CIENCIAS MATEMÁTICAS 2(2): 41–47 (1991)

INTEGRAL Y PRIMITIVAS DE RIEMANN.*

Winston Alarcón Athens
Escuela de Matemática, U.C.R.

Resumen. Hacemos un breve estudio de una generalización de la noción de primitiva, que se corresponde exactamente con la integral de Riemann. Obtenemos una caracterización de la integrabilidad en el sentipo de Riemann, que produce un Teorema Fundamental del Cálculo sin hipótesis especiales. Probamos un lema que generaliza el teorema acerca de las funciones con derivada nula en un intervalo. Aplicamos estos conceptos, bosquejando una alternativa de exposición simplificada de la integral de Riemann en $\mathbb{R}$.

Abstract. By means of a generalization of the notion of primitive that exactly fits with the Riemann integral, we obtain a caracterization that give us a Fundamental Theorem of Calculus without special hypothesis. In a lemma, we prove a generalization about the property of the functions with null derivative in an interval. We apply this concepts showing a simplified alternative of exposition of the Riemann integral in $\mathbb{R}$.

1. Introducción. Como es bien sabido, la integración en el sentido de Riemann y la antiderivación, están lejos de ser operaciones equivalentes y ninguna de ellas se reduce a la otra: Hay funciones reales, derivables en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a,b]$ cuya derivada es acotada pero no es Riemann–integrable en $[a,b]$ **[3]**. Así, para el cumplimiento de la igualdad

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

no basta suponer que F sea una primitiva de la función acotada f en $[a,b]$: hay que exigir además que f sea Riemann–integrable en $[a,b]$.

Por otra parte, hay funciones Riemann–integrables en un intervalo $[a,b]$ (como la función característica del conjunto de Cantor en $[0,1]$), cuya integral desde a hasta x define una función de la variable x que no es una primitiva —al menos en un sentido elemental— de la primera.

Desde luego, todo esto se traduce en que el Teorema Fundamental del Cálculo requiere hipótesis especiales cuando se trabaja con la integral de Riemann y con cualquier noción habitual de antiderivada.

En lo que sigue expondremos una generalización de la noción de primitiva que se corresponde exactamente con la integral de Riemann, produciendo un Teorema Fundamental del

* Este trabajo forma parte del Proyecto Número 114–89–051 de la Vicerrectoría de Investigación, Universidad de Costa Rica.

Cálculo sin hipótesis especiales, junto con una alternativa de exposición simplificada de la integración de Riemann.

2. Pre–primitivas y $\mathcal{R}$–primitivas. Como sabemos que la derivación *no es* operación inversa de la integración de Riemann, renunciaremos a considerar como cuestión central el límite

$$\lim_{y \to x} \frac{F(y) - F(x)}{y - x};$$

en cambio impondremos cierta exigencia a la razón de incrementos que aparece bajo el anterior límite, estableciendo así una primera etapa de la generalización que buscamos.

En lo sucesivo, J denotará un intervalo no degenerado de la recta real $\mathbb{R}$ y, por brevedad, diremos que una función $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es *acotada en compactos* si la restricción de f a cualquier subintervalo compacto de J es acotada.

Definición A. Sea $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada en compactos. Diremos que una función $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es una *pre–primitiva de f en J* si, dados $x, y \in J$, con $x \neq y$, la razón de incrementos

$$\frac{F(y) - F(x)}{y - x}$$

está entre cada par de cotas inferior y superior de f en el subintervalo compacto de J de extremos x, y.

Comprobemos en primer lugar que la definición anterior es una generalización de la noción elemental de primitiva.

Teorema 1. Sea $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada en compactos. Las primitivas de f en J (si existen), son pre–primitivas de f en J.

Prueba. Si $F : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es una primitiva de f en J, sean x, y dos puntos distintos de J, digamos $x < y$. Como F es continua en $[x, y]$ y derivable en $]x, y[$, por el Teorema del Valor Medio para derivadas, existe $z \in]x, y[$ tal, que

$$F'(z) = \frac{F(y) - F(x)}{y - x}.$$

Ahora, si p, q son cualesquiera cotas inferior y superior de f en $[x, y]$, tenemos $p \leq f(z) \leq q$, con lo cual:

$$p \leq \frac{F(y) - F(x)}{y - x} \leq q.$$

Hemos probado que F es una pre–primitiva de f en J. ∎

Las pre–primitivas tienen varias propiedades que las asemejan a las primitivas. Los dos siguientes teoremas describen esta situación.

Teorema 2. Las pre–primitivas son continuas. De hecho, poseen la propiedad de Lipschitz en cada subintervalo compacto de su dominio.

Prueba. Si F es una pre–primitiva de f en un intervalo J y si $a, b \in J$ son puntos distintos de J, con $a < b$, sea $L = \max\{\,|m|, |M|\,\}$, donde m y M respectivamente denotan el ínfimo y el supremo de f en $[a,b]$. Si x, y son dos puntos distintos de $[a,b]$ —digamos $x < y$—, puesto que m y M son, respectivamente, cotas inferior y superior de f en $[x,y]$, se tiene:

$$-L \leq m \leq \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \leq M \leq L\,,$$

de donde obtenemos:

$$|F(y)-F(x)| \leq L|y-x|\,.$$

Esto muestra que F es lipschitziana en cada subintervalo compacto de J, lo cual a su vez implica que F es continua en el intervalo J. ■

Teorema 3. Si F es una pre–primitiva de f en el intervalo J y si f tiene límite lateral por la derecha $f(x^+)$ (resp., por la izquierda $f(x^-)$) en $x \in J$, entonces F tiene derivada por la derecha $D^+F(x)$ (resp., por la izquierda $D^-F(x)$) en x, verificándose su igualdad. En particular, si f es continua en x entonces F tiene derivada en x, verificándose $F'(x) = f(x)$. Si f es continua, F es una primitiva de f en J.

Prueba. Sea $y \in J$ con $x < y$. Sean $m(y)$ y $M(y)$ el ínfimo y el supremo de f en $[x,y]$. Por hipótesis, tenemos:

$$m(y) \leq \frac{F(y)-F(x)}{y-x} \leq M(y)\,.$$

Supongamos que f tiene límite lateral por la derecha $f(x^+)$ en x. Entonces $\lim_{y\to x^+} m(y) = \lim_{y\to x^+} M(y) = \lim_{y\to x^+} f(y) = f(x^+)$. Esto muestra que

$$D^+F(x) = \lim_{y\to x^+} \frac{F(y)-F(x)}{y-x} = f(x^+)\,.$$

Similarmente se prueba que $D^-F(x) = f(x^-)$, cuando f tiene límite lateral por la izquierda $f(x^-)$ en x. ■

Un aspecto agradable de las pre–primitivas es que puede contarse con su existencia.

Teorema 4. Sea $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada en compactos. Entonces f posee pre–primitivas en J.

Prueba. Sea $c \in J$. Definamos la función $\underline{F_c} : J \longrightarrow \mathbb{R}$, mediante:

$$\underline{F_c}(x) = \begin{cases} \underline{\mathcal{I}}(f;c,x) & \text{si } x > c \\ 0 & \text{si } x = c \\ -\underline{\mathcal{I}}(f;x,c) & \text{si } x < c \end{cases}$$

donde, si a, $b \in J$ son tales que $a < b$, $\underline{\mathcal{I}}(f;a,b)$ denota el supremo del conjunto $\underline{\mathcal{S}}(f;a,b)$ de las sumas inferiores para f en $[a,b]$, esto es, sumas de la forma $\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x_{i-1})$, con $n \in \mathbb{N}$, $a = x_0 \leq \ldots \leq x_{i-1} \leq x_i \leq \ldots \leq x_n = b$ y p_i cota inferior de f en $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$. Notando que si $x < y < z$, se tiene: $\underline{\mathcal{S}}(f;x,z) = \{\, s + s' \mid s \in \underline{\mathcal{S}}(f;x,y)\,,\, s' \in \underline{\mathcal{S}}(f;y,z) \,\}$ y podemos usar la propiedad aditiva del supremo [**1**, pág. 12], obteniendo: $\underline{\mathcal{I}}(f;x,y) + \underline{\mathcal{I}}(f;y,z) = \underline{\mathcal{I}}(f;x,z)$. Esto nos permite escribir:

$$\underline{F_c}(y) - \underline{F_c}(x) = \underline{\mathcal{I}}(f;x,y)$$

siempre que $x < y$. Ahora, si p, q son cualesquiera cota inferior y superior de f en $[x, y]$, debido a la definición de $\underline{\mathcal{I}}(f; x, y)$, tenemos que

$$p(y - x) \leq \underline{\mathcal{I}}(f; x, y) \leq q(y - x),$$

y combinando estos resultados, obtenemos:

$$p \leq \frac{F_c(y) - F_c(x)}{y - x} \leq q,$$

lo que prueba que F_c es una pre–primitiva de f en J. ∎

Una diferencia importante entre las nociones de primitiva y pre–primitiva es que la diferencia de dos pre–primitivas de una función en un intervalo no necesariamente es una constante. Para ello, basta considerar la función característica de los racionales (o función de Dirichlet) $\chi_{\mathbb{Q}}$: debido a que $\chi_{\mathbb{Q}}$ vale 1 en cualquier racional y cero en cualquier irracional, si $x < y$ y p, q son cualesquiera cotas inferior y superior de $\chi_{\mathbb{Q}}$ en $[x, y]$, se tiene: $p \leq 0 < 1 \leq q$. En consecuencia, cualquier función $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en que las secantes a su gráfico tengan pendiente no negativa y no mayor que 1, es una pre–primitiva de $\chi_{\mathbb{Q}}$ en $\mathbb{R}$. Por ejemplo, las funciones $F_1(x) = 0$ y $F_2(x) = x$ son dos de tales pre–primitivas. Como F_1 y F_2 no difieren en una constante, al menos una de ellas no es primitiva de $\chi_{\mathbb{Q}}$ en $\mathbb{R}$, en ningún sentido habitual del término.

Sin embargo, hay importantes clases de funciones cuyas pre–primitivas difieren en constantes. Por ejemplo, las pre–primitivas de una función f continua en J son —de acuerdo con el teorema 3— primitivas de f en J, por lo que difieren en constantes. El mismo teorema 3 junto con el lema que sigue, nos proporcionará una clase todavía más amplia de funciones acotadas en compactos cuyas pre–primitivas poseen esa propiedad.

Lema 5. Sea $H : J \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que en cada punto x del intervalo J, H posee derivada lateral por la derecha (resp., por la izquierda) nula. Entonces H es constante.

Prueba. Supongamos que H posee derivada lateral por la derecha nula, en cada punto del intervalo J. Supongamos además, por contradicción, que H no es constante en J. Entonces existen $a, b \in J$, con $a < b$, tales que $H(a) \neq H(b)$. Sea $L = |H(b) - H(a)| > 0$. Consideremos el conjunto

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in]a, b] : \frac{|H(x) - H(a)|}{x - a} \leq \frac{L}{2(b - a)} \right\}$$

Debido a que $\frac{L}{2(b-a)} > 0$ y $\lim_{x \to a^+} \frac{H(x) - H(a)}{x - a} = 0$, tenemos que el conjunto $\mathcal{C}$ es no vacío. Sea c el supremo de $\mathcal{C}$. Como $\left|\frac{H(b) - H(a)}{b - a}\right| = \frac{L}{b - a} > \frac{L}{2(b-a)}$, tenemos que $a < c < b$. Sea

$$\mathcal{D} = \left\{ x \in]c, b] : \frac{|H(x) - H(c)|}{x - c} \leq \frac{L}{2(b - a)} \right\}$$

Nuevamente $\mathcal{D} \neq \emptyset$ ya que $\lim_{x\to c^+} \frac{H(x)-H(c)}{x-c} = 0$. Sea $d \in \mathcal{D}$. Tenemos: $c < d$. Sin embargo:

$$\begin{aligned}
|H(d) - H(a)| &= |H(d) - H(c) + H(c) - H(a)| \\
&\leq |H(d) - H(c)| + |H(c) - H(a)| \\
&= \frac{|H(d) - H(c)|}{d-c}(d-c) + \frac{|H(c) - H(a)|}{c-a}(c-a) \\
&\leq \frac{L}{2(b-a)}\Big((d-c) + (c-a)\Big) = \frac{L}{2(b-a)}(d-a)
\end{aligned}$$

En consecuencia: $\frac{|H(d)-H(a)|}{d-a} \leq \frac{L}{2(b-a)}$ y de aquí concluimos que $d \in \mathcal{C}$. Esto contradice la desigualdad $c < d$ y el hecho de ser c cota superior de $\mathcal{C}$. Así queda probado que H es constante en J. El caso en que H posee derivada lateral por la izquierda nula en cada punto del intervalo J, es similar. ■

Teorema 6. Sea $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada en compactos. Una condición suficiente para que las pre–primitivas de f en J difieran en constantes, es que f tenga límite lateral por la derecha en cada punto de J, o por la izquierda en cada punto de J.

Prueba. Si f tiene límite por la derecha en cada punto de J, entonces por teorema 3, si F y G son pre–primitivas de f en J, ambas tienen derivada por la derecha en cada punto $x \in J$ y se verifica: $D^+F(x) = D^+G(x) = f(x^+)$. Esto muestra que la función $H = F - G$ tiene derivada lateral por la derecha nula en cada punto de J y el lema 5 nos permite concluir que H es constante en J. ■

Este resultado motiva la siguiente definición:

Definición B. Sea $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada en compactos. Las pre–primitivas de f en J las llamaremos *primitivas de Riemann* o $\mathcal{R}$–primitivas, si difieren en constantes.

Teorema 7. Sea $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada en compactos. Entonces f es Riemann–integrable en los subintervalos compactos de J si y sólo si las pre–primitivas de f en J son $\mathcal{R}$–primitivas. Si f es Riemann–integrable en los subintervalos compactos de J y si a, $b \in J$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

donde F es cualquier $\mathcal{R}$–primitiva de f en J.

Prueba. Según vimos en la prueba del teorema 4, la función $\underline{F_c}$ allí definida es una pre–primitiva de f en J. Similarmente se prueba que también es una pre–primitiva de f en J la función

$$\overline{F_c}(x) = \begin{cases} \overline{\mathcal{I}}(f;c,x) & \text{si } x > c \\ 0 & \text{si } x = c \\ -\overline{\mathcal{I}}(f;x,c) & \text{si } x < c \end{cases}$$

donde, si a, $b \in J$ son tales que $a < b$, $\overline{\mathcal{I}}(f;a,b)$ denota el ínfimo del conjunto de las sumas superiores para f en $[a,b]$, esto es, sumas de la forma $\sum_{i=1}^n q_i(x_i - x_{i-1})$, con $n \in \mathbb{N}$, $a = x_0 \leq \ldots \leq x_{i-1} \leq x_i \leq \ldots \leq x_n = b$, q_i cota superior de f en $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$.

i) Supongamos que las pre–primitivas de f en J son $\mathcal{R}$–primitivas. Entonces las funciones $\underline{F_c}$ y $\overline{F_c}$ difieren en una constante; tal constante es 0 ya que estas dos funciones coinciden en $x = c$. En consecuencia, $\underline{F_c} = \overline{F_c}$. Ahora, si $a, b \in J$ son tales que $a < b$, tenemos que $\underline{\mathcal{I}}(f;a,b) = \underline{F_c}(b) - \underline{F_c}(a) = \overline{F_c}(b) - \overline{F_c}(a) = \overline{\mathcal{I}}(f;a,b)$, lo que prueba que f es Riemann-integrable en $[a,b]$.

ii) Ahora supongamos que f es Riemann–integrable en los subintervalos compactos de J y que a, $b \in J$ son tales que $a < b$. Sea $a = x_o < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ una partición arbitraria del intervalo $[a,b]$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, sean p_i, q_i cualesquiera cotas inferior y superior de f en en intervalo $[x_{i-1} - x_i]$. Si F es cualquier pre–primitiva de f en J, para cada $i = 1, \ldots, n$ se verificará:

$$p_i \leq \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} \leq q_i\,.$$

Multiplicando por $x_i - x_{i-1} > 0$ y sumando miembro a miembro desde $i = 1$ hasta n, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - x_{i-1}) \leq F(b) - F(a) \leq \sum_{i=1}^{n} q_i(x_i - x_{i-1})\,,$$

ya que la suma telescópica $\sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1})$ colapsa a la expresión $F(b) - F(a)$.

Hemos probado que si F es cualquier pre–primitiva de f en J y si a, $b \in J$ son tales que $a < b$, entonces la diferencia $F(b) - F(a)$ es, al mismo tiempo, cota superior de las sumas inferiores para f en $[a,b]$, y cota inferior de las sumas superiores para f en $[a,b]$. En consecuencia, por definición de $\underline{\mathcal{I}}(f;a,b)$ y $\overline{\mathcal{I}}(f;a,b)$, se tiene:

$$\underline{\mathcal{I}}(f;a,b) \leq F(b) - F(a) \leq \overline{\mathcal{I}}(f;a,b)\,.$$

Como estamos suponiendo que f es Riemann–integrable en los subintervalos compactos de J, concluímos que

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,,$$

para cualquier pre–primitiva F de f en J, donde podemos levantar la restricción $a < b$ y exigir meramente que a, $b \in J$. Esto mismo permite concluir que si F_1 y F_2 son cualesquiera pre–primitivas de f en J y si $a \in J$, entonces $F(x) - F(a) = G(x) - G(a)$ para todo $x \in J$, lo cual muestra que la diferencia $F - G$ es constante en J. Con esto queda probado que las pre–primitivas de f en J son $\mathcal{R}$–primitivas. ■

Teorema 8. Sea $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ acotada en compactos. Una condición suficiente para que f sea Riemann–integrable en los subintervalos compactos de J, es que f tenga límite lateral por la derecha en cada punto de J, o por la izquierda en cada punto de J. [2].

Prueba. Consecuencia inmediata de teoremas 6 y 7. ■

3. Aplicación. Como consecuencia inmediata de los sencillos teoremas que acabamos de examinar, obtenemos eficientemente los siguientes resultados clásicos:

Corolario A. Si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona, entonces f es Riemann–integrable en los subintervalos compactos de J.

Prueba. Si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es monótona, f es acotada en compactos y f tiene límite lateral (por la izquierda si f es creciente, por la derecha si f es decreciente) en cada punto de J. Por Teorema 8, f es Riemann–integrable en los subintervalos compactos de J. ∎

Corolario B. Toda función real continua en un intervalo J admite primitivas en J y es Riemann–integrable en los subintervalos compactos de J.

Prueba. Si $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, f es acotada en compactos y se cumplen las hipótesis del Teorema 8.

Otra alternativa de prueba que no usa nuestro lema 5 es la siguiente: por teorema 4, f posee pre–primitivas en J y por teorema 3 tales pre–primitivas son primitivas de f en J, por lo que las pre–primitivas de f en J son $\mathcal{R}$–primitivas. Por teorema 7, f es Riemann–integrable en los subintervalos compactos de J. ∎

Nótese que en las dos versiones de la anterior prueba, no hemos usado la propiedad de continuidad uniforme.

Corolario C. (Primer Teorema Fundamental del Cálculo) Sea $f : J \longrightarrow \mathbb{R}$ una función Riemann-integrable en los subintervalos compactos de J. Sea $c \in J$ y consideremos la función $F_c : J \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la igualdad

$$F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt\,.$$

Entonces F_c es continua en J y si f es continua en $x \in J$, F_c es derivable en x, verificándose $F_c'(x) = f(x)$.

Prueba. Por Teorema 7, $F_c(x) = \int_c^x f(t)\,dt = F(t) - F(c)$, donde F es cualquier pre–primitiva de f en J. Como F_c y F difieren en una constante, F_c es una pre–primitiva de f en J. Por Teorema 3, F_c es continua en J; y si f es continua en $x \in J$, F_c es derivable en x, verificándose $F_c'(x) = f(x)$. ∎

Corolario D. (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo) Sean a, $b \in \mathbb{R}$, con $a < b$. Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, acotada. Si f es Riemann–integrable en $[a,b]$ y si f posee primitivas en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,,$$

donde F es cualquier primitiva de f en $[a,b]$.

Prueba. Sea F una primitiva arbitraria de f en $[a,b]$. Por teorema 1, F es una pre–primitiva de f en $[a,b]$. Por otra parte, como f es Riemann–integrable en $[a,b]$, f es Riemann–integrable en cualquier subintervalo compacto de $[a,b]$ y el teorema 7 permite escribir la igualdad del enunciado. ∎

Referencias.

[1] T. M. APOSTOL: *Análisis Matemático*. Reverté, 2a ed., Barcelona, 1977.

[2] R. C. METZLER: *On Riemann integrability*. AMM vol. 78, n. 10, p. 1129.

[3] I. MUNTEAN: *Clasificación de algunas funciones reales en un intervalo compacto*. Ciencias Matemáticas, v. 1, n. 1, pág. 39, Universidad de Costa Rica, San José, 1990.