CIENCIAS MATEMÁTICAS 1:1–9 (1990)

RESOLUCION DE LA ECUACION DE TERCER GRADO POR APROXIMACIONES SUCESIVAS

Winston Alarcón Athens
Escuela de Matemática, U.C.R.

Resumen. Se presenta un método numérico iterativo para encontrar las raíces reales de la ecuación de tercer grado reducida $x^3+Bx+C=0$. El método no requiere partir con un cálculo aproximado de la raíz. Las fórmulas de recurrencia se obtienen directa y elementalmente de la ecuación a resolver, por lo que el método es implementable para su enseñanza en la educación media. Hay establilidad y control del error.

Abstract. We give a numerical iterative method to find the real roots of the reduced third grade equation $x^3+Bx+C=0$. There is no need of an estimation of the root to start the iterations. The recurrence formulæ are obtained directly and in an elementary way, from de equation to be solved; this give de possibility to implement the method for is teaching at the college level. There are stability and error control.

1. Introducción. El uso generalizado de las calculadoras de bolsillo, incluso de las programables, pone al alcance de un amplio público el empleo de diversos métodos de cálculo numérico, entre los cuales destacan los métodos de iteración simple. En el presente artículo expongo un método numérico de aproximaciones sucesivas que he desarrollado para encontrar las raíces reales de la ecuación de tercer grado reducida.

$$x^3+Bx+C=0 \qquad \text{con} \quad B,C\neq 0 \tag{1}$$

(Como se sabe, toda ecuación de grado $n>2$, digamos $t^n+a_1t^{n-1}+a_2t^{n-2}+\cdots+a_n=0$, puede escribirse en la forma reducida $x^n+c_2x^{n-2}+\cdots+c_n=0$, mediante el cambio de variable $t=x-a_1/n$.)

Si bien la ecuación de tercer grado es resoluble por radicales, la fórmula a utilizar no sólo carece de la necesaria sencillez que permita su uso en la enseñanza, sino que a menudo requiere una incursión en el álgebra de los números complejos, aún en casos en que las raíces sean reales. Otros métodos populares para el cálculo numérico de este tipo de ecuaciones, como el método de Newton, exigen habitualmente partir con un valor suficientemente próximo a la raíz buscada y la respectiva fórmula de recurrencia necesita ser memorizada, o bien deducida en base a un conocimiento de temas de Cálculo. El método que proponemos, por no requerir ningún cálculo aproximado inicial y por ser sus fórmulas de recurrencia fácilmente reconstruibles a partir de la propia ecuación (1), puede ser empleado no sólo como un ejemplo introductorio a los métodos de aproximaciones sucesivas, sino que, debido a su estabilidad y razonable rapidez de convergencia, puede usarse como un método de cálculo efectivo.

2. El método. El procedimiento que proponemos es el contenido del siguiente teorema:

Teorema. Con referencia a la ecuación (1), sea $a = \sqrt{|B|/3}$ y considérense las funciones $f(x) = x^3 + Bx + C$, $g(x) = -\sqrt[3]{Bx+C}$ y $h(x) = -(x^3+C)/B$. (g se obtiene al despejar la x del término de tercer grado en la ecuación (1), mientras que h resulta del despeje de la x del término de primer grado en dicha ecuación). Entonces:

1. Si $f(a) < 0$, hay una raíz $X_1 > a$ y la siguiente sucesión definida por recurrencia:
$$x_n = \begin{cases} a & \text{si} \quad n = 0 \\ g(x_{n-1}) & \text{si} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{2}$$
converge a X_1.
2. Si $f(-a) > 0$, hay una raíz $X_2 < -a$ y la siguiente sucesión definida por recurrencia:
$$x_n = \begin{cases} -a & \text{si} \quad n = 0 \\ g(x_{n-1}) & \text{si} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{3}$$
converge a X_2.
3. Si $f(-a)f(a) < 0$, hay una raíz $-a < X_3 < a$ y la siguiente sucesión definida por recurrencia:
$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ h(x_{n-1}) & \text{si} \quad n = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{4}$$
converge a X_3.

Cuando $B > 0$, la convergencia es de aproximaciones sucesivas que se alternan por exceso y por defecto. Cuando $B < 0$ la convergencia es monótona.

3. Ejemplos. Antes de examinar la fundamentación teórica del método propuesto, veamos algunos ejemplos que ilustrarán la marcha de los cálculos.

Ejemplo 1.

$$x^3 - x - 1 = 0 \qquad a = .577350\ldots$$
$$f(-a) = -.615099\ldots < 0 \qquad f(a) = -1.3\ldots < 0$$

Hay una (única) raíz real y esa raíz es mayor que a. La marcha de los cálculos con la sucesión (2) es la siguiente:

n	x_n
0	0.577350...
1	1.164061...
2	1.293470...
3	1.318755...
4	1.323584...
5	1.324502...

n	x_n
6	1.324677...
7	1.324710...
8	1.324716...
9	1.324717...
10	1.324717...
11	1.324717...

Ejemplo 2.

$$x^3 + x - \tfrac{1}{5} = 0 \qquad a = .577350\ldots$$
$$f(-a) = -.56\ldots < 0 \qquad f(a) = .96\ldots > 0$$

Hay raíz una (única) raíz real y está entre $-a$ y a. La marcha de los cálculos con la sucesión (4) es la siguiente:

n	x_n
0	0
1	.200000...
2	.192000...
3	.192922...
4	.192819...
5	.192831...
6	.192829...
7	.192829...

Ejemplo 3.

$$x^3 - x + \tfrac{1}{5} = 0 \qquad a = .577350\ldots$$
$$f(-a) = .58\ldots > 0 \qquad f(a) = -.18\ldots < 0$$

Hay tres raíces reales $X_1 > a$, $X_2 < -a$ y $-a < X_3 < a$. La marcha de los respectivos cálculos con las sucesiones (2), (3) y (4) es la siguiente:

n	x_n
0	.577350...
1	.722628...
5	.872615...
9	.878666...
13	.878877...
17	.878884...
19	.878885...
20	.878885...

n	x_n
0	−0.577350...
1	−0.919472...
3	−1.073856...
5	−1.086904...
7	−1.087944...
9	−1.088026...
11	−1.088033...
12	−1.088033...

n	x_n
0	0
1	.200000...
2	.208000...
3	.208998...
4	.209129...
5	.209146...
6	.209148...
7	.209148...

4. Prueba del teorema.

Observando que $g(h(x)) = x = h(g(x))$ para todo $x \in \mathbb{R}$, tenemos que g y h son inversa una de la otra.

1. Supongamos $f(a) < 0$. Como f es continua y $f(x) \to \infty$ cuando $x \to \infty$, hay una raíz $X_1 > a$. Observando que las ecuaciones $f(x) = 0$, $g(x) = x$ y $h(x) = x$ son equivalentes, tenemos que

$$g(X_1) = X_1 = h(X_1) \tag{5}$$

Además tenemos:

$$|g'(x)| < 1 \iff \left|\frac{B}{3}(g(x))^{-2}\right| < 1 \iff |g(x)| > \sqrt{\frac{|B|}{3}} \iff g(x) < -a \quad \text{o} \quad g(x) > a \tag{6}$$

Observemos por otra parte que $h'(x)$ tiene el signo de $-B$, por lo que:

$$B > 0 \Longrightarrow h \text{ y } g \text{ son estrictamente decrecientes en } \mathbb{R} \tag{7}$$
$$B < 0 \Longrightarrow h \text{ y } g \text{ son estrictamente crecientes en } \mathbb{R} \tag{7'}$$

En vista de (6), (7) y (7'), y teniendo en cuenta que h es la inversa de g, tenemos:

$$B > 0 \quad \text{implica:} \quad |g'(x)| < 1 \iff x > h(-a) \quad \text{o} \quad x < h(a) \tag{8}$$
$$B < 0 \quad \text{implica:} \quad |g'(x)| < 1 \iff x < h(-a) \quad \text{o} \quad x > h(a) \tag{8'}$$

1.1. Consideremos el caso $B > 0$. Como $X_1 > a$ y h y g son estrictamente decrecientes, usando (5) obtenemos:

$$a < X_1 < h(a) \tag{9}$$
$$a < X_1 < g(a) \tag{9'}$$

Como g es estrictamente decreciente, tenemos:

$$g(g(a)) \leq g(t) \leq g(a) \quad \text{para todo } t \in [a, g(a)] \tag{10}$$

Usando un lema que posponemos para más adelante, tenemos:

$$g(a) < h(a) \tag{11}$$

Aplicando g en ambos lados de (11):

$$g(g(a)) > a \tag{12}$$

(10) y (12) permiten concluir que

$$g([a, g(a)]) \subseteq [a, g(a)] \tag{13}$$

es decir: la restricción de g al intervalo $[a, g(a)]$ es una función de $[a, g(a)]$ en $[a, g(a)]$.

Otra consecuencia de (13) es que $g''(t) = -\frac{2}{9}B^2[g(t)]^{-5} < 0$ para todo $t \in [a, g(a)]$, por lo que la derivada g' es estrictamente decreciente en $[a, g(a)]$, lo que nos permite escribir:

$$g'(g(a)) \leq g'(t) \leq g'(a) \quad \text{para todo } t \in [a, g(a)] \tag{14}$$

Pero: por (8), (9) y (11), tenemos: $|g'(a)| < 1$ y $|g'(g(a))| < 1$. Usando esto y (14), obtenemos:

$$|g'(t)| < 1 \quad \text{para todo } t \in [a, g(a)] \tag{15}$$

(13) y (15) nos permiten aplicar el principio de las aplicaciones contractivas ([**1**], [**2**]) a la función $g : [a, g(a)] \longrightarrow [a, g(a)]$, concluyendo que la sucesión (2) converge al punto fijo $X_1 \in [a, g(a)]$. Si g^m representa la composición de g consigo misma m veces, como g es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$, g^{2n} es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. Aplicando g^{2n} a la desigualdad (9'), tenemos: $g^{2n}(a) < X_1 < g^{2n+1}(a)$, lo que nos dice que la convergencia es en aproximaciones sucesivas oscilantes en torno a la raíz X_1.

Antes de continuar con los otros casos, veamos la prueba del lema.

Lema. Bajo las hipótesis del caso 1.1, se tiene: $g(a) < h(a)$.

Prueba del lema: Como $g(-C/B) = 0 < X_1 = g(X_1)$ y g es estrictamente decreciente, entonces: $X_1 < -C/B$. Usando la fórmula de Taylor ([2]), se tiene:

$$g(a) = g(X_1) + g'(X_1)(a - X_1) + \frac{g''(\theta)}{2}(a - X_1)^2\,, \quad \text{para cierto } \theta \in]a, X_1[\subseteq]a, -C/B[.$$

Se tiene: $g(t) = -\sqrt[3]{Bt + C} > 0$ para todo $t < -C/B$, $g'(t) = -\frac{B}{3}[g(t)]^{-2}$ y $g''(t) = -\frac{2}{9}B^2[g(t)]^{-5} < 0$ para todo $t < -C/B$, entonces en particular para $t = \theta$: $g''(\theta) < 0$, por lo cual:

$$g(a) < X_1 - \frac{B}{3}[X_1]^{-2}(a - X_1)$$

Por otra parte se tiene: $h(X_1) = X_1$, $h'(x) = -\frac{3}{B}x^2$, $h''(x) = -\frac{6}{B}x$, $h'''(x) = -6/B$ y $h^{(n)}(x) = 0$ para $n > 3$, por lo que el desarrollo de Taylor de h en torno a X_1 es:

$$h(x) = X_1 - \frac{3}{B}X_1^2(x - X_1) - \frac{3}{B}X_1(x - X_1)^2 - \frac{1}{B}(x - X_1)^3 \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia:

$$g(a) - h(a) < (a - X_1) \cdot \varphi(a - X_1) \tag{16}$$

donde

$$\varphi(u) = \frac{1}{B}u^2 + \frac{3}{B}X_1 u + \frac{3}{B}X_1^2 - \frac{B}{3}X_1^{-2}$$

Recordando que $a = \sqrt{B/3}$, tenemos: $B = 3a^2$ por lo que

$$\begin{aligned}
\varphi(a - X_1) &= \frac{1}{3a^2}(a - X_1)^2 + \frac{1}{a^2}X_1(a - X_1) + \frac{X_1^2}{a^2} - \frac{a^2}{X_1^2} \\
&= \frac{1}{3a^2}\Big((X_1 - a)^2 - 3X_1(X_1 - a) + \frac{3}{X_1^2}(X_1 - a)(X_1 + a)(X_1^2 + a^2)\Big) \\
&= \frac{X_1 - a}{3a^2}\Big(X_1 - a + 3a\Big(\big(\frac{a}{X_1}\big)^2 + \big(\frac{a}{X_1}\big) + 1\Big)\Big)
\end{aligned}$$

Como el discriminante del trinomio cuadrático $z^2 + z + 1$ es $1 - 4 = -3 < 0$, entonces

$$\big(\frac{a}{X_1}\big)^2 + \big(\frac{a}{X_1}\big) + 1 > 0$$

Además, como $X_1 - a > 0$, se tiene: $\varphi(a - X_1) > 0$, por lo que $(a - X_1) \cdot \varphi(a - X_1) < 0$ y por (16) obtenemos: $g(a) - h(a) < 0$, es decir: $g(a) < h(a)$, lo que termina la prueba del lema.

1.2. Consideremos el caso $B < 0$. Por (7') tenemos que g y h son estrictamente crecientes en $\mathbb{R}$. Usando esto, (5) y $X_1 > a$ obtenemos:

$$h(a) < X_1\,, \qquad g(a) < X_1 \tag{17}$$

Por otra parte, tenemos que $f'(x) = 3x^2 + B > 0$ si $x > a$. Luego f es estrictamente creciente en $[a, \infty[$ y como $f(X_1) = 0$ y $X_1 \in]a, \infty[$, tenemos que $f(a) < 0$. Luego: $-f(a)/B = -a - (a^3 + C)/B = -a + h(a) < 0$ y tenemos:

$$h(a) < a \tag{18}$$

Aplicando g a los dos lados de (18) y a la desigualdad $a < X_1$, por (17) tenemos:

$$a < g(a) < X_1 \tag{19}$$

Por otra parte, aplicando h a los dos lados de (18): $a > h(a) > h(h(a))$ y aplicando g en los dos extremos de esta última desigualdad: $g(a) > h(a)$. Luego, usando (17):

$$X_1 > h(a) \tag{20}$$

Ahora: como g es creciente, por (19) tenemos: $a \leq g(t) \leq X_1$ para todo $t \in [a, X_1]$, lo que muestra que

$$g([a, X_1]) \subseteq [a, X_1] \tag{21}$$

Una consecuencia de (21) es $g''(t) = -\frac{2}{9}B^2[g(t)]^{-5} < 0$ para todo $t \in [a, X_1]$, por lo que g' es estrictamente decreciente en $[a, X_1]$ y obtenemos la desigualdad

$$g'(X_1) \leq g'(t) \leq g'(a) \quad \text{para todo } t \in [a, X_1] \tag{22}$$

Pero: por (11), (18) y (20), tenemos: $|g'(a)| < 1$ y $|g'(X_1)| < 1$. Usando esto y (22), obtenemos la desigualdad

$$|g'(t)| < 1 \quad \text{para todo } t \in [a, X_1] \tag{23}$$

(21) y (23) nos permiten aplicar nuevamente el principio de las aplicaciones contractivas a la función $g : [a, X_1] \longrightarrow [a, X_1]$, concluyendo que la sucesión (2) converge a X_1.

2. Supongamos $f(-a) > 0$. Este caso se reduce al caso $f(a) < 0$, cambiando x por $-x$ y cambiando las funciones f, g, h por las funciones $-f$, $-g$ y $-h$ respectivamente.

3. Supongamos $f(-a)f(a) < 0$. Como f es continua, hay una raíz $X_3 \in]-a, a[$ y tenemos: $g(X_3) = X_3 = h(X_3)$. Además tenemos: $|h'(x)| < 1 \iff |x| < a$. Si tomamos a como punto de arranque para las aproximaciones sucesivas (cuando X_3 sea positivo), un análisis similar a la demostración del caso 1 permite concluir que la sucesión (x_n) definida por

$$x_n := \begin{cases} a & \text{si } n = 0 \\ h(x_{n-1}) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

converge a X_3. Y mediante el cambio de variables indicado en la prueba del caso 2 se demuestra que, cuando $X_3 < 0$, la sucesión (x_n) definida por

$$x_n := \begin{cases} -a & \text{si } n = 0 \\ h(x_{n-1}) & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

converge a X_3.

Sin embargo, en el caso 3 nos proponemos tomar como punto de arranque standard al número $x_0 = 0$, tanto si X_3 es positivo o negativo. Este pequeño cambio nos obliga a modificar radicalmente la demostración, ya que $h(0) = -C/B$ no necesariamente satisface la condición $|h(0)| < a$, lo cual nos impide usar el principio de las aplicaciones contractivas.

3.1. Consideremos primero el caso $B > 0$, $C < 0$.

Como $B > 0$, f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y la ecuación (1) posee una única raíz real, digamos X_3. Como $f(-a)$ y $f(a)$ tienen distinto signo, también tenemos $f(-a) < 0 < f(a)$. Como $f(0) = C < 0$, tenemos $f(0) < 0 < f(a)$ y por continuidad de f: $X_3 \in]0, a[$.

De $f(a) > 0$ y $-C > 0$ se obtiene: $C^2 < \frac{16}{27}B^3$. En consecuencia:

$$h(h(0)) = h(-C/B) = \frac{C^3}{B^4} - \frac{C}{B} > \Big(\frac{16}{27} - 1\Big)\frac{C}{B} > 0 \tag{24}$$

Además, como $B > 0$, h y su inversa g son estrictamente decrecientes en $\mathbb{R}$. En particular, h es estrictamente decreciente en $[0, -C/B]$, por lo que (24) permite escribir:

$$0 < h(-C/B) \leq h(t) \leq h(0) = -C/B \quad \text{para todo } t \in [0, -C/B]$$

Esto muestra que la restricción de h al intervalo $[0, -C/B]$ es una función de $[0, -C/B]$ en $[0, -C/B]$ (lamentablemente h no necesariamente es contractiva).

Como h es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$, entonces $h^2 := h \circ h$, es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$ y, en general, $h^4 = h^2 \circ h^2$, $h^6 := h^4 \circ h^2$, ..., $h^{2n} = h^{2n-2} \circ h^2$, ...son estrictamente crecientes en $\mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que $0 < X_3$, entonces $h^2(0) < h^2(X_3) = X_3$. Usando (24) se tiene: $0 < h^2(0) < X_3$ Por lo tanto:

$$0 < h^{2n}(0) < h^{2(n+1)}(0) < X_3 \quad \text{para todo } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{25}$$

Esto implica que la sucesión $(h^{2n}(0))$ converge crecientemente a cierto número real $L \in]0, X_3]$.

Además, como h es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$, usando (25) se obtiene:

$$-\frac{C}{B} = h(0) \geq h^{2n+1}(0) > h^{2n+3}(0) > X_3 \quad \text{para todo } n \geq 0$$

Esto nos muestra que la sucesión $(h^{2n+1}(0))$ converge decrecientemente a un número real $M \in [X_3, -C/B]$.

Tenemos entonces que $L \leq X_3 \leq M$, que L, X_3 y M pertenecen al intervalo $[0, -C/B]$ y cada uno de estos tres números satisface la ecuación $h(x) = g(x)$. En efecto: X_3 la satisface por ser un punto fijo de g y de h; L la satisface debido a la continuidad de h^2 que permite escribir:

$$h^2(L) = \lim_{n\to\infty} h^2(h^{2n}(0)) = \lim_{n\to\infty} h^{2n+2}(0) = L$$

de donde se obtiene: $h(L) = g(L)$. Similarmente tenemos que $h(M) = g(M)$.

Probaremos que $L = X_3 = M$, mostrando que la ecuación $h(x) = g(x)$ posee una única raíz en el intervalo $[0, -C/B]$. Haremos esta prueba por etapas, comenzando por el intervalo $[X_3, -C/B]$. Tenemos:

$$g(x) = -\sqrt[3]{Bx + C} > 0 \quad \text{para todo } x \in [X_3, -C/B[,$$

$$g'(x) = -\frac{B}{3}(g(x))^{-2}, \qquad g''(x) = -\frac{2}{9}B^2(g(x))^{-5}, \qquad g'''(x) = -\frac{10}{27}B^3(g(x))^{-8},$$

$$g^{iv}(x) = -\frac{80}{81}B^4(g(x))^{-11} < 0 \quad \text{para todo } x \in [X_3, -C/B[$$

La última desigualdad muestra que g''' es estrictamente decreciente en $[X_3, -C/B[$. Esto permite escribir: $-\frac{10}{27}B^3(X_3)^{-8} = g'''(X_3) > g'''(t)$, para todo $x \in]X_3, -C/B[$ y para todo $t \in]X_3, x]$. Luego: $g'''(t)(x - X_3)^3 < g'''(X_3)(x - X_3)^3$, para todo $x \in]X_3, -C/B[$ y para todo $t \in]X_3, x]$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} g(x) - h(x) < (x - X_3)\Big(\big(g'(X_3) - h'(X_3)\big) + \frac{1}{2}\big(g''(X_3) - h''(X_3)\big)(x - X_3) \\ + \frac{1}{6}\big(g'''(X_3) - h'''(X_3)\big)(x - X_3)^2\Big) \end{aligned} \tag{26}$$

Como $0 < X_3 < \sqrt{B/3}$, entonces $X_3^{2n} < \left(\frac{B}{3}\right)^n$ para todo $n \geq 1$. Entonces se tiene:

$$g'(X_3) - h'(X_3) = \frac{3}{B}X_3^{-2}\Big(X_3^4 - \big(\frac{B}{3}\big)^2\Big) < 0$$

$$g''(X_3) - h''(X_3) = \frac{6}{B}X_3^{-5}\Big(X_3^6 - \big(\frac{B}{3}\big)^3\Big) < 0$$

$$g'''(X_3) - h'''(X_3) = \frac{6}{B}X_3^{-8}\Big(X_3^8 - 5\big(\frac{B}{4}\big)^3\Big) < \frac{6}{B}X_3^{-8}\Big(X_3^8 - \big(\frac{B}{4}\big)^3\Big) < 0$$

Estas desigualdades, junto con $x - X_3 > 0$ y (26), muestran que

$$g(x) - h(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in]X_3, -C/B[\tag{27}$$

Ahora extenderemos este resultado al intervalo $]X_3, -\sqrt[3]{C}]$, para lo cual basta observar que debido a que g es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$ y a que $g(-C/B) = 0$, entonces $g(x) < 0$ en $]-C/B, \infty[$; mientras que debido a que h es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}$ y a que $h(-\sqrt[3]{C}) = 0$, entonces $h(x) > 0$ en $]-\infty, -\sqrt[3]{C}[$. Esto, junto con $-C/B < -\sqrt[3]{C}$, permite escribir:

$$g(x) - h(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in [-C/B, -\sqrt[3]{C}] \tag{28}$$

Reuniendo (27) y (28) se obtiene:

$$g(x) - h(x) < 0 \quad \text{para todo } x \in]X_3, -\sqrt[3]{C}] \tag{29}$$

(29), junto con el comportamiento estrictamente decreciente de h producen la desigualdad

$$x > h(h(x)) \quad \text{para todo } x \in]X_3, -\sqrt[3]{C}] \tag{30}$$

Pongamos $y = h(x)$, con lo cual $x = g(y)$ y teniendo presente que $h(]X_3, -\sqrt[3]{C}]) = [0, X_3[$, la desigualdad (30) se convierte en:

$$g(y) > h(y) \quad \text{para todo } y \in [0, X_3[\tag{31}$$

Las desigualdades (29) y (31) muestran que X_3 es la única raíz de la ecuación $h(x) = g(x)$ en el intervalo $[0, -C/B] \subseteq [0, -\sqrt[3]{C}]$. Esto prueba que $L = X_3 = M$ y así hemos demostrado que la sucesión (4) converge a X_3. Recordando el comportamiento de las subsucesiones $(x_{2n}) = (h^{2n}(0))$ y $(x_{2n+1}) = (h^{2n+1}(0))$, la convergencia consiste en aproximaciones sucesivas alternadamente por exceso y por defecto a la raíz X_3.

3.2. Pasemos ahora al caso $B < 0$ y $C > 0$, manteniendo la hipótesis $f(-a)f(a) < 0$. Como $B < 0$, f es estrictamente decreciente en $[-a, a]$. Esto, más la hipótesis implica $f(a) < 0$. Como $C = f(0) > 0$, tenemos que f cambia de signo en $[0, a]$ y por continuidad de f deducimos la existencia de una única raíz $X_3 \in]0, a[$.
Por otra parte, como $B < 0$, h es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, por lo que

$$0 < -\frac{C}{B} = h(0) < h(X_3) = X_3 \tag{32}$$

Como la función compuesta $h \circ h \circ \ldots \circ h = h^n$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$, de (32) obtenemos: $0 < h^n(0) < h^{n+1}(0) < X_3$, lo cual muestra la convergencia de la sucesión definida por (4) a cierto número $L \leq X_3$, por ser dicha sucesión estrictamente creciente y acotada superiormente por X_3. Observando que la continuidad de h implica que L es una raíz de la ecuación $h(x) = x$, deducimos que $L = X_3$, puesto que X_3 es la única raíz de esta ecuación en el intervalo $[0, a]$.

Finalmente: cambiando x, C, f, g y h por $-x$, $-C$, $-f$, $-g$ y $-h$ respectivamente, se tiene que:

3.3. El caso $f(-a)f(a) < 0$ con $B > 0$ y $C > 0$ se reduce al caso 3.1; y

3.4. El caso $f(-a)f(a) < 0$ con $B < 0$ y $C < 0$ se reduce al caso 3.2.

Referencias.

[1] N. S. Bakhvalov, *Numerical Methods*, Ed. MIR, Moscú, 1977.

[2] T. M. Apostol, *Análisis Matemático*, Ed. Reverté, Barcelona, 1977.