3$ y $9/3$ son ejemplos de fracciones homogéneas.

Fracciones heterogéneas

Diremos que dos o más fracciones son heterogéneas si tienen diferente denominador. $3/7$, $5/8$, $1/3$, $1/2$ son ejemplos de fracciones heterogéneas.

Las cuatro operaciones aritméticas con números expresados en notación fraccionaria

Suma y resta:

Por comodidad, hablaremos de ahora en adelante de suma de fracciones o resta de fracciones para indicar que estamos sumando o restando números expresados en notación fraccionaria. Este cuidado en el lenguaje es necesario, puesto que a veces el mal uso de éste conduce a errores de contenido que pueden resultar inconvenientes.

Antes de introducir los algoritmos o procedimientos para operar con fracciones, utilizaremos un recurso didáctico que nos va a permitir observar, descubrir el fundamento de la suma y resta de fracciones.

Representación gráfica de una fracción

Utilizaremos círculos y partes iguales del círculo para representar las fracciones. Obviamente, si lo que se quiere representar es una fracción propia (que expresa números menores que la unidad) es suficiente con un círculo o, más bien, con partes de un círculo. Si se quiere representar la fracción unitaria es necesario el círculo completo. Si, por otro lado, se quiere representar las fracciones impropias (que expresan números mayores que la unidad) necesitaremos varios círculos. En resumen, cada círculo de igual tamaño representa una unidad. La condición de que cada círculo tenga igual tamaño es fundamental, puesto que si hablamos de $4/3$ (cuatro tercios) nos estamos refiriendo a una unidad, $3/3$ más $1/3$ de otra unidad; por lo tanto, $4/3$ tiene sentido (por lo menos dentro del enfoque que se da a las fracciones en nuestra escuela primaria) si se parte del principio de unidades de la misma clase, de la misma dimensión. Para aclarar mejor esta

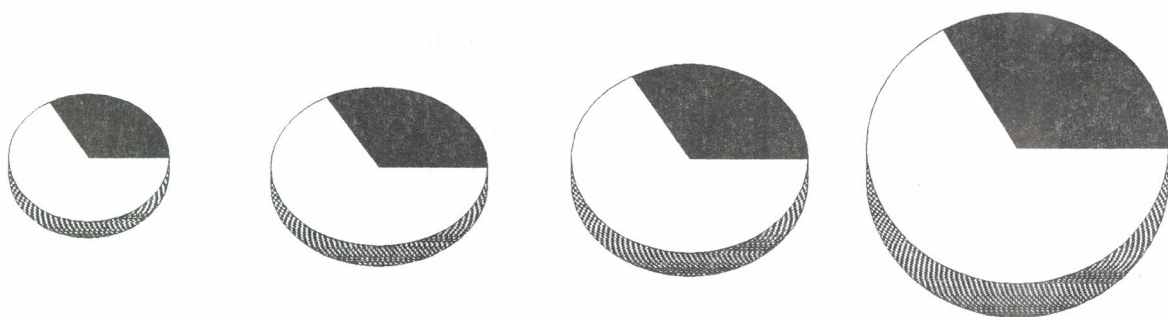
explicación pondremos el siguiente ejemplo: dos tercios de una naranja y dos tercios de la tierra (dos terceras partes) no podrían sumarse como cuatro tercios, por cuanto no representan tercios de unidades iguales (una discusión acerca de la igualdad de unidades podría ser interesante en el campo de la filosofía de la matemática).

Gráficamente es posible observar mejor la necesidad de la igualdad en las unidades. Veámos.

En cada uno de los círculos anteriores la parte sombreada representa una tercera parte de su área o superficie, es decir, $1/3$. Como es posible notar con facilidad, cada tercio representa una parte mayor de área conforme aumenta la unidad ¿Qué se mantiene constante en todos los casos? Lo constante en cada caso es el hecho de que cada parte sombreada está contenida, cabe exactamente, tres veces en su círculo. ¿Tendría sentido sumar las cuatro partes sombreadas y expresar que corresponden a $4/3$? De hecho los $4/3$ obtenidos no representan, no expresan tres tercios más un tercio ($3/3 + 1/3$), pues obedece a unidades de distinta magnitud.

Suma y resta de fracciones representantes mediante partes del círculo o círculos.

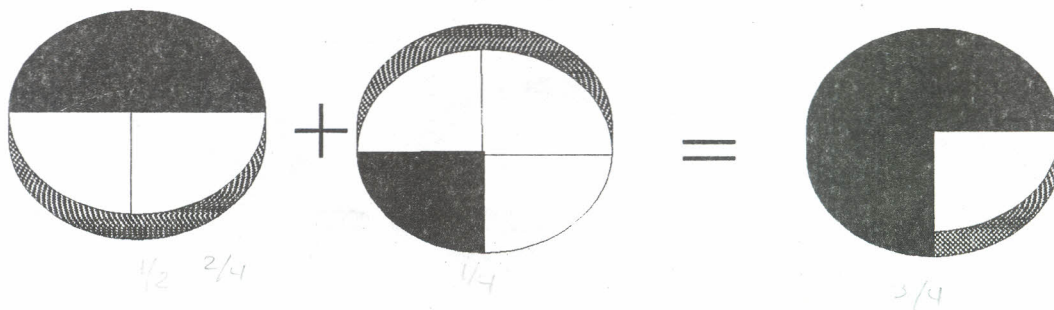
Utilizaremos la representación circular de las fracciones para empezar a introducir la suma y resta de fracciones; esto por la riqueza metodológica que ello encierra. Veamos:



Ejemplo 1: Efectúe la suma de las partes sombreadas en cada caso.



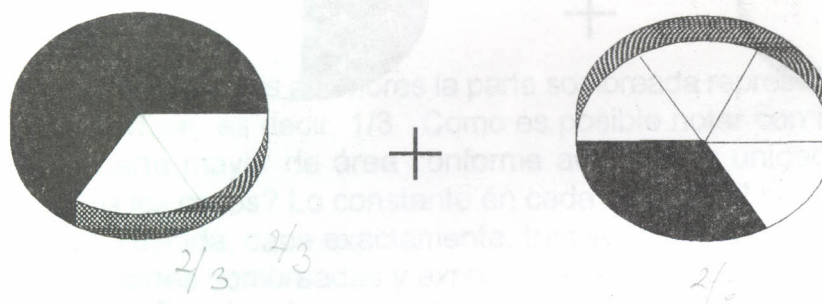
En primer lugar consideramos que las dos unidades son iguales. Con esto superamos una primera dificultad. La segunda dificultad que se presenta radica en que una unidad está dividida en 2 partes, es decir, mitades o medios y la otra unidad está dividida en cuatro partes, es decir, en cuartos ¿Qué hacer? ¿Puedo sumar mitades con cuartos partes? No. Pero la solución a esta dificultad es elemental, vamos a expresar la unidad dividida en mitades en cuartos partes, como se aprecia en el dibujo siguiente.



Ahora tenemos unidades divididas en cuartos partes iguales ¿Cuántas cuartos partes hay? Pues 3 cuartos partes, es decir, hemos sumado un medio más un cuarto y el resultado es tres cuartos ¿Por qué? ¿Qué se logró con la división de la media unidad en cuatro partes? Logramos expresar un medio como dos cuartos. Si se observa el dibujo después de la división se notará que la mitad sombreada es ahora dos cuartos y, por lo tanto, dos cuartos más un cuarto es igual a tres cuartos. Si se analiza con cuidado se notará que logramos expresar un medio como dos cuartos, es decir, logramos expresar las fracciones dibujadas como fracciones con igual denominador, como fracciones homogéneas. Si utilizamos la notación fraccionaria tendríamos que el ejemplo anterior se puede expresar como $1/2 + 1/4 = 2/4 + 1/4 = 3/4$. Obsérvese que el hecho de dividir las mitades en cuartos partes (en dos partes cada una) es equivalente al proceso algebraico de sacar

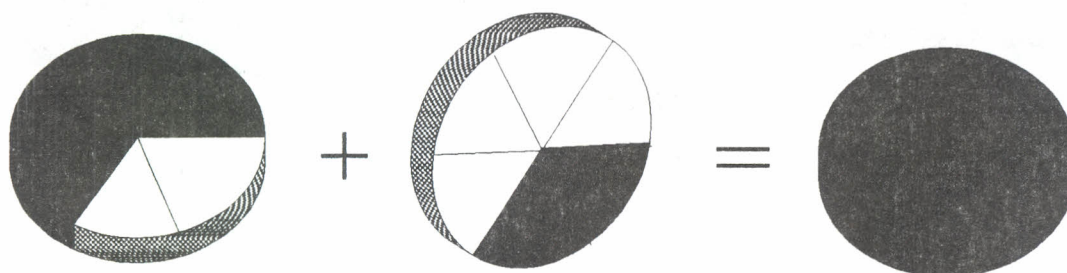
un denominador común. Este denominador común es necesario, pues solo es posible sumar partes iguales, es decir, fracciones expresadas en forma homogénea.

Ejemplo 2:



Efectúe la suma de las partes sombreadas en cada caso.

Razonando, como en el ejemplo anterior, los dibujos expresan dos tercios más dos sextos. De hecho, no es posible efectuar la suma puesto que se tienen partes de diferente tamaño; tercios por un lado y sextos por el otro. ¿Qué hacer?. Expresamos los tercios en sextos; esto se logra dividiendo cada tercio en dos partes como lo indica el dibujo siguiente.

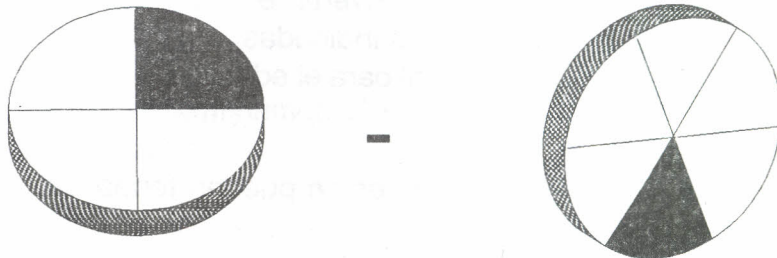


Tenemos ahora que hemos expresado los tercios en sextos, dos tercios equivalen a cuatro sextos. Ahora podemos sumarlos: dos tercios más dos sextos igual a cuatro sextos más dos sextos igual a seis sextos, es decir, la unidad.

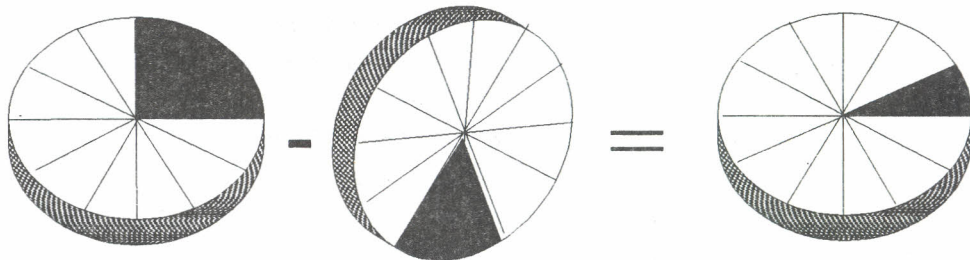
¿Qué hemos logrado? Hemos logrado "homogeneizar" (expresar con igual denominador) las fracciones. Utilizando la notación fraccionaria tendríamos:

$$2/3 + 2/6 = 4/6 + 2/6 = 6/6 = 1.$$

Ejemplo 3: Efectúe la resta de las partes sombreadas en cada caso.



Veamos: Tenemos un cuarto menos un sexto. Obsérvese que no es posible, como en los ejemplos anteriores, expresar cuartos en sextos ni sextos en cuartos. ¿Cómo proceder en este caso? Vamos a expresar tanto los cuartos como los sextos en partes iguales. ¿Cuáles serán estas partes?. Pues en doceavos, ¿por qué en doceavos? Porque doce es el mínimo múltiplo común de seis y cuatro, y este será nuestro denominador común. Dividiremos cada cuarto en tres partes y cada sexto en dos partes, como en el dibujo siguiente.



¿Qué hemos logrado? Hemos expresado un cuarto como tres doceavos y un sexto como dos doceavos. ¿Qué procede ahora? Simplemente realizamos la resta tres doceavos menos dos doceavos igual un doceavo. Utilizando la notación fraccionaria, lo anterior podría expresarse como:

$$1/4 - 1/6 = 3/12 - 2/12 = 1/12.$$

Algunas conclusiones importantes del procedimiento de sumar o restar fracciones utilizando su dibujo o diagrama son las siguientes.

- 1- Se percibe con más claridad la operación por realizar.
- 2- Representa un proceso anterior a la formalización algebraica.
- 3- Expresa con claridad la necesidad de convertir en fracciones homogéneas las fracciones dadas, para realizar las operaciones indicadas.
- 4- Resulta un procedimiento didácticamente útil para el educador y de gran sencillez para los alumnos.

Una vez realizadas las actividades anteriores se pueden formalizar a un nivel más abstracto las operaciones de suma y resta.

Suma y resta de fracciones

Para sumar o restar fracciones, éstas deben expresarse en forma homogénea. Una vez logrado esto se suman o restan los numeradores y se conserva el denominador.

¿Cómo proceder con la suma o resta de fracciones sin los diagramas?

Ejemplo 1: Efectúe la siguiente suma de fracciones.

$$2/3 + 1/6.$$

En primer lugar, no son homogéneas. Entonces lo primero que debemos lograr es expresarlas en forma homogénea (lo equivalente a dividir las partes sombreadas en el procedimiento anterior). Esto se logra de una manera muy simple en este caso, pues efectúo una ampliación de la fracción $2/3$ para que tenga denominador 6. ¿Cómo se logrará? Multiplicando tanto numerador como denominador por 2 : $2/3$ es equivalente a $4/6$.

$$\text{Ahora tenemos } 2/3 + 1/6 = 4/6 + 1/6 = 5/6.$$

Es posible seguir también el procedimiento de determinar el mínimo múltiplo común y utilizarlo como denominador común de las fracciones dadas:

$$2/3 + 1/6 \quad \begin{array}{r|l} 3 & 6 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \\ 3 \\ 3 \end{array} \quad \text{m.m.c} = 6$$

Ahora se procede de la siguiente manera, se divide el m.m.c. (o el denominador común) por cada uno de los denominadores de las fracciones dadas y se multiplica por el numerador así: $2/3 + 1/6 = 4+1/6 = 5/6$.

Nótese que $4 + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} + \frac{1}{6}$, es decir, lo que se logra con este procedimiento es "homogeneizar", expresar las fracciones con igual denominador.

Ejemplo 2: Efectúe la siguiente suma de fracciones.

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} :$$

En primer lugar determinamos el mínimo común múltiplo que utilizaremos como denominador común, así:

$$\begin{array}{r|l} 4 & 2 \\ 5 & 2 \\ 6 & 3 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 1 \end{array}$$

$$\text{m.m.c.} = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 = 60.$$

Luego el común denominador de todas las fracciones será 60 (lo equivalente en el proceso de diagramas a dividir cada círculo en 60 partes iguales).

Ahora procedemos a "homogeneizar"

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{45}{60} + \frac{12}{60} + \frac{10}{60} = \frac{67}{60}$$

Observe que

$$\frac{45 + 12 + 10}{60}$$

se puede expresar como $\frac{45}{60} + \frac{12}{60} + \frac{10}{60}$; es decir, una ampliación de todas las fracciones dadas, hasta lograr que sean homogéneas.

Producto y cociente de números expresados en notación fraccionaria

Dado que estas dos operaciones no presentan mayor dificultad, dejaremos al educador la tarea de buscar recursos metodológicos apropiados para su enseñanza. Procederemos en este folleto únicamente a definir con claridad cómo efectuar la operatoria indicada.

Para multiplicar fracciones se multiplican los denominadores de las fracciones dadas y obtenemos el denominador del producto y se multiplican los numeradores de las fracciones dadas y obtenemos el numerador del producto.

Ejemplo 1: Efectúe la siguiente multiplicación:

$3/4 \cdot 5/3$ se convertirá en $3 \cdot 5 = 15$ y $4 \cdot 3 = 12$

Luego, $3/4 \cdot 5/3 = 15/12$. Simplificando el resultado obtenido se tiene que $3/4 \cdot 5/3 = 15/12 = 5/4$.

Ejemplo 2: Efectúe el siguiente producto de fracciones

$2/7 \cdot 3/5 \cdot 4/3$, tendremos que $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ y $7 \cdot 5 \cdot 3 = 105$

Luego $2/7 \cdot 3/5 \cdot 4/3 = \frac{24}{105}$

Para dividir fracciones se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y así obtenemos el numerador del cociente, luego se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción y se obtiene el denominador del cociente. Simbólicamente si a/b y c/d representan dos fracciones cualesquiera entonces

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Ejemplo 1: Efectúe la siguiente división de fracciones:

$3/4 : 5/7$.

Aplicando el procedimiento indicado tenemos que

$$3/4 : 5/7 = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} = \frac{21}{20}$$

Otro procedimiento utilizado es expresar el cociente como una "fracción compuesta o compleja" y proceder a multiplicar los extremos de la fracción para obtener el numerador y los medios para obtener el denominador.

La división anterior $3/4 : 5/7$ se expresaría como

$$\frac{\frac{3}{4}}{\frac{5}{7}} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5}$$

Razones, proporciones y porcentajes:

Una vez desarrollados los temas sobre fracciones y su operatoria, es un buen momento para introducir los conceptos de razón proporción y porcentaje. Estos temas se estudiarán en grados intermedios de la educación escolar. El estudiante dispone ya de ciertos conocimientos previos que el maestro debe aprovechar. El concepto de fracción y sus propiedades son conocimientos muy útiles para introducir las razones. Es importante tener en cuenta que los números se utilizan en lo fundamental para expresar magnitudes, cantidades. De esa manera, el número 15, puede representar la edad de una estudiante, el costo de un artículo o la medida de un árbol. La comparación de números que representan cantidades o magnitudes es de gran importancia en la matemática.

Llamaremos razón a la comparación de dos cantidades por medio del cociente. ¿Qué significado tiene el resultado de una razón? El siguiente ejemplo responderá a esa interrogante.

Ejemplo 1

.La distancia de San Ramón a Palmares es de 6Km. aproximadamente. La distancia de San Ramón a Puntarenas es de 60Km. Efectúe la razón de esas dos cantidades e interprete el resultado.

Si realizamos el cociente de 60 y 6 obtenemos $60/6=10$. Esto es, 60 es 10 veces 6, 60 contiene a 6 diez veces. En el lenguaje de nuestro problema, significa que la distancia de San Ramón a Puntarenas es 10 veces más que la distancia de San Ramón a Palmares. La razón entre 6 y 60 que viene dada por $6/60=0.1$ ¿Qué significa este resultado? Significa que 6 es la décima parte de 60. En nuestro problema significa que la distancia de San Ramón a Palmares es la décima parte de la distancia de San Ramón a Puntarenas. La razón de dos cantidades expresa, entonces, el número de veces que una de ellas contiene o está contenida en la otra cantidad o qué parte es una de otra.

Ejemplo 2

En el aula de nuestra escuela hay 20 estudiantes mujeres y 16 varones. Determine la razón en que se encuentran los varones con respecto a las mujeres? Interprete el resultado.

La razón de mujeres con respecto a los hombres viene dado por $16/20=0.8$ ¿Cómo se interpreta este resultado? Significa que 16 es 0.8 veces 20, esto es, 16 está contenido en 20 0.8 veces. En nuestro problema 0.8 debe interpretarse como que hay ocho varones por

cada 10 mujeres. Es decir, la razón en que se encuentran los varones con respecto a las mujeres es de 8 a 10.

Como se puede notar, una razón es un cociente, es una expresión fraccionaria. La razón entre dos cantidades **a** y **b** se puede expresar como $\frac{a}{b}$ ó **a:b** que se lee **a** sobre **b** ó **a** es a **b**. Los términos **a** y **b** se llaman antecedente y consecuente respectivamente.

Proporciones

Se llama proporción a la igualdad de dos razones. Si **a**, **b**, **c**, y **d** son cantidades entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción. La expresión anterior puede escribirse también como **a:b::c:d** y se lee "a es a b como c es a d"

Ejemplo 1:

La razón en que está 3 y 5 es la misma razón en que se encuentran 15 y 25. Obsérvese que $\frac{3}{5}$ es equivalente a $\frac{15}{25}$. Es decir, $\frac{15}{25}$ es una ampliación de $\frac{3}{5}$.

Ejemplo 2:

Determine un número que esté con doce en la misma razón que están 6 y 9. Habrá que determinar un número **x** tal que $x:12::6:9$ ó sea $\frac{x}{12} = \frac{6}{9}$. Por la propiedad de fracciones equivalentes se tiene que $9 \cdot x = 12 \cdot 6$ esto es $9 \cdot x = 72$ luego $x = \frac{72}{9} = 8$. El número buscado es 8.

Ejemplo 3:

En una granja la razón entre el número de gallinas y gallos es de cinco a uno. Determine el número de patas que hay en la granja si están en la misma razón con respecto a los patos que la de gallinas a gallos. Se sabe además que hay 60 patos.

Se debe cumplir que $5:1::x:60$ donde **x** es el número de patas.

Tenemos entonces que $5 \cdot 60 = x \cdot 1$ de donde se tiene que $x = 300$. El número de patas en la granja es de 300.

Porcentajes:

Hemos visto que las razones sirven para comparar cantidades. Sería muy útil tener un modelo de referencia, una cantidad base, para comparar cualquier otra cantidad con respecto a ella. Este modelo de referencia existe y se llama porcentaje.

Llamaremos porcentaje (tanto de cien, o tanto por ciento) a una razón cuyo consecuente es siempre cien.

Ejemplo 1:

La razón $\frac{2}{100}$ significa "dos de cada cien", "dos por ciento". Se puede expresar también como un porcentaje; esto es : 2%.

Ejemplo 2:

Si en una escuela se dice que la razón de estudiantes promovidos es de 75 : 100 (setenta y cinco es a cien). Esto significa que han ganado el año setenta y cinco estudiantes de cada cien, es decir : un 75% (un 75 por ciento).

Obsérvese que una razón está expresada como una fracción. El antecedente de la razón es el numerador de la fracción, el consecuente de la razón es el denominador de la fracción.

Lo anterior nos permite poder expresar una razón, en particular un porcentaje en notación decimal. Es decir, 75% equivale a $75/100 = 0,75$. ¿ Cómo interpretar 0,75 ? Debe interpretarse como 0,75 de cada unidad, es decir, tres cuartas partes de cada unidad.

El cálculo del porcentaje de cualquier cantidad se simplifica enormemente si se aplica el razonamiento expuesto en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 3:

Calcule el 20% de 300.

Resolveremos el anterior problema de dos maneras diferentes:

Primero: Utilizando proporciones, podemos expresar : $20 : 100 :: X : 300$ ó

$20/100 = X/300$. De donde se obtiene que $6000 = 100.X$, por lo tanto $X = 60$. Es decir el 20% de 300 es 60.

Segunda: El $20\% = 20/100 = 0,2$. Luego el 20% de 300 equivale a : $300 \times 0,2 = 60$.

¿Qué hicimos? Expresar el 20% en notación decimal ,es decir 0,2 (0,2 de cada unidad) y multiplicarlo por el número de unidades, (300, en este caso)

Números expresados en notación potencial. Algunas propiedades y su operatoria:

Tal y como lo señalamos en el desarrollo del tema anterior, los números pueden ser expresados de diversas maneras, mediante distintas notaciones. Al igual que la notación decimal y la notación fraccionaria, los números pueden ser expresados como potencias o, como suele llamarse, en notación potencial. Desarrollaremos en este apartado los conceptos básicos sobre potencias y algunas de sus propiedades. Nos limitaremos a estudiar las potencias cuya base y exponente son números cardinales.

El estudio de potencia más complejos como de exponente fraccionario o de base negativa no son parte de los objetivos del presente folleto.

¿Cuál es la necesidad de conocer y operar con números expresados en notación potencial? ¿Qué problemas resuelve? La respuesta a estas interrogantes es el hecho de que el desarrollo científico y técnico nos presenta, cada vez más, fenómenos naturales de proporciones gigantescas o también fenómenos de carácter infinitesimal, es decir, muy pequeños. Cuál será el tamaño de nuestra galaxia; cuál es la masa del sol, qué distancia hay entre dos átomos, cuál es la distancia entre dos células. Estas y otras interrogantes, nos exigen desarrollar una notación numérica conveniente para expresar los fenómenos apuntados.

Veamos algunos ejemplos sencillos. El número cien millones, escrito en notación decimal se expresa de la siguiente forma 100.000.000. Este mismo número escrito en notación

potencial se expresa como 10^8 , (diez elevado a la octava potencia). Como se puede apreciar la notación potencial es más simple que la decimal. Un mil millonésimo en notación decimal se escribe de la siguiente forma 0,000.000.001 este mismo número expresado en notación potencial se denota por 10^{-9} .

Potencia

Diremos que un número está expresado en notación potencial si es de la forma a^b con a y b números enteros (cardinales) no ambos ceros a la vez.

La expresión a^b se llama potencia, el número a se llama base de la potencia y el número b se llama exponente de la potencia.

Ejemplos de números expresados en notación potencial $2^3, 3^2, 5^2, 3^3, 2^5$ que denotan respectivamente, a los números 8, 9, 25, 27, 32 escritos en notación decimal.

¿Cómo se interpreta la expresión 2^3 ? Esta expresión significa que la base 2 se multiplica por ella misma tres veces, es decir, $2^3 = 2.2.2$. ¿Qué significa 2^5 ? pues $2^5 = 2.2.2.2.2$, es decir, 2 multiplicado por sí mismo cinco veces. Lo anteriormente expuesto nos conduce a darle cierto significado a cada uno de los componentes de la potencia; la base a de una potencia es el término que se multiplica por sí mismo y el exponente b de una potencia indica las veces que la base se multiplica por sí misma. Tomando en cuenta las

consideraciones anteriores, la expresión 3.3.3.3.3.3.3. se denotará por la potencia 3^7 .

En general $a.a.a.a.a \dots a$, b veces se expresará como a^b

Algunas propiedades de las potencias.

En particular la potencia con base 0 y exponente 0 no se define, es decir 0^0 no tiene sentido matemático.

La potencia a^0 se define como el número cardinal 1, es decir $a^0 = 1$ (siempre, claro, que a no sea cero).

La potencia $a^1 = a$.

Si dos o más potencias tienen igual base e igual exponente es posible sumarlas. El resultado de la suma será el número de veces que se repita la potencia.

Ejemplo 1: $2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 = 4 \times 2^3$ (cuatro veces dos a la tercera potencia).

Ejemplo 2: $5^2 + 5^2 + 5^2 = 3 \times 5^2$ (tres veces cinco elevada a la potencia 2).

Dos o más potencias se pueden multiplicar si éstas tienen la misma base. El resultado se obtiene conservando la base y sumando los exponentes.

Ejemplo 3: Multiplique $a^2 \cdot a^3 \cdot a^5$.

Según el procedimiento establecido, $a^2 \cdot a^3 \cdot a^5 = a^{10}$

Ejemplo 4: Multiplique $3^2 \cdot 3^5 \cdot 3^{10}$

Según el procedimiento establecido es igual a 3^{17}

Ejemplo 5: Efectúe la multiplicación siguiente:

$$3^2 \cdot 5^4 \cdot 7^6$$

Según el procedimiento establecido, como estas potencias no tienen igual base, no es posible aplicar el criterio para su multiplicación.

Es posible dividir potencias si éstas tienen igual base; el resultado se obtiene conservando la base de las potencias y restando los exponentes.

Ejemplo 6: Efectúe la siguiente división de potencias
 $a^6 : a^3$

Según el procedimiento establecido, $a^6 : a^3 = a^{6-3} = a^3$

Ejemplo 7: Efectúe el siguiente cociente de potencias

$$a^9 : a^2$$

Según el procedimiento establecido $a^9 : a^2 = a^{9-2} = a^7$

Si una potencia es de nuevo elevada a otro exponente, se procede de la siguiente manera: se conserva la base de la potencia y se multiplican los exponentes.

Ejemplo 8: Efectúe la operación siguiente: $(2^5)^3$

De acuerdo con lo establecido la potencia 2 a la 5 elevada al exponente tres se puede expresar como $(2^5)^3$, que es igual a $2^{3 \cdot 5} = 2^{15}$

Ejemplo 9: Efectúe la operación siguiente:

$(a^4)^6$. Según el procedimiento establecido, $(a^4)^6$ es igual a $a^{6 \cdot 4} = a^{24}$

Es importante señalar que todas las propiedades que hemos apuntado acerca de las potencias se pueden demostrar y el procedimiento de prueba no ofrece mayores dificultades. No hemos considerado necesario entrar a probar ninguna de estas propiedades, pues se trata de una introducción muy informal que tiene como único objetivo motivar al educador en este tema, y brindarle una forma sencilla de definir algunos conceptos básicos acerca de las potencias.

Bibliografía:

- Adem, José. El concepto de número. México: Depto. de Asuntos Científicos de la Unión Panamericana, 1973.
- Beawverd, B. Antes del cálculo. Argentina: Editorial Kapelusz, 1977.
- Costelhuovo, Emma. Didáctica de la matemática moderna. México: Editorial Trillas, 1975.
- Earew, Swokowski. Algebra y trigonometría con geometría analítica. Grupo Editorial Iberoamericano, 1990.
- Furth, H.G. y Wachs, H. La teoría de Piaget en la práctica. Argentina: Editorial Kapelusz, 1978.
- Góngora, Enrique. Introducción al pensamiento lógico-matemático. San José: Editorial de la Universidad Estatal a Distancia, 1979.
- Hannoun, Hubert. El niño conquista el medio. Argentina: Editorial Kapelusz, 1977.
- Krause, F. Eugene. Mathematics for Elementary Teachers. D.C. Heath and Co., 1987.
- Mates, Benson. Lógica matemática elemental. Madrid: Tecnos, 1970.
- Moserve, Bruce. Introducción a la matemática. México: Revista, 1987.
- Oviedo, Thomas. Matemática básica simplificada. México: Editorial Piana, 1973.
- Piaget, Jean. Génesis del número en el niño. Buenos Aires: Biblioteca Pedagógica, 1975.
- Potapou, M. Algebra y análisis de funciones elementales. Moscú: Editorial Mir, 1986.
- Rees, Raúl y Sparks, Freud. Algebra. México: McGraw-Hill, 1992.
- Russell, B. Introducción a la filosofía matemática. Barcelona: Ediciones Paidós, 1988.

Prefacio:

En el presente manual, se desarrolla de una manera sencilla, una posible introducción del niño preescolar y escolar al mundo del número y del cálculo aritmético. Se sugiere una serie de actividades que tienen una función didáctica bien precisa y que el educador puede desarrollar realizando las variantes que considere necesarias.

En la primera parte del manual, se plantea la introducción del concepto de número y la formalización de las cuatro operaciones aritméticas básicas. En esta parte se sugiere al educador en forma muy directa, una línea metodológica por seguir, con la participación del niño con toda su vitalidad y sus sentidos en el proceso de aprendizaje. La utilización del juego dirigido como recurso didáctico, para la adquisición de conocimientos tiene un papel preponderante.

En la segunda parte sobre fracciones y potencias, se brinda una serie de definiciones y propiedades expresadas de una manera sencilla. El educador puede desarrollar creativamente actividades con sus estudiantes para lograr una mejor comprensión de los temas por tratar.

La única pretensión del presente manual es brindar una guía a nuestros maestros que pueda resultarles útil, en su abnegada función, de forjar los hombres del próximo milenio.

J.V.

Se terminó de imprimir en la Oficina de Publicaciones de la Universidad de Costa Rica, en el mes de noviembre. Su edición consta de 100 ejemplares.

Ciudad Universitaria Rodrigo Facio
San José, Costa Rica.